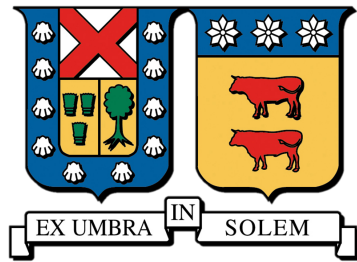


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CIUDAD – CHILE



“APLICACIONES HOLOGRÁFICAS EN
AGUJEROS NEGROS CON PELO”

JORGE PATRICIO MAGGIOLO TAPIA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN FÍSICA

PROFESOR GUÍA:

Dr. Dumitru Astefanesei



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☐ Memoria o trabajo de título ☒ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: **APLICACIONES HOLOGRÁFICAS EN AGUJEROS NEGROS CON PELO**__

Nombre del candidato(a): **Jorge Patricio Maggiolo Tapia**

Carrera / Grado: **Doctorado en Ciencias Físicas**__

Campus: **Casa Central**__ Departamento: **Física**__

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, **Dumitru Astefanesei**_____, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

X El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 23/09/2026

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 23/09/2026

Firma:

Julio 2026

Comité Examinador

Las siguientes personas han formado parte del comité examinador de esta tesis. La decisión del Comité examinador se toma por mayoría de votos.

Supervisor(es): Dr. Dumitru Astefanesei
Profesor Adjunto,
Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Examinador Interno: Dr. Nelson Manuel Videla Menares
Profesor Asociado,
Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Examinador Interno: Dr. Ayan Mukhopadhyay
Profesor Asociado,
Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Examinador Externo: Dr. David Choque Quispe
Profesor a Tiempo Completo,
Departamento Académico de Ciencias – Sección Física,
Pontificia Universidad Católica del Perú

Declaración del Autor

Declaro que esta tesis representa el resultado de mi trabajo de investigación realizado durante el programa en conjunto de Doctorado en Física de la Universidad Técnica Federico Santa María y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, bajo la supervisión del Dr. Dumitru Astefanesei.

Asimismo, declaro que todas las fuentes de información utilizadas han sido debidamente citadas y que los resultados aquí presentados no han sido sometidos previamente para la obtención de otro grado académico.

Resumen

Los agujeros negros en espacios asintóticamente Anti-de Sitter constituyen un escenario fundamental para el estudio de la correspondencia AdS/CFT, al relacionar sistemas gravitacionales con teorías de campos definidas en la frontera del espacio-tiempo. En este contexto, la presencia de campos escalares introduce dificultades adicionales en la definición de cantidades conservadas, la implementación de condiciones de borde y la interpretación holográfica de las propiedades termodinámicas de las soluciones.

Esta tesis estudia dos aspectos de la descripción holográfica de agujeros negros cargados acoplados a campos escalares. En primer lugar, se analiza la renormalización holográfica de una familia de soluciones del modelo STU con cuatro cargas y tres campos escalares, con el propósito de obtener una acción regularizada y cantidades conservadas finitas a partir del tensor cuasilocal de Brown–York. En segundo lugar, se estudia la aplicabilidad de la fórmula de Cardy–Verlinde en casos concretos de agujeros negros asintóticamente Anti-de Sitter, incluyendo soluciones con múltiples cargas y una solución diónica acoplada a un campo escalar. Para ello se emplean técnicas de renormalización holográfica, el tensor de Brown–York y el análisis de las cantidades termodinámicas y de la teoría dual en la frontera.

Como primer resultado, se presenta una interpretación de la fórmula de Cardy–Verlinde para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti-de Sitter en términos de una energía efectiva asociada a la parte irreducible de la solución, siguiendo ideas relacionadas con la masa irreducible introducida por Ruffini. En segundo lugar, se estudian soluciones con campos escalares mediante el tensor de Brown–York y condiciones de borde mixtas, obteniendo sus cantidades conservadas y analizando las propiedades termodinámicas de las teorías duales correspondientes. En tercer lugar, para las familias de soluciones consideradas, se analiza la relación entre la preservación de la estructura conforme en la frontera, la ecuación de estado de la teoría dual y la aplicabilidad de la fórmula de Cardy–Verlinde. Finalmente, se propone un término de frontera para la familia STU de cuatro cargas y tres campos escalares y se estudia su contribución a la regularización de la acción y de las cantidades obtenidas a partir del tensor de Brown–York en las soluciones analizadas.

Los resultados de esta tesis están restringidos a las teorías, familias de soluciones, condiciones de borde y ensambles considerados. En particular, el análisis de la fórmula de Cardy–Verlinde se limita a los casos estudiados y no pretende establecer un criterio universal para su validez. Asimismo, la extensión del término de frontera propuesto a configuraciones multiescalares más generales requiere un análisis adicional de sus propiedades de localidad, covariancia y comportamiento bajo variaciones independientes.

Palabras clave: agujeros negros, espacios Anti-de Sitter, correspondencia AdS/CFT, renormalización holográfica, tensor de Brown–York, fórmula de Cardy–Verlinde, modelo STU.

Publicaciones Asociadas

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta tesis dieron origen a las siguientes publicaciones científicas:

1. D. Astefanesei, D. Choque, J. Maggiolo y R. Rojas,
Holography of AdS Hairy Black Holes and Cardy–Verlinde Formula,
Physical Review D **106**, 044032 (2022).
DOI: 10.1103/PhysRevD.106.044032.
arXiv:2111.01337 [hep-th].
2. D. Astefanesei, D. Choque y J. Maggiolo,
Conformal Symmetry at the AdS Boundary and Integrability Conditions for Hairy Black Holes,
manuscrito en preparación.
3. S. Bahamonde, J. Maggiolo y C. Pfeifer,
Coupling Electromagnetism to Torsion: Black Holes and Spin-Charge Interactions,
Physical Review D **113**, 044021 (2026).
DOI: 10.1103/qc jx-9yz1.
arXiv:2507.02362.

Las publicaciones 1 y 2 constituyen la base científica principal de esta tesis y contienen los resultados relacionados con agujeros negros acoplados a campos escalares, holografía, renormalización gravitacional y condiciones de borde en espacios asintóticamente Anti-de Sitter.

Por otra parte, la publicación 3 fue desarrollada como una línea de investigación independiente durante una pasantía doctoral realizada en el Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (Kavli IPMU) de la Universidad de Tokio, bajo la supervisión del Dr. Sebastian Bahamonde. Aunque sus resultados no forman parte del cuerpo principal de esta tesis, dicho trabajo contribuyó a la formación doctoral del autor mediante el estudio de teorías gravitacionales con torsión y sus aplicaciones a agujeros negros cargados.

Agradecimientos

El camino que ha representado este doctorado ha estado marcado por desafíos, aprendizajes y oportunidades que han contribuido profundamente a mi formación tanto académica como personal. Por ello, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible esta etapa de mi vida.

En primer lugar, agradezco a mi profesor guía, el Dr. Dumitru Astefanesei, por su constante apoyo, orientación y generosidad intelectual a lo largo de estos años. Su disposición para compartir conocimientos, discutir ideas y enfrentar problemas de investigación ha sido fundamental para mi desarrollo como investigador. Asimismo, valoro profundamente el apoyo que me ha brindado al momento de proyectar mi futuro profesional, incluso cuando este comienza a tomar caminos que se alejan de la física teórica. Su confianza y respaldo han significado mucho más de lo que estas palabras pueden expresar.

Quisiera agradecer también a mis colaboradores y mentores, Raúl Rojas y David Choque, quienes han sido una parte fundamental de mi formación científica. Más allá de las investigaciones que hemos desarrollado en conjunto, ambos han contribuido significativamente a mi aprendizaje, compartiendo conocimientos de física teórica, técnicas de investigación y herramientas de cálculo que han enriquecido mi trabajo académico y ampliado mi manera de abordar los problemas científicos.

Un agradecimiento especial merece el Dr. Sebastian Bahamonde, quien me recibió durante mi pasantía de investigación en Japón. Su disposición para colaborar conmigo me permitió explorar nuevas líneas de investigación y ampliar considerablemente mis horizontes académicos. Agradezco especialmente su paciencia al introducirme a nuevas herramientas computacionales y metodologías de trabajo que hasta entonces me eran desconocidas, así como la oportunidad de conocer de primera mano un ambiente de investigación internacional de primer nivel.

Finalmente, deseo agradecer a mi familia, cuyo apoyo incondicional ha sido el pilar más importante durante todo este proceso. A mis padres, Tatiana y Jorge, por creer siempre en mí, incluso en los momentos en que yo mismo dudaba. Nada de lo alcanzado hasta ahora habría sido posible sin su esfuerzo, sacrificio y apoyo constante a lo largo de toda mi vida. A mi hermana Siena, por ser una fuente permanente de motivación e inspiración. Su sola existencia me impulsa a seguir creciendo, aprendiendo y esforzándome por convertirme en una mejor persona y en un ejemplo del cual pueda sentirse orgullosa.

A todos ustedes, muchas gracias.

*Dedicado a todos aquellos
que alguna vez velaron por mi felicidad.*

Contenidos

Comité Examinador	ii
Declaración del Autor	iii
Resumen	iv
Publicaciones Asociadas	vi
Agradecimientos	vii
Dedicación	viii
1 Introducción	1
2 Acción gravitacional	7
2.1 Agujeros Negros	10
2.1.1 Agujero negro de Schwarzschild	10
2.1.2 Agujeros negros cargados: la solución de Reissner–Nordström	12
2.1.3 Agujeros negros con rotación: la solución de Kerr	14
3 El espacio Anti–de Sitter	16
3.1 Espacios maximalmente simétricos	16
3.2 El espacio Anti–de Sitter	18

3.2.1	La frontera conforme de Anti-de Sitter	20
3.3	Campos escalares en Anti-de Sitter	22
3.3.1	Ecuación de Klein–Gordon en Anti-de Sitter	22
3.3.2	Cota de Breitenlohner–Freedman	24
3.3.3	Interpretación holográfica de los modos asintóticos	26
3.4	Correspondencia AdS/CFT	27
3.5	Renormalización holográfica	30
3.5.1	La acción gravitacional y el término de Gibbons–Hawking–York	31
3.5.2	Regularización de la acción	33
3.5.3	Contratérminos gravitacionales	34
3.5.4	Contratérminos para campos escalares	35
3.5.5	Condiciones de borde mixtas y términos finitos	36
3.5.6	Tensor de energía–momento holográfico	38
3.5.7	Interpretación de la acción renormalizada	40
3.5.8	Aplicación a agujeros negros con pelo escalar	40
4	Termodinámica de agujeros negros	42
4.1	Leyes de la mecánica de agujeros negros	42
4.2	Correspondencia con la termodinámica	43
4.2.1	Radiación de Hawking	44
4.2.2	Temperatura a partir de la geometría cercana al horizonte	45
4.2.3	Temperatura del agujero negro de Reissner–Nordström	47
4.2.4	Temperatura del agujero negro de Kerr	48
5	Tensor de energía–momento holográfico y cargas conservadas	49
5.1	Tensor cuasilocal de Brown–York	50
5.2	Espacios asintóticamente planos	52
5.3	Espacios asintóticamente Anti-de Sitter	53
5.4	Dependencia de esquema y contratérminos de materia	54
5.5	Cargas conservadas	55

6	Agujeros negros cargados en espacios Anti-de Sitter	58
6.1	La teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica	59
6.1.1	Ecuaciones de movimiento	59
6.1.2	La solución de Reissner–Nordström–Anti-de Sitter	60
6.2	Termodinámica del agujero negro Reissner–Nordström–AdS	62
7	Agujeros negros con pelo escalar	68
7.1	Agujeros negros acoplados a un campo escalar	68
7.2	Estudio de casos particulares	72
7.2.1	Truncación de cuatro cargas iguales	72
7.2.2	Truncación para un campo escalar	73
7.3	Termodinámica del agujero negro acoplado a un campo escalar	75
7.4	Tensor de estrés holográfico	76
7.5	Agujeros negros diónicos con campo escalar	79
7.5.1	Termodinámica y cargas escalares	81
8	Un nuevo contratérmino	84
8.1	Contratérminos para la teoría	84
8.2	Construcción del Contratérmino Mixto	87
8.2.1	Representación local mediante un contratérmino cúbico	87
8.2.2	Principio variacional	89
8.3	Aplicación a la Solución General del Modelo STU	91
8.3.1	Datos termodinámicos de la solución	91
8.3.2	Contratérmino escalar para la solución STU	92
8.3.3	Evaluación de la acción euclidiana	93
8.3.4	Cancelación de la contribución escalar finita	94
8.3.5	Comparación con el formalismo de superpotencial	95
8.3.6	Verificación mediante el tensor de Brown–York	98
8.3.7	Primera ley de la termodinámica	99

9	Fórmula de Cardy–Verlinde	103
9.1	Derivación de la fórmula de Cardy–Verlinde	104
9.2	Ejemplo: Schwarzschild–AdS ₅	107
9.2.1	Geometría y termodinámica	107
9.2.2	Energía holográfica y energía de vacío	108
9.2.3	Marco conforme y cantidades termodinámicas	109
9.2.4	Extensividad y energía de Casimir	111
9.2.5	Energía de vacío versus energía de Casimir	112
9.2.6	Verificación de la fórmula de Cardy–Verlinde	113
9.3	Fórmula de Cardy–Verlinde con carga eléctrica	114
9.3.1	Aplicación al agujero negro de Reissner–Nordström AdS	115
9.4	Interpretación holográfica de la presión	119
9.4.1	La construcción original de Cai	120
9.4.2	Formulación de Cai en coordenadas adaptadas	121
9.5	Cardy–Verlinde para agujeros negros STU con una carga	122
9.5.1	Energía del estado base y fórmula de Cardy–Verlinde	124
9.6	Cardy–Verlinde para agujeros negros STU con cuatro cargas	126
9.7	Cardy–Verlinde para el agujero negro diónico	130
10	Conclusiones	134
	Referencias	142

Capítulo 1

Introducción

La gravedad es una de las interacciones fundamentales de la naturaleza y su descripción ha evolucionado desde explicaciones intuitivas del movimiento de los cuerpos hasta teorías matemáticas capaces de describir fenómenos extremos, como los agujeros negros y la evolución del universo. En particular, la teoría general de la relatividad proporcionó un marco geométrico en el cual la gravedad se interpreta como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la materia y la energía.

Desde la antigüedad, los seres humanos han intentado comprender por qué los objetos caen hacia la Tierra. En la filosofía natural de Aristóteles (384–322 a.C.), los cuerpos estaban constituidos por cuatro elementos fundamentales: tierra, agua, aire y fuego. Cada uno de ellos tendía de manera natural a ocupar su lugar propio en el universo; así, los objetos compuestos principalmente por tierra caían hacia el centro del mundo, mientras que el fuego ascendía hacia el cielo. Aunque esta explicación fue posteriormente reemplazada por teorías físicas más precisas, constituyó uno de los primeros intentos sistemáticos por describir el fenómeno de la gravedad [1].

Con el desarrollo de la mecánica newtoniana durante los siglos XVII y XVIII, la gravedad pasó a entenderse como una interacción universal entre cuerpos con masa. Este nuevo marco permitió especular sobre la existencia de objetos cuya atracción gravitacional fuese tan intensa que ni siquiera la luz pudiera escapar de ellos. En este contexto, a finales del siglo XVIII, John Michell (1724–1793) propuso el concepto de “estrellas oscuras”, objetos suficientemente masivos como para que su velocidad de escape superara la velocidad de la luz. Esta idea constituyó uno de los antecedentes conceptuales de los agujeros negros [2]. Pierre-Simon Laplace (1749–1827), de manera independiente, sugirió una idea similar en su obra *Exposition du système du monde*, ampliando la noción de cuerpos oscuros dentro

del marco newtoniano [3].

La revolución en nuestra comprensión de la gravedad ocurrió con Albert Einstein (1879–1955), quien en 1915 presentó la teoría general de la relatividad. En este marco, la gravedad deja de interpretarse como una fuerza en el sentido newtoniano y pasa a describirse mediante la geometría del espacio-tiempo. La materia y la energía determinan la curvatura del espacio-tiempo, mientras que dicha geometría determina el movimiento de los cuerpos. Esta teoría permitió explicar fenómenos que la mecánica newtoniana no podía describir completamente, como la precesión del perihelio de Mercurio y la desviación de la luz por la gravedad, confirmada experimentalmente durante el eclipse solar de 1919 [4].

En 1916, Karl Schwarzschild (1873–1916) encontró la primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein, correspondiente al campo gravitacional exterior de un objeto esféricamente simétrico [5]. Esta solución introdujo la existencia de una superficie característica, posteriormente interpretada como un horizonte de eventos, y constituyó el punto de partida para el estudio matemático de los agujeros negros. Décadas después, los trabajos sobre colapso gravitacional mostraron que, bajo determinadas condiciones, una estrella suficientemente masiva puede colapsar gravitacionalmente hasta formar un agujero negro [6].

Durante la segunda mitad del siglo XX, el estudio de los agujeros negros condujo al desarrollo de una relación profunda entre gravitación, termodinámica y teoría cuántica de campos. Los trabajos de Bekenstein establecieron una conexión entre el área del horizonte de eventos y la entropía de un agujero negro [7]. En unidades de Planck, la entropía de Bekenstein–Hawking es igual a un cuarto del área del horizonte,

$$S = \frac{A}{4}, \tag{1.1}$$

mientras que, en unidades del Sistema Internacional, se escribe como

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}. \tag{1.2}$$

Posteriormente, Hawking demostró que los efectos cuánticos permiten la creación de partículas en el campo gravitacional de un agujero negro, lo que implica que estos objetos emiten radiación térmica con una temperatura característica [8]. Este resultado completó la conexión entre los agujeros negros y la termodinámica, mostrando que estos sistemas poseen temperatura y entropía y que, en principio, pueden evaporarse mediante procesos cuánticos.

El desarrollo posterior del principio holográfico, propuesto inicialmente por 't Hooft [9] y desarrollado posteriormente por Susskind [10], condujo a la formulación de la correspondencia AdS/CFT por Maldacena [11]. Esta correspondencia establece una relación entre una teoría gravitacional definida en un espacio asintóticamente Anti-de Sitter (AdS) y una teoría conforme de campos definida en su frontera. Además de proporcionar un marco para estudiar aspectos cuánticos de la gravedad, esta dualidad permite relacionar cantidades geométricas y termodinámicas del espacio-tiempo con observables definidos en una teoría de campos.

En este contexto, los agujeros negros asintóticamente AdS constituyen un laboratorio particularmente útil para estudiar la relación entre gravitación, termodinámica y holografía. Sin embargo, la incorporación de campos adicionales puede modificar de manera importante tanto la estructura asintótica de las soluciones como la definición de sus cantidades físicas. En particular, los agujeros negros acoplados a campos escalares presentan dificultades adicionales relacionadas con las condiciones de borde, la definición de cargas conservadas y la interpretación holográfica de las cantidades termodinámicas.

La existencia de soluciones con pelo escalar en espacios asintóticamente AdS ha sido ampliamente estudiada en distintos contextos, incluyendo configuraciones con condiciones de borde mixtas o de tipo Robin y en el marco de la denominada *designer gravity* [12, 13, 14]. En estas situaciones, el comportamiento asintótico del campo escalar y las condiciones impuestas en la frontera pueden afectar la estructura del problema variacional y, en consecuencia, la construcción de la acción renormalizada y de las cantidades conservadas.

La presente tesis se centra en el estudio de agujeros negros cargados acoplados a campos escalares en espacios asintóticamente Anti-de Sitter. El análisis se restringe a familias concretas de soluciones: el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti-de Sitter como caso de referencia y distintas soluciones del modelo STU de supergravedad, incluyendo configuraciones con cuatro cargas y tres campos escalares, así como determinadas soluciones diónicas. El objetivo no es establecer resultados universales para cualquier teoría gravitacional con campos escalares, sino analizar de manera explícita cómo las condiciones de borde y la estructura asintótica de estas familias de soluciones afectan su descripción holográfica y termodinámica.

El trabajo aborda dos problemas principales. El primero consiste en estudiar la renormalización de la acción gravitacional y la construcción de cantidades físicas finitas para soluciones del modelo STU con pelo escalar. Para ello se emplean herramientas de renormalización holográfica, la construcción del tensor cuasilocal de Brown–York y el cálculo de cargas conservadas a partir de dicho tensor. Asimismo, se analiza la definición de cantidades de la teoría dual, como la presión, y la relación entre las condiciones de borde de los

campos escalares y la consistencia del problema variacional [15, 16, 17, 18, 19].

El segundo problema consiste en determinar bajo qué condiciones la fórmula de Cardy–Verlinde proporciona una descripción consistente de la entropía de agujeros negros cargados y con pelo escalar. En particular, se estudia el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter y distintas soluciones del modelo STU. El análisis se centra en examinar la relación entre la estructura de las cantidades termodinámicas obtenidas holográficamente y la preservación de la simetría conforme en la teoría definida en la frontera [20, 21, 22].

A partir de estos problemas, los objetivos específicos de la tesis pueden formularse de la siguiente manera:

1. Analizar la posibilidad de interpretar la fórmula de Cardy–Verlinde para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter mediante una energía asociada a la masa irreducible, siguiendo ideas originalmente introducidas en el estudio de la energía irreducible de agujeros negros cargados.
2. Construir y analizar el tensor cuasilocal de Brown–York para las familias de soluciones con campos escalares consideradas, estudiando el papel de las condiciones de borde en la definición de cantidades conservadas y en la interpretación de las variables termodinámicas de la teoría dual.
3. Proponer un contratérmino holográfico para una familia específica de soluciones del modelo STU y verificar explícitamente que regulariza la acción euclidiana, el tensor de Brown–York y las cantidades conservadas, comparando su función con los procedimientos de renormalización holográfica empleados previamente en presencia de campos escalares y condiciones de borde mixtas.
4. Analizar la validez de la fórmula de Cardy–Verlinde para las soluciones estudiadas y determinar la relación entre su aplicabilidad y las propiedades de la teoría definida en la frontera.

Los resultados obtenidos permiten responder estas preguntas dentro del dominio de validez de las teorías y soluciones consideradas. En particular, la interpretación propuesta para la fórmula de Cardy–Verlinde se desarrolla para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter, mientras que el análisis de agujeros negros con pelo escalar se concentra en determinadas truncaciones y soluciones del modelo STU. De manera similar, el contratérmino holográfico propuesto se verifica explícitamente para la familia de soluciones considerada y no se pretende establecer, en esta tesis, su validez universal para teorías arbitrarias de Einstein acopladas a campos escalares.

Los principales resultados de esta investigación pueden resumirse en cuatro contribuciones. En primer lugar, se presenta una interpretación de la fórmula de Cardy–Verlinde para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter basada en la masa irreducible, siguiendo la idea de separar la contribución asociada a la carga de la parte irreducible de la energía del agujero negro. En segundo lugar, se estudian distintas soluciones con campos escalares mediante el tensor de Brown–York y sus condiciones de borde, obteniendo las cantidades holográficas relevantes para su descripción termodinámica. En tercer lugar, se propone un contratérmino holográfico para una familia concreta de soluciones del modelo STU, cuya consistencia se verifica mediante la regularización de la acción, el tensor de Brown–York y las cantidades conservadas. Finalmente, se analiza la fórmula de Cardy–Verlinde para las soluciones consideradas, identificando las condiciones bajo las cuales proporciona una descripción consistente de su entropía en términos de las cantidades holográficas de la teoría dual.

De esta manera, la tesis conecta dos aspectos complementarios del estudio holográfico de agujeros negros con campos escalares: por una parte, la construcción de una descripción finita y variacionalmente consistente mediante técnicas de renormalización holográfica; por otra, el análisis de las relaciones termodinámicas y holográficas que pueden establecerse para familias concretas de soluciones.

Finalmente, con el propósito de establecer el marco conceptual necesario para el desarrollo de estos resultados, se revisan las propiedades geométricas de los espacios Anti–de Sitter, el comportamiento asintótico de campos escalares, los elementos básicos de la correspondencia AdS/CFT y las técnicas de renormalización holográfica utilizadas a lo largo de esta tesis.

Organización de la tesis

La presente tesis se estructura en diez capítulos. Los primeros capítulos introducen las herramientas conceptuales y técnicas necesarias para el análisis, mientras que los capítulos finales presentan los resultados obtenidos para las familias de agujeros negros consideradas.

En el Capítulo 2 se revisan los fundamentos de la acción gravitacional y se presentan las principales soluciones de agujeros negros en relatividad general, incluyendo las soluciones de Schwarzschild, Reissner–Nordström y Kerr, que sirven como punto de partida para los desarrollos posteriores.

El Capítulo 3 introduce el espacio Anti–de Sitter y los elementos fundamentales de la correspondencia AdS/CFT. Asimismo, se estudia el comportamiento de campos escalares

en este espacio, la cota de Breitenlohner–Freedman y los principios de la renormalización holográfica mediante la incorporación de contratérminos gravitacionales.

En el Capítulo 4 se presentan los aspectos termodinámicos de los agujeros negros, revisando las leyes de la mecánica de agujeros negros, su correspondencia con la termodinámica y el origen de la temperatura de Hawking.

En el Capítulo 5 desarrolla el formalismo del tensor de estrés holográfico de Brown–York y la definición de cargas conservadas en espacios asintóticamente Anti–de Sitter, estableciendo las herramientas que serán utilizadas en el resto de la tesis [23, 24, 25].

En el Capítulo 6 se estudia el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter dentro de la teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica negativa, analizando sus propiedades geométricas y termodinámicas como caso de referencia para las soluciones consideradas posteriormente.

En el Capítulo 7 se extiende este análisis a agujeros negros acoplados a campos escalares pertenecientes al modelo STU de supergravedad. Se estudian distintas truncaciones de la teoría, se obtienen sus propiedades termodinámicas y se analiza el tensor de estrés holográfico, incluyendo el caso de determinadas soluciones diónicas.

El Capítulo 8 presenta una de las principales contribuciones de esta tesis: la construcción de un contratérmino holográfico para una familia específica de agujeros negros con pelo escalar. Se verifica que este contratérmino permite regularizar la acción euclidiana, el tensor de Brown–York y las cantidades conservadas, obteniendo además una descripción termodinámica consistente. El resultado se analiza dentro del marco de la renormalización holográfica para las condiciones de borde y las soluciones consideradas, sin asumir su validez para teorías arbitrarias con campos escalares [12, 13, 17, 14].

El Capítulo 9 está dedicado al estudio de la fórmula de Cardy–Verlinde. Se presenta una interpretación basada en la masa irreducible para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter, se desarrolla una interpretación holográfica de la presión a partir del tensor de Brown–York y se analiza la validez de la fórmula para las soluciones del modelo STU consideradas [20, 21, 22].

Finalmente, en el Capítulo 10 se presentan las conclusiones de la investigación, se resumen las principales contribuciones originales y se discuten las limitaciones del dominio de validez de los resultados, así como posibles extensiones hacia otras teorías gravitacionales y familias de soluciones con campos escalares.

Capítulo 2

Acción gravitacional

La forma más común de caracterizar una teoría gravitacional consiste en especificar una acción, junto con las condiciones de borde apropiadas para los distintos campos dinámicos involucrados. Al variar esta acción con respecto a dichos campos y exigir que la acción sea estacionaria, se obtienen las ecuaciones de movimiento que describen la teoría [26, 27].

En lo que sigue, utilizaremos unidades geométricas $G = c = 1$, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Para la gravedad, consideramos la acción de Einstein–Hilbert [4, 26], dada por

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + I_m, \quad (2.1)$$

donde $\mathcal{M}$ representa la variedad del espacio-tiempo, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, R es el escalar de Ricci del espacio-tiempo e I_m denota la acción correspondiente a los campos de materia presentes en la teoría.

Para formular un problema variacional bien definido, es necesario especificar las condiciones de borde para los campos dinámicos. En el caso de una condición de Dirichlet para la métrica, se fija la métrica inducida en la frontera, de modo que las variaciones admisibles satisfacen

$$\delta g_{\mu\nu} \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \quad (2.2)$$

La variación de la acción de Einstein–Hilbert contiene términos de frontera que involucran derivadas normales de la variación de la métrica. Por esta razón, incluso bajo

condiciones de Dirichlet, es necesario añadir el término de Gibbons–Hawking–York [28, 29], el cual permite formular adecuadamente el principio variacional.

Consideremos, en particular, una frontera no nula $\partial\mathcal{M}$, con vector normal unitario n^μ , de manera que

$$n^\mu n_\mu = \epsilon, \quad (2.3)$$

donde $\epsilon = +1$ para una frontera de tipo espacial y $\epsilon = -1$ para una frontera de tipo temporal, de acuerdo con la convención de firma adoptada. La métrica inducida sobre la frontera puede escribirse como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu. \quad (2.4)$$

La curvatura extrínseca se define, con una orientación fija para el vector normal, mediante

$$K_{\mu\nu} = h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma \nabla_\rho n_\sigma, \quad (2.5)$$

y su traza está dada por $K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$. En una formulación general, el término de Gibbons–Hawking–York puede escribirse como

$$I_{\text{GHY}} = \frac{\epsilon}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|h|} K, \quad (2.6)$$

donde h representa el determinante de la métrica inducida. En el caso particular de una frontera temporal y con la convención de firma utilizada habitualmente en este trabajo, esta expresión se reduce, con las convenciones de signo correspondientes, a una integral proporcional a $\sqrt{-h}K$.

De esta manera, la acción gravitacional completa, antes de incorporar posibles términos de regularización o contratérminos, puede expresarse como

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{\epsilon}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|h|} K + I_m. \quad (2.7)$$

Al imponer que la acción sea estacionaria, $\delta I = 0$, bajo variaciones compatibles con las condiciones de borde especificadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento de la teoría [4, 26]. En unidades $G = 1$, las ecuaciones de Einstein pueden escribirse como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde el tensor de energía-momento asociado a la acción de materia se define mediante

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.9)$$

Al restaurar explícitamente la constante gravitacional, las ecuaciones toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

La acción de materia I_m puede contener, por ejemplo, campos electromagnéticos, campos escalares u otros campos dinámicos. La inclusión de estos campos permite estudiar soluciones gravitacionales con una estructura más rica, como los agujeros negros cargados y las configuraciones con pelo escalar que serán consideradas en los capítulos posteriores.

El término de Gibbons–Hawking–York garantiza un problema variacional bien definido bajo condiciones de Dirichlet para la métrica, pero no regulariza por sí mismo las divergencias que pueden aparecer al evaluar la acción sobre soluciones no compactas o al tomar el límite hacia una frontera asintótica. El tratamiento de estas divergencias requiere procedimientos adicionales de regularización y renormalización, entre ellos la incorporación de contratérminos contruidos a partir de cantidades geométricas definidas sobre la frontera.

En el caso de ciertos espacios asintóticamente planos, una posibilidad consiste en añadir contratérminos dependientes de la geometría intrínseca de la frontera [30]. Para clases de fronteras y topologías en las cuales esta construcción es aplicable, puede considerarse un término de la forma

$$I_{ct} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|h|} \sqrt{2\mathcal{R}}, \quad (2.11)$$

donde $\mathcal{R}$ representa el escalar de Ricci construido a partir de la métrica inducida $h_{\mu\nu}$ sobre la frontera, mientras que R corresponde al escalar de Ricci definido en el espacio-tiempo $\mathcal{M}$. La forma concreta de este tipo de contratérminos depende de las propiedades geométricas de la frontera y del procedimiento de regularización considerado.

2.1 Agujeros Negros

Los agujeros negros constituyen una de las predicciones más importantes de la relatividad general [26, 27].

Para obtener soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein (2.8), resulta habitual imponer simetrías sobre el espacio-tiempo. Esto permite reducir el número de funciones independientes que aparecen en la métrica y, por consiguiente, simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales que debe resolverse.

Las simetrías de una geometría se encuentran asociadas a los denominados vectores de Killing, los cuales satisfacen la ecuación

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.12)$$

Esta condición expresa que la métrica permanece invariante bajo transformaciones infinitesimales generadas por el vector ξ^μ . Una vez especificadas las simetrías del sistema, la cantidad de componentes independientes de la métrica disminuye considerablemente, permitiendo obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.

Entre las soluciones más importantes se encuentran los agujeros negros de Schwarzschild [5], Reissner–Nordström [31, 32] y Kerr [33, 34], los cuales representan sistemas con distintas propiedades físicas, como masa, carga eléctrica o momento angular. Estas soluciones constituyen la base para el estudio de geometrías más generales, incluyendo aquellas que involucran campos escalares, tema central de esta tesis.

2.1.1 Agujero negro de Schwarzschild

La solución más simple de las ecuaciones de Einstein corresponde al caso de un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y vacío. Bajo estas condiciones, la métrica puede escribirse como [5]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.13)$$

donde $f(r)$ y $g(r)$ son funciones únicamente de la coordenada radial.

Al resolver las ecuaciones de Einstein en vacío, se obtiene que ambas funciones están relacionadas mediante

$$g(r) = f(r)^{-1}, \quad (2.14)$$

siendo

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r}, \quad (2.15)$$

donde μ es una constante de integración asociada a la masa del sistema. En las unidades geométricas $G = c = 1$ adoptadas en este capítulo, $\mu = 2M$.

La métrica anterior describe el campo gravitacional exterior generado por cualquier distribución de masa con simetría esférica. Este resultado es consecuencia del teorema de Birkhoff, el cual establece que toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío está dada localmente por la solución de Schwarzschild. Por lo tanto, el campo gravitacional exterior de una estrella, un planeta o un objeto compacto esférico depende únicamente de su masa total y no de los detalles de la distribución de materia que lo compone.

Una característica fundamental de la solución de Schwarzschild es la presencia de una superficie nula que separa causalmente una región interior de una región exterior. Para una hipersuperficie definida implícitamente mediante

$$F(x^\mu) = 0, \quad (2.16)$$

el covector normal está dado por

$$n_\mu = \partial_\mu F. \quad (2.17)$$

La condición para que dicha hipersuperficie sea nula es

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0. \quad (2.18)$$

Para la métrica (2.13), la superficie radial $r = \text{constante}$ puede describirse mediante $F(r) = r - r_+$. En este caso, la condición (2.18) conduce a

$$g^{rr} = 0. \quad (2.19)$$

Como $g^{rr} = f(r)$, la posición de la superficie nula se obtiene imponiendo

$$f(r_+) = 0. \quad (2.20)$$

Utilizando la ecuación (2.15), se encuentra

$$r_+ = \mu = 2M, \quad (2.21)$$

donde nuevamente se han utilizado las unidades geométricas $G = c = 1$. Al restaurar las constantes, esta expresión toma la forma

$$r_+ = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.22)$$

Para la extensión maximal de Schwarzschild, esta superficie corresponde al horizonte de eventos. La solución de Schwarzschild constituye el ejemplo más simple de agujero negro en relatividad general.

Sin embargo, las ecuaciones de Einstein admiten soluciones más generales cuando se incorporan nuevos grados de libertad. Por ejemplo, la inclusión de un campo electromagnético conduce a los agujeros negros cargados de Reissner–Nordström, mientras que la incorporación de momento angular da origen a los agujeros negros rotantes de Kerr.

2.1.2 Agujeros negros cargados: la solución de Reissner–Nordström

Una generalización natural de la solución de Schwarzschild consiste en considerar la presencia de un campo electromagnético. En las unidades geométricas $G = c = 1$ adoptadas en este capítulo y con la normalización del campo electromagnético utilizada a continuación, el sistema queda descrito por las ecuaciones de Einstein–Maxwell, cuya acción puede escribirse como

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \quad (2.23)$$

El campo electromagnético se describe mediante un potencial vectorial A_μ , cuyo tensor de campo está definido por

$$F = dA, \quad (2.24)$$

o, en componentes,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.25)$$

Con la normalización elegida en la acción (2.23), el parámetro Q que aparece en la solución de Reissner–Nordström corresponde a la carga eléctrica definida a partir del flujo del campo electromagnético a través de una superficie cerrada que rodea la fuente. En estas unidades, Q tiene las mismas dimensiones geométricas que la masa M , por lo que puede aparecer directamente en la combinación Q^2/r^2 .

La solución estática y esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein–Maxwell corresponde al agujero negro de Reissner–Nordström, cuya métrica toma la forma [32]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.26)$$

con

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (2.27)$$

donde M corresponde al parámetro de masa y Q al parámetro de carga eléctrica de la solución.

La ecuación $f(r) = 0$ determina las posiciones de las posibles superficies de horizonte. Sus raíces están dadas por

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.28)$$

Cuando $M^2 > Q^2$, estas superficies corresponden a dos horizontes distintos. El horizonte exterior r_+ representa el horizonte de eventos, mientras que r_- corresponde a un horizonte interior o horizonte de Cauchy.

Dependiendo de la relación entre masa y carga, se distinguen tres situaciones:

- $M^2 > Q^2$: existen dos horizontes reales y la solución describe un agujero negro cargado.
- $M^2 = Q^2$: ambos horizontes coinciden, obteniéndose una solución extremal.

- $M^2 < Q^2$: no existen horizontes reales y la singularidad central no queda cubierta por un horizonte dentro de esta solución.

La solución de Reissner–Nordström resulta especialmente relevante para el estudio de teorías que incluyen campos adicionales. En particular, cuando el campo electromagnético se acopla a un campo escalar aparecen nuevas familias de agujeros negros cuyas propiedades geométricas, termodinámicas y holográficas pueden diferir considerablemente de las soluciones clásicas de Einstein–Maxwell. Estas geometrías serán estudiadas en capítulos posteriores.

2.1.3 Agujeros negros con rotación: la solución de Kerr

Aunque las soluciones esféricamente simétricas permiten comprender muchas propiedades fundamentales de los agujeros negros, los objetos astrofísicos reales pueden poseer momento angular. Por esta razón, la solución de Kerr constituye una de las soluciones más relevantes de las ecuaciones de Einstein en cuatro dimensiones [33].

Los agujeros negros de Kerr son soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en vacío que describen un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico. La geometría queda completamente caracterizada por dos cantidades conservadas: la masa M y el momento angular total J .

En unidades geométricas $G = c = 1$, es conveniente definir el parámetro de rotación

$$a = \frac{J}{M}, \quad (2.29)$$

el cual tiene dimensiones de longitud y caracteriza la rotación del agujero negro.

En coordenadas de Boyer–Lindquist, la métrica de Kerr puede escribirse como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.30)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.31)$$

Los horizontes de esta geometría se localizan en las raíces de la función Δ , obteniéndose

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.32)$$

Cuando $a^2 < M^2$ existen dos horizontes. El horizonte exterior r_+ corresponde al horizonte de eventos, mientras que r_- corresponde a un horizonte interior. En el caso extremal, $a^2 = M^2$, ambos horizontes coinciden. Para $a^2 > M^2$ no existen horizontes reales.

Una característica distintiva de la geometría de Kerr es la existencia de una región exterior al horizonte en la cual ningún observador puede permanecer estático con respecto al infinito. Esta propiedad está asociada al arrastre de sistemas de referencia producido por la rotación del agujero negro.

La frontera exterior de esta región se denomina superficie límite estacionaria y se determina mediante la condición

$$g_{tt} = 0. \quad (2.33)$$

Para la métrica de Kerr, esta condición conduce a

$$r_s(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.34)$$

La región comprendida entre el horizonte exterior r_+ y la superficie límite estacionaria $r_s(\theta)$ se denomina *ergorregión*. En ella, el vector de Killing asociado a las traslaciones temporales deja de ser temporal, por lo que ninguna partícula material puede permanecer en reposo respecto de un observador situado en el infinito.

La existencia de la ergorregión permite procesos físicos característicos de los agujeros negros rotantes. Uno de ellos es el proceso de Penrose, mediante el cual, bajo determinadas condiciones, es posible extraer energía rotacional del agujero negro [35].

Actualmente, la solución de Kerr constituye un modelo fundamental para la descripción de agujeros negros astrofísicos en relatividad general. Aunque los objetos reales pueden estar rodeados por materia, campos electromagnéticos u otras perturbaciones, la geometría de Kerr proporciona un punto de partida para comprender los efectos asociados a la rotación y sirve como referencia para el estudio de soluciones más generales.

Capítulo 3

El espacio Anti-de Sitter

3.1 Espacios maximalmente simétricos

Los espacios maximalmente simétricos ocupan un lugar central en relatividad general y en las teorías gravitacionales, ya que corresponden a las geometrías que admiten el mayor número posible de isometrías para una dimensión dada [26, 27]. En esta tesis utilizaremos la convención según la cual el espacio-tiempo del volumen, o *bulk*, tiene dimensión $D = d + 1$, mientras que su frontera conforme tiene dimensión d .

Un espacio-tiempo de dimensión D se denomina *maximalmente simétrico* si admite el número máximo posible de vectores de Killing linealmente independientes. Recordemos que un vector de Killing ξ^μ satisface

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (3.1)$$

ecuación que expresa la invariancia de la métrica bajo transformaciones infinitesimales generadas por ξ^μ .

En un espacio-tiempo de dimensión D , el número máximo de vectores de Killing linealmente independientes es

$$N_{\text{Killing}} = \frac{D(D+1)}{2}. \quad (3.2)$$

Cuando este número máximo es alcanzado, la geometría posee curvatura seccional constante. En consecuencia, el tensor de Riemann queda completamente determinado por una constante K ,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = K (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}). \quad (3.3)$$

Al contraer índices se obtiene

$$R_{\mu\nu} = (D - 1)K g_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

mientras que el escalar de Ricci está dado por

$$R = D(D - 1)K. \quad (3.5)$$

Por consiguiente,

$$K = \frac{R}{D(D - 1)}, \quad (3.6)$$

y el tensor de Riemann puede escribirse también en la forma

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{D(D - 1)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}). \quad (3.7)$$

Asimismo, el tensor de Ricci resulta proporcional a la métrica,

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{D} g_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

por lo que los espacios maximalmente simétricos constituyen casos particulares de los denominados espacios de Einstein.

Dependiendo del signo de la curvatura, pueden distinguirse tres clases fundamentales de espacios maximalmente simétricos:

- **Curvatura positiva** ($R > 0$): corresponde al espacio de Sitter (dS), que aparece como solución de las ecuaciones de Einstein en vacío con una constante cosmológica positiva.
- **Curvatura nula** ($R = 0$): corresponde al espacio plano de Minkowski, asociado al caso de constante cosmológica nula.

- **Curvatura negativa** ($R < 0$): corresponde al espacio Anti-de Sitter (AdS), que aparece como solución de las ecuaciones de Einstein en vacío con una constante cosmológica negativa.

Estas geometrías satisfacen las ecuaciones de Einstein en vacío en presencia de una constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

Tomando la traza de esta ecuación se obtiene

$$R = \frac{2D}{D-2}\Lambda, \quad (3.10)$$

para $D \neq 2$. Por lo tanto, para las soluciones consideradas aquí, el signo de la curvatura escalar coincide con el signo de la constante cosmológica.

Los espacios maximalmente simétricos proporcionan un punto de partida fundamental para la construcción y el análisis de numerosas soluciones gravitacionales de interés físico. En particular, el espacio Anti-de Sitter desempeña un papel central en las teorías gravitacionales con constante cosmológica negativa, en el estudio de agujeros negros asintóticamente AdS y en las aplicaciones holográficas basadas en la correspondencia AdS/CFT.

3.2 El espacio Anti-de Sitter

El espacio Anti-de Sitter (AdS) es la solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en presencia de una constante cosmológica negativa [36, 37]. En la convención utilizada en esta tesis, el espacio-tiempo del bulk tiene dimensión $D = d + 1$, mientras que la frontera conforme tiene dimensión d .

Consideremos la acción de Einstein–Hilbert con constante cosmológica negativa en $(d+1)$ dimensiones,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (3.11)$$

donde

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2l^2}. \quad (3.12)$$

La variación de la acción conduce a las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.13)$$

Para una solución de curvatura constante se obtiene

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{l^2}g_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

y, por consiguiente,

$$R = -\frac{d(d+1)}{l^2}. \quad (3.15)$$

El parámetro l recibe el nombre de radio de curvatura de AdS y determina la escala característica del espacio-tiempo.

Geoméricamente, AdS_{d+1} puede definirse como una hipersuperficie embebida en un espacio plano auxiliar de dimensión $(d+2)$ y firma $(2, d)$,

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + \sum_{i=1}^d X_i^2 = -l^2. \quad (3.16)$$

Esta representación permite identificar inmediatamente el grupo de simetría de AdS_{d+1} ,

$$SO(2, d), \quad (3.17)$$

el cual coincide con el grupo conforme de una teoría de campos definida en d dimensiones.

En coordenadas globales, la métrica de AdS_{d+1} puede escribirse como

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (3.18)$$

Una propiedad característica de AdS es su estructura causal. En coordenadas globales, la frontera conforme es una hipersuperficie temporal con geometría conforme a

$$\mathbb{R} \times S^{d-1}. \quad (3.19)$$

Las geodésicas nulas pueden alcanzar esta frontera conforme en un tiempo coordinado finito. Por esta razón, la especificación de condiciones de borde en el infinito adquiere un papel fundamental en la definición de la dinámica gravitacional.

Para aplicaciones holográficas resulta especialmente conveniente utilizar el parche de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j), \quad (3.20)$$

donde $z > 0$ y η_{ij} representa la métrica de Minkowski en d dimensiones.

En estas coordenadas, la frontera conforme del parche se localiza en el límite

$$z \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

y posee una geometría conforme a d -dimensional Minkowski. Esta descripción corresponde específicamente al parche de Poincaré y no debe confundirse con la frontera conforme global de AdS, cuya topología es $\mathbb{R} \times S^{d-1}$.

La coordenada z desempeñará un papel esencial en capítulos posteriores al estudiar el comportamiento asintótico de campos escalares, la renormalización holográfica y la definición de cantidades conservadas en espacios asintóticamente Anti-de Sitter.

Debido a estas propiedades geométricas y a su relevancia en la formulación holográfica de la gravedad, el espacio Anti-de Sitter constituye el escenario natural para el análisis de agujeros negros con pelo escalar considerados en esta tesis.

3.2.1 La frontera conforme de Anti-de Sitter

Una de las propiedades más distintivas del espacio Anti-de Sitter es la presencia de una frontera conforme. Esta frontera no pertenece al espacio-tiempo físico original, sino que aparece al realizar una completación conforme de la variedad.

Para visualizar esta estructura resulta conveniente considerar la métrica de AdS en el parche de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j), \quad (3.22)$$

donde η_{ij} representa la métrica de Minkowski en d dimensiones y la coordenada radial satisface $z > 0$.

La frontera conforme del parche de Poincaré se localiza en el límite $z \rightarrow 0$. Para realizar la compactificación conforme introducimos

$$\Omega = \frac{z}{l}, \quad (3.23)$$

de modo que

$$\Omega \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

en la frontera.

La métrica conforme compactificada se define como

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Para la métrica de Poincaré se obtiene

$$d\tilde{s}^2 = dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, al restringir esta métrica al límite $z = 0$, la geometría inducida sobre la frontera es

$$ds_{\partial M}^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.27)$$

De esta manera, la frontera conforme del parche de Poincaré es conforme al espacio de Minkowski en d dimensiones.

Es importante señalar que esta geometría corresponde al parche de Poincaré. En coordenadas globales, la frontera conforme de AdS_{d+1} posee en cambio la estructura

$$\mathbb{R} \times S^{d-1}. \quad (3.28)$$

La existencia de una frontera conforme bien definida permite formular problemas de valor de borde para las ecuaciones de Einstein. En particular, al estudiar soluciones asintóticamente AdS resulta necesario especificar condiciones de borde apropiadas tanto para la métrica como para los campos de materia presentes en la teoría.

Esta estructura adquiere una importancia aún mayor en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Según esta dualidad, una teoría gravitacional definida en el bulk de AdS puede describirse mediante una teoría cuántica de campos definida sobre su frontera conforme. En esta interpretación, la coordenada radial de AdS se relaciona con la escala de energía de la teoría dual, mientras que los valores asintóticos apropiadamente definidos de los campos del bulk actúan como fuentes para operadores de la teoría de campos.

En consecuencia, el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones gravitacionales cerca de la frontera constituye un ingrediente fundamental tanto para la definición de cantidades conservadas como para la interpretación holográfica de sistemas gravitacionales con campos escalares.

3.3 Campos escalares en Anti-de Sitter

Los campos escalares desempeñan un papel central en numerosas extensiones de la relatividad general y aparecen de manera natural en teorías de supergravedad, compactificaciones de teorías de dimensiones superiores y modelos efectivos de gravedad [37, 38].

En el contexto de espacios asintóticamente Anti-de Sitter, la presencia de campos escalares introduce nuevas estructuras asintóticas y puede modificar de manera significativa las propiedades geométricas y termodinámicas de las soluciones [39].

Además de su interés intrínseco, los campos escalares poseen una relevancia especial en el marco de la correspondencia AdS/CFT, donde un campo escalar propagándose en el bulk de AdS se encuentra asociado a un operador escalar de la teoría conforme definida sobre la frontera [11, 40, 36].

3.3.1 Ecuación de Klein–Gordon en Anti-de Sitter

Consideremos un campo escalar real mínimamente acoplado a la gravedad. La acción correspondiente está dada por

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (3.29)$$

donde m representa la masa del campo escalar.

Variando la acción respecto de ϕ se obtiene

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (3.30)$$

En el límite cercano a la frontera, utilizando coordenadas de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j), \quad (3.31)$$

y buscando soluciones con dependencia radial de la forma

$$\phi(z, x) \sim z^\Delta, \quad (3.32)$$

se obtiene

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 l^2. \quad (3.33)$$

Las dos raíces son

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 l^2}. \quad (3.34)$$

Por consiguiente, la expansión asintótica general adopta la forma

$$\phi(z, x) = A(x) z^{\Delta_-} + B(x) z^{\Delta_+} + \dots, \quad (3.35)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son, en general, funciones de las coordenadas de la frontera.

En soluciones estáticas y homogéneas, o en sectores donde las simetrías eliminan la dependencia respecto de las coordenadas de frontera, estos coeficientes pueden reducirse a constantes.

En coordenadas radiales habituales para agujeros negros asintóticamente AdS, donde asintóticamente $r \sim l^2/z$, la expansión puede escribirse, hasta factores dependientes de la normalización radial, como

$$\phi(r, x) = \frac{A(x)}{r^{\Delta_-}} + \frac{B(x)}{r^{\Delta_+}} + \dots \quad (3.36)$$

La existencia de dos modos asintóticos independientes constituye una de las características más importantes de los campos escalares en Anti-de Sitter.

Un caso particularmente relevante para esta tesis corresponde a un campo escalar en AdS_4 con

$$m^2 = -\frac{2}{l^2}. \quad (3.37)$$

En este caso $d = 3$ y

$$\Delta_- = 1, \quad \Delta_+ = 2. \quad (3.38)$$

Para soluciones estáticas y esféricamente simétricas, los coeficientes son constantes y la expansión toma la forma

$$\phi(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (3.39)$$

siempre que el potencial y las interacciones no introduzcan resonancias ni términos logarítmicos. En presencia de interacciones más generales, o en situaciones especiales relacionadas con la saturación de la cota de Breitenlohner–Freedman, la expansión puede contener potencias adicionales o términos logarítmicos.

3.3.2 Cota de Breitenlohner–Freedman

A diferencia de lo que ocurre en espacio plano, la presencia de una masa cuadrada negativa no implica necesariamente una inestabilidad en espacios Anti-de Sitter. La curvatura negativa de AdS modifica la dinámica de los campos escalares y permite la existencia de campos con $m^2 < 0$ dentro de un rango compatible con la estabilidad.

El criterio fundamental fue establecido por Breitenlohner y Freedman [41, 42]. Para un campo escalar en AdS_{d+1} , la masa debe satisfacer

$$m^2 l^2 \geq -\frac{d^2}{4}. \quad (3.40)$$

Esta desigualdad recibe el nombre de *cota de Breitenlohner–Freedman*.

La importancia de esta condición puede comprenderse examinando las dimensiones características

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 l^2}. \quad (3.41)$$

Si la masa viola la cota (3.40), el exponente se vuelve complejo, lo que está asociado a una inestabilidad del vacío de AdS.

Sin embargo, satisfacer la cota BF constituye una condición necesaria para evitar esta inestabilidad, pero no implica por sí sola que ambos modos asintóticos puedan aceptarse simultáneamente bajo cualquier condición de borde. La admisibilidad física de cada modo depende además de sus propiedades de normalizabilidad y de las condiciones de borde impuestas.

Un caso particularmente interesante ocurre en la ventana

$$-\frac{d^2}{4} < m^2 l^2 < -\frac{d^2}{4} + 1. \quad (3.42)$$

Dentro de este intervalo, bajo las condiciones apropiadas, ambos modos pueden ser normalizables y es posible considerar cuantizaciones holográficas alternativas [42, 43]. En los extremos de esta ventana pueden aparecer sutilezas adicionales, incluyendo términos logarítmicos en la expansión asintótica.

El caso relevante para esta tesis corresponde a

$$m^2 = -\frac{2}{l^2} \quad (3.43)$$

en AdS_4 . En este caso,

$$m^2 l^2 = -2, \quad (3.44)$$

mientras que la cota BF es

$$m^2 l^2 \geq -\frac{9}{4}. \quad (3.45)$$

Por lo tanto,

$$-\frac{9}{4} < -2 < -\frac{5}{4}, \quad (3.46)$$

de modo que esta masa se encuentra dentro de la ventana en la que puede considerarse tanto la cuantización estándar como la cuantización alternativa, dependiendo de las condiciones de borde y de la definición precisa de la teoría holográfica [43, 44, 45].

3.3.3 Interpretación holográfica de los modos asintóticos

Uno de los aspectos más importantes de los campos escalares en espacios Anti-de Sitter es que sus coeficientes asintóticos poseen una interpretación directa en la teoría conforme dual. Esta conexión constituye uno de los elementos fundamentales del diccionario holográfico de la correspondencia AdS/CFT.

Como se mostró anteriormente, el comportamiento asintótico general de un campo escalar puede escribirse como

$$\phi(r, x) = \frac{A(x)}{r^{\Delta_-}} + \frac{B(x)}{r^{\Delta_+}} + \dots. \quad (3.47)$$

En la formulación euclidiana y en el límite semiclásico, la prescripción holográfica establece esquemáticamente que

$$Z_{\text{CFT}}[J] = Z_{\text{grav}}[\phi \rightarrow J] \simeq \exp(-I_{\text{ren}}^E), \quad (3.48)$$

donde I_{ren}^E es la acción euclidiana renormalizada evaluada sobre una solución clásica y J representa la fuente del operador dual.

En la cuantización estándar, y salvo factores de normalización y términos locales dependientes del esquema de renormalización, el coeficiente dominante $A(x)$ se identifica con la fuente del operador escalar $\mathcal{O}$, mientras que $B(x)$ se relaciona con su valor esperado,

$$A(x) \longleftrightarrow J(x), \quad (3.49)$$

$$B(x) \longleftrightarrow \langle \mathcal{O}(x) \rangle. \quad (3.50)$$

En esta cuantización, el modo $A(x)$ se fija mediante las condiciones de borde, mientras que $B(x)$ queda determinado dinámicamente por las ecuaciones de movimiento.

Cuando la masa del campo se encuentra dentro de la ventana (3.42), es posible considerar una cuantización alternativa, en la cual los papeles de los dos modos se intercambian, con las correspondientes modificaciones en la identificación entre fuente y valor esperado [43].

Por esta razón, la interpretación de los coeficientes asintóticos depende de la cuantización elegida. En lo que sigue, salvo que se indique explícitamente lo contrario, utilizaremos la cuantización estándar.

3.4 Correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT constituye uno de los desarrollos más importantes de la física teórica moderna y proporciona una relación entre ciertas teorías gravitacionales formuladas en espacios Anti-de Sitter y teorías cuánticas de campos definidas sobre su frontera conforme. Propuesta originalmente por Maldacena en 1997 [11], la dualidad establece, en sus realizaciones mejor comprendidas, una equivalencia entre una teoría gravitacional en un espacio AdS_{d+1} y una teoría conforme de campos definida en d dimensiones. Para revisiones generales de la correspondencia, véanse [38, 37, 46].

La realización más conocida de esta correspondencia relaciona la teoría de cuerdas tipo IIB formulada sobre el espacio

$$AdS_5 \times S^5, \quad (3.51)$$

con la teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ Yang–Mills en cuatro dimensiones. Esta realización surge del estudio de sistemas de D-branas y de la relación entre el límite de gran N de teorías gauge y una descripción en términos de cuerdas [11, 38]. En este caso particular, la dualidad posee una formulación precisa dentro de la teoría de cuerdas.

Además de estas realizaciones derivadas directamente de teorías fundamentales, las ideas holográficas han sido ampliamente utilizadas en modelos gravitacionales efectivos y construcciones denominadas *bottom-up*. Sin embargo, estos distintos contextos no poseen necesariamente el mismo nivel de control teórico. Por esta razón, resulta conveniente

distinguir entre las realizaciones de AdS/CFT con una derivación explícita en teoría de cuerdas y los modelos holográficos efectivos utilizados como herramientas para estudiar determinadas propiedades de teorías cuánticas fuertemente acopladas [38, 37, 46].

Una de las motivaciones geométricas para la correspondencia surge de la observación de que el grupo de simetrías de AdS_{d+1} es

$$SO(2, d), \quad (3.52)$$

el cual coincide con el grupo conforme de una teoría de campos definida en d dimensiones [11, 36]. Esta coincidencia proporciona una importante motivación geométrica para la relación entre una teoría gravitacional en el volumen y una teoría conforme definida sobre la frontera.

De manera esquemática, la dualidad puede expresarse como

$$\text{Gravedad en } \text{AdS}_{d+1} \iff \text{CFT}_d. \quad (3.53)$$

En esta correspondencia, los grados de libertad de la teoría gravitacional definida en el volumen de AdS se relacionan con los grados de libertad de una teoría cuántica definida sobre la frontera conforme [11, 38].

Uno de los aspectos fundamentales de esta relación es su carácter holográfico. Mientras la descripción gravitacional involucra un espacio-tiempo de $(d + 1)$ dimensiones, la teoría dual está definida en d dimensiones. Esta estructura proporciona una realización concreta de las ideas asociadas al principio holográfico [9, 10].

Desde el punto de vista práctico, la correspondencia adquiere una forma especialmente útil en el límite semiclásico de la gravedad. En este régimen, el funcional de partición gravitacional puede evaluarse mediante una aproximación de punto silla. En formulación euclidiana, la relación holográfica toma la forma

$$Z_{\text{CFT}}[J] = Z_{\text{grav}}[\phi \rightarrow J] \approx \exp(-I_{\text{ren}}^E), \quad (3.54)$$

donde I_{ren}^E corresponde a la acción euclidiana renormalizada evaluada sobre una solución clásica que satisface las condiciones de borde apropiadas. La renormalización es necesaria debido a que la acción evaluada directamente sobre la solución clásica generalmente presenta divergencias al aproximarse a la frontera conforme.

En la formulación lorentziana, la relación correspondiente involucra el factor de fase asociado a la acción,

$$Z_{\text{grav}} \sim \exp(iI_{\text{ren}}), \quad (3.55)$$

por lo que debe distinguirse cuidadosamente entre ambas convenciones.

Los trabajos de Gubser, Klebanov y Polyakov [40], así como de Witten [36], mostraron cómo la dependencia funcional respecto de los datos de borde permite establecer el denominado diccionario holográfico. Según esta prescripción, los valores asintóticos de los campos gravitacionales actúan como fuentes para operadores de la teoría cuántica dual.

Por ejemplo, para un campo escalar ϕ , el modo de borde apropiadamente definido se relaciona con una fuente J para un operador escalar $\mathcal{O}$,

$$\phi \longleftrightarrow \mathcal{O}. \quad (3.56)$$

En la cuantización estándar, el coeficiente dominante del campo escalar se identifica, salvo factores de normalización y posibles términos locales dependientes del esquema de renormalización, con la fuente del operador dual. El coeficiente subdominante se relaciona con su valor esperado,

$$A(x) \longleftrightarrow J(x), \quad (3.57)$$

y

$$B(x) \longleftrightarrow \langle \mathcal{O}(x) \rangle. \quad (3.58)$$

Esta identificación corresponde a la cuantización estándar discutida previamente. Cuando la masa del campo se encuentra dentro de la ventana en la cual ambos modos son normalizables, también puede utilizarse una cuantización alternativa, en la que los papeles de los modos asintóticos se intercambian [43].

De manera análoga, la métrica inducida sobre la frontera proporciona la fuente para el tensor de energía-momento de la teoría dual. Más precisamente, si el comportamiento asintótico de la métrica se escribe en términos de un dato líder $g_{(0)ij}$, este actúa como la fuente del operador T_{ij} ,

$$g_{(0)ij} \longleftrightarrow T_{ij}. \quad (3.59)$$

No es, por tanto, la métrica completa del volumen $g_{\mu\nu}$ la que se identifica directamente con el tensor de energía-momento de la teoría dual, sino la métrica de frontera o, equivalentemente, el término líder apropiadamente definido en la expansión asintótica.

La obtención explícita del tensor de energía-momento holográfico y de otras cantidades conservadas se realiza a partir de la acción gravitacional renormalizada. Los trabajos de Balasubramanian y Kraus, entre otros, mostraron cómo obtener cantidades finitas mediante la variación de la acción renormalizada respecto de la métrica de frontera [47, 48]. De forma análoga, campos gauge definidos en el volumen se relacionan con corrientes conservadas de la teoría dual [38, 37, 46].

La importancia de esta correspondencia para los sistemas estudiados en esta tesis radica en que permite interpretar las propiedades asintóticas de agujeros negros con pelo escalar en términos de observables de una teoría dual. En particular, los coeficientes que aparecen en la expansión asintótica de los campos escalares pueden relacionarse con fuentes y valores esperados de operadores conformes, una vez especificada la cuantización y el esquema de renormalización [43, 44].

Cuando la masa del campo escalar pertenece a la ventana de normalizabilidad discutida anteriormente, pueden imponerse cuantizaciones alternativas y condiciones de borde mixtas. Estas condiciones modifican la relación entre los datos asintóticos del campo y pueden interpretarse holográficamente en términos de deformaciones multi-traza de la teoría dual [43, 44, 45].

Asimismo, la correspondencia proporciona el marco conceptual para la renormalización holográfica. Debido a que la acción gravitacional diverge al aproximarse a la frontera de AdS, resulta necesario introducir un procedimiento sistemático de regularización y renormalización. Este procedimiento permite definir cantidades físicas finitas y establecer de manera consistente la relación entre magnitudes gravitacionales y observables de la teoría dual [47, 49, 50, 51].

En la siguiente sección se estudiará la construcción de la acción renormalizada y el papel de los términos de borde y contratérminos, elementos fundamentales para el análisis de agujeros negros asintóticamente Anti-de Sitter con pelo escalar.

3.5 Renormalización holográfica

La formulación de teorías gravitacionales en espacios asintóticamente Anti-de Sitter presenta una dificultad técnica importante: la acción evaluada sobre soluciones clásicas generalmente diverge al aproximarse a la frontera conforme. Estas divergencias tienen un

origen geométrico y están asociadas al comportamiento asintótico del volumen de integración y de los campos gravitacionales cerca de la frontera [52, 49].

Desde el punto de vista holográfico, estas divergencias se relacionan con las divergencias ultravioletas presentes en la teoría de campos definida sobre la frontera. Por consiguiente, su tratamiento constituye un requisito indispensable para definir cantidades físicas finitas y establecer de manera consistente el diccionario holográfico entre las magnitudes gravitacionales del volumen y los observables de la teoría dual [40, 36, 49].

El procedimiento utilizado para este propósito recibe el nombre de *renormalización holográfica*. Este formalismo fue desarrollado en una serie de trabajos fundamentales por Henningson y Skenderis [52], Balasubramanian y Kraus [47], de Haro, Solodukhin y Skenderis [49], Bianchi, Freedman y Skenderis [51], Skenderis [50], así como Papadimitriou y Skenderis [53].

La idea central consiste en regular inicialmente el espacio-tiempo mediante la introducción de una superficie de corte cercana a la frontera conforme. La acción se evalúa sobre la región regulada y, posteriormente, se añaden contratérminos locales construidos a partir de los campos inducidos sobre la superficie reguladora. Finalmente, al tomar el límite en que dicha superficie se aproxima a la frontera conforme, se obtiene una acción renormalizada finita.

3.5.1 La acción gravitacional y el término de Gibbons–Hawking–York

Consideremos una teoría gravitacional en un espacio-tiempo asintóticamente AdS de dimensión

$$D = d + 1. \quad (3.60)$$

Adoptaremos una métrica lorentziana de firma

$$(-, +, \dots, +), \quad (3.61)$$

y denotaremos por M la variedad del volumen y por ∂M su frontera. La acción de Einstein–Hilbert con constante cosmológica negativa puede escribirse como

$$I_{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} (R[g] - 2\Lambda), \quad (3.62)$$

donde $R[g]$ representa el escalar de Ricci construido a partir de la métrica del volumen $g_{\mu\nu}$. Para AdS_{d+1} , la constante cosmológica está dada por

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2l^2}. \quad (3.63)$$

La variación de la acción de Einstein–Hilbert produce, además de las ecuaciones de Einstein en el volumen, términos de borde que contienen derivadas normales de la variación de la métrica. Por esta razón, incluso si se fija la métrica inducida sobre la frontera,

$$\delta h_{ab}|_{\partial M} = 0, \quad (3.64)$$

la acción de Einstein–Hilbert por sí sola no proporciona un problema variacional de Dirichlet bien definido.

Para cancelar estos términos se añade el término de Gibbons–Hawking–York [28, 29]. Consideraremos una frontera temporal, como la superficie reguladora usual en espacios asintóticamente AdS. En este caso, el vector normal unitario n^μ es espacial y satisface

$$n^\mu n_\mu = +1. \quad (3.65)$$

La curvatura extrínseca de la frontera se define mediante

$$K_{ab} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu \nabla_\mu n_\nu, \quad (3.66)$$

donde h_{ab} es la métrica inducida sobre la frontera. Su traza está dada por

$$K = h^{ab} K_{ab}. \quad (3.67)$$

Con estas convenciones, el término de Gibbons–Hawking–York adopta la forma

$$I_{\text{GHY}} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{-h} K. \quad (3.68)$$

La acción gravitacional relevante para el principio variacional de Dirichlet es entonces

$$I_{\text{grav}} = I_{\text{bulk}} + I_{\text{GHY}}. \quad (3.69)$$

Es importante distinguir el papel de este término del problema de las divergencias asintóticas. El término de Gibbons–Hawking–York no elimina las divergencias asociadas al volumen infinito del espacio Anti-de Sitter. Su función es cancelar los términos con derivadas normales de la variación de la métrica producidos por la acción de Einstein–Hilbert y permitir formular un principio variacional bien definido cuando se fija la métrica inducida sobre la frontera.

Las divergencias que permanecen al evaluar la acción sobre una solución clásica requieren un procedimiento adicional de regularización y renormalización.

3.5.2 Regularización de la acción

Para estudiar explícitamente las divergencias asintóticas se introduce una superficie reguladora ubicada a una distancia finita de la frontera conforme. En coordenadas radiales adecuadas, esta superficie puede describirse mediante

$$r = r_c, \tag{3.70}$$

donde r_c es finito.

La región del espacio-tiempo se restringe entonces a

$$r \leq r_c, \tag{3.71}$$

y la acción se evalúa sobre esta región regulada. Denotaremos por M_c la variedad truncada y por ∂M_c su frontera reguladora.

La acción regulada toma la forma

$$I_{\text{reg}} = I_{\text{bulk}}[M_c] + I_{\text{GHY}}[\partial M_c]. \tag{3.72}$$

Una vez evaluada esta expresión, se estudia su comportamiento en el límite

$$r_c \rightarrow \infty. \tag{3.73}$$

En general, la acción regulada admite una expansión asintótica que contiene términos divergentes. Estas divergencias dependen de la dimensión del espacio-tiempo y de los campos presentes en la teoría. Dependiendo de estas características, también pueden aparecer divergencias logarítmicas.

Desde el punto de vista holográfico, la introducción de la superficie de corte corresponde a la implementación de un regulador ultravioleta en la teoría dual. La eliminación de este regulador requiere añadir términos locales definidos sobre la superficie reguladora.

3.5.3 Contratérminos gravitacionales

La estrategia de la renormalización holográfica consiste en añadir a la acción regulada una colección de contratérminos locales construidos a partir de las cantidades geométricas intrínsecas definidas sobre la frontera [47, 49, 50].

De esta manera, la acción renormalizada se define como

$$I_{\text{ren}} = \lim_{r_c \rightarrow \infty} [I_{\text{bulk}} + I_{\text{GHY}} + I_{\text{ct}}]. \quad (3.74)$$

Los contratérminos dependen de la métrica inducida h_{ab} y de sus invariantes geométricos intrínsecos. En particular, utilizaremos la notación

$$\mathcal{R}[h] \quad (3.75)$$

para el escalar de Ricci construido a partir de la métrica inducida sobre la frontera, reservando

$$R[g] \quad (3.76)$$

para el escalar de Ricci construido a partir de la métrica completa del espacio-tiempo.

En el caso de gravedad asintóticamente AdS_4 , es decir, para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con una frontera tridimensional, el contratérmino gravitacional mínimo puede escribirse como [47]

$$I_{\text{ct}}^{\text{grav}} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{l}{2} \mathcal{R}[h] \right). \quad (3.77)$$

Con las convenciones adoptadas anteriormente para la orientación del normal y la definición de la curvatura extrínseca, este término cancela las divergencias gravitacionales relevantes para las geometrías asintóticamente AdS_4 consideradas.

La acción gravitacional renormalizada queda entonces dada por

$$I_{\text{ren}}^{\text{grav}} = I_{\text{bulk}} + I_{\text{GHY}} + I_{\text{ct}}^{\text{grav}}. \quad (3.78)$$

La característica fundamental de estos contratérminos es que son funciones locales de los datos definidos sobre la frontera. Por esta razón, no modifican las ecuaciones de movimiento en el volumen, aunque sí contribuyen a la acción renormalizada y a las cantidades obtenidas mediante variaciones respecto de los campos de frontera.

3.5.4 Contratérminos para campos escalares

La presencia de campos escalares puede modificar la estructura divergente de la acción. En consecuencia, además de los contratérminos puramente gravitacionales, puede ser necesario introducir términos adicionales dependientes del comportamiento asintótico del campo escalar.

Consideremos un campo escalar ϕ con masa

$$m^2 = -\frac{2}{l^2}, \quad (3.79)$$

en AdS_4 . Su comportamiento asintótico puede escribirse como

$$\phi(r, x) = \frac{A(x)}{r} + \frac{B(x)}{r^2} + \dots. \quad (3.80)$$

La dependencia explícita de A y B en las coordenadas de frontera x resulta importante en la formulación general. Para soluciones estáticas y esféricamente simétricas, como las consideradas posteriormente, estos coeficientes pueden reducirse a constantes.

El comportamiento asintótico del campo escalar puede producir nuevas divergencias en la acción evaluada sobre la solución. Para cancelarlas se introducen contratérminos escalares locales definidos sobre la superficie reguladora.

La forma precisa de estos términos depende de la masa del campo, del potencial escalar y de las condiciones de borde adoptadas. Para un campo con

$$m^2 l^2 = -2, \quad (3.81)$$

un término cuadrático de frontera contribuye a cancelar las divergencias asociadas al comportamiento líder del escalar. Esquemáticamente, puede escribirse

$$I_{\text{ct}}^\phi = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{-h} \frac{\phi^2}{2l} + \dots, \quad (3.82)$$

donde los términos adicionales dependen de la estructura específica del potencial y de las condiciones de borde correspondientes.

Por consiguiente, en presencia de un campo escalar, la acción renormalizada adquiere la estructura general

$$I_{\text{ren}} = I_{\text{bulk}} + I_{\text{GHY}} + I_{\text{ct}}^{\text{grav}} + I_{\text{ct}}^\phi. \quad (3.83)$$

La determinación completa de los contratérminos requiere analizar el comportamiento asintótico de la solución y cancelar sistemáticamente todas las divergencias que aparecen cuando la superficie reguladora se aproxima a la frontera conforme.

3.5.5 Condiciones de borde mixtas y términos finitos

Cuando el comportamiento asintótico de un campo escalar admite dos modos independientes, es posible considerar condiciones de borde más generales que las condiciones de Dirichlet o Neumann. En este caso, los coeficientes que aparecen en la expansión asintótica del campo pueden relacionarse mediante una condición funcional.

Considerando una expansión general de la forma

$$\phi(r, x) = \frac{A(x)}{r^{\Delta_-}} + \frac{B(x)}{r^{\Delta_+}} + \dots, \quad (3.84)$$

una condición de borde mixta puede escribirse esquemáticamente como

$$B(x) = \mathcal{F}[A(x)]. \quad (3.85)$$

Los coeficientes $A(x)$ y $B(x)$ contienen la información asintótica necesaria para especificar los datos de frontera asociados al campo escalar. La relación funcional entre ambos constituye, por lo tanto, una parte de la definición de las condiciones de borde del problema.

Para describir esta situación de manera general, puede introducirse un funcional de los datos de frontera,

$$\mathcal{W}[A]. \quad (3.86)$$

La condición de borde correspondiente puede expresarse formalmente como

$$B(x) = \frac{\delta \mathcal{W}[A]}{\delta A(x)}, \quad (3.87)$$

donde la derivada funcional refleja el hecho de que, en general, A y B pueden depender de las coordenadas de la frontera.

En configuraciones particulares, por ejemplo en soluciones estáticas y homogéneas para las cuales los coeficientes asintóticos son constantes sobre la frontera, esta relación puede reducirse a una función ordinaria $W(A)$,

$$B = \frac{dW(A)}{dA}. \quad (3.88)$$

Por ejemplo, si

$$W(A) = \frac{\lambda}{2} A^2, \quad (3.89)$$

la condición de borde toma la forma

$$B = \lambda A. \quad (3.90)$$

De manera análoga, una elección

$$W(A) = \frac{\eta}{3} A^3 \quad (3.91)$$

conduce a

$$B = \eta A^2. \quad (3.92)$$

Además de los contratérminos necesarios para cancelar las divergencias de la acción, las condiciones de borde mixtas pueden requerir la incorporación de términos finitos definidos sobre la frontera. Estos términos no están determinados únicamente por la cancelación de

divergencias, sino también por la necesidad de obtener un principio variacional compatible con la relación impuesta entre los coeficientes asintóticos del campo escalar.

De este modo, la elección de las condiciones de borde forma parte de la definición completa del problema gravitacional y afecta tanto la acción renormalizada como la definición de las cantidades físicas asociadas a la solución.

3.5.6 Tensor de energía–momento holográfico

Una de las aplicaciones fundamentales de la acción renormalizada consiste en la obtención del tensor de energía–momento asociado a la teoría definida sobre la frontera conforme.

Es importante distinguir esta cantidad del tensor de energía–momento asociado a los campos de materia en el volumen. En el contexto holográfico, la fuente del operador energía–momento de la teoría dual no es la métrica completa del espacio-tiempo del volumen, $g_{\mu\nu}$, sino la métrica de frontera que aparece como dato líder en la expansión asintótica de la geometría.

En coordenadas de tipo Fefferman–Graham, la métrica puede organizarse cerca de la frontera conforme como

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} [dz^2 + g_{ij}(z, x) dx^i dx^j] , \quad (3.93)$$

donde la expansión asintótica de la métrica adopta esquemáticamente la forma

$$g_{ij}(z, x) = g_{(0)ij}(x) + \cdots . \quad (3.94)$$

La cantidad $g_{(0)ij}(x)$ representa la métrica de fondo sobre la cual se define la teoría de campos dual y constituye la fuente asociada al tensor de energía–momento.

En la formulación holográfica, el valor esperado renormalizado del tensor de energía–momento de la teoría dual se obtiene variando la acción renormalizada respecto de la métrica de frontera,

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g_{(0)}}} \frac{\delta I_{\text{ren}}}{\delta g_{(0)}^{ij}} , \quad (3.95)$$

en la formulación lorentziana, con las modificaciones apropiadas de signo y factores de i cuando se trabaja en la continuación euclidiana.

Antes de tomar el límite hacia la frontera conforme, puede definirse sobre una superficie reguladora un tensor cuasilocal renormalizado. Para mantener la notación utilizada en el resto de este trabajo, lo denotaremos por τ_{ab} ,

$$\tau_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{\text{ren}}}{\delta h^{ab}}, \quad (3.96)$$

donde h_{ab} es la métrica inducida sobre la superficie reguladora.

Esta cantidad constituye el punto de partida para la definición de energías, masas y otras cargas conservadas. Su relación con el tensor de energía-momento de la teoría dual se obtiene posteriormente mediante el límite apropiado hacia la frontera conforme y la correspondiente reescalación conforme.

Con las convenciones adoptadas para el término de Gibbons–Hawking–York, la contribución gravitacional al tensor cuasilocal contiene la combinación

$$K_{ab} - Kh_{ab}, \quad (3.97)$$

junto con las contribuciones provenientes de los contratérminos y, cuando corresponde, de los términos asociados a los campos de materia.

Para AdS_4 , y utilizando el contratérmino gravitacional definido en (3.77), el tensor cuasilocal renormalizado puede escribirse esquemáticamente como

$$\tau_{ab} = \frac{1}{8\pi G} \left[K_{ab} - Kh_{ab} - \frac{2}{l} h_{ab} + l \left(\mathcal{R}_{ab}[h] - \frac{1}{2} \mathcal{R}[h] h_{ab} \right) + \dots \right]. \quad (3.98)$$

Aquí $\mathcal{R}_{ab}[h]$ y $\mathcal{R}[h]$ representan, respectivamente, el tensor y el escalar de Ricci contruidos a partir de la métrica inducida h_{ab} .

Los términos indicados por los puntos suspensivos representan posibles contribuciones adicionales provenientes de los campos de materia y de los términos finitos requeridos por las condiciones de borde. En particular, en presencia de campos escalares con comportamiento asintótico no trivial, estas contribuciones pueden ser necesarias tanto para obtener una cantidad finita como para mantener la consistencia del principio variacional.

Por lo tanto, debe distinguirse entre el tensor cuasilocal τ_{ab} , definido sobre una superficie a radio finito, y el valor esperado $\langle T_{ij} \rangle$ del tensor de energía-momento asociado a la teoría dual, obtenido tras tomar el límite apropiado hacia la frontera conforme.

3.5.7 Interpretación de la acción renormalizada

La acción renormalizada desempeña un papel central tanto en la formulación gravitacional como en su interpretación holográfica.

En la continuación euclidiana, la relación semiclásica entre la teoría gravitacional y la teoría de campos dual se formula en términos de la acción euclidiana renormalizada. Para fuentes de frontera colectivamente denotadas por J , la prescripción holográfica toma la forma

$$Z_{\text{CFT}}[J] = Z_{\text{grav}}[J] \simeq \exp(-I_{\text{ren}}^E[J]) . \quad (3.99)$$

La presencia del subíndice “ren” es esencial. La acción evaluada sobre la solución clásica antes de añadir los contratérminos apropiados generalmente diverge cuando se elimina la superficie reguladora y se toma el límite hacia la frontera conforme.

En la formulación lorentziana, la relación semiclásica involucra en cambio el factor de fase asociado a la acción,

$$Z_{\text{grav}}[J] \simeq \exp(iI_{\text{ren}}[J]) . \quad (3.100)$$

Estas expresiones constituyen la versión renormalizada de la prescripción holográfica y permiten definir de manera finita el funcional generador de la teoría dual.

Desde esta perspectiva, la renormalización holográfica no constituye únicamente un procedimiento técnico destinado a eliminar divergencias. La elección de los contratérminos, de los términos finitos y de las condiciones de borde determina la forma precisa de la acción renormalizada y, por consiguiente, influye en la definición de las cantidades físicas asociadas a la solución.

En particular, en presencia de campos escalares con comportamiento asintótico no trivial, las condiciones de borde impuestas sobre los coeficientes de la expansión asintótica forman parte de la definición del problema. Por esta razón, las relaciones entre dichos coeficientes deben ser compatibles con el principio variacional y con la acción renormalizada utilizada.

3.5.8 Aplicación a agujeros negros con pelo escalar

Las herramientas desarrolladas en esta sección resultan especialmente importantes para el estudio de agujeros negros asintóticamente Anti-de Sitter que presentan configuraciones escalares no triviales.

En estas soluciones, el comportamiento asintótico del campo escalar puede modificar tanto la estructura de las divergencias de la acción como la definición de las cantidades conservadas. Por esta razón, los contratérminos puramente gravitacionales no siempre son suficientes y pueden requerirse términos adicionales dependientes del campo escalar.

Asimismo, las condiciones de borde impuestas sobre el campo pueden modificar la definición de las cantidades físicas. En particular, las condiciones de borde mixtas y los términos finitos asociados deben incorporarse de manera compatible con el principio variacional.

Por lo tanto, para cada familia concreta de soluciones será necesario analizar conjuntamente:

- el comportamiento asintótico de la métrica;
- la expansión asintótica del campo escalar;
- los contratérminos gravitacionales necesarios para cancelar las divergencias;
- las contribuciones adicionales asociadas a los campos de materia;
- las condiciones de borde impuestas sobre los campos;
- y los términos finitos requeridos para obtener un principio variacional consistente.

Una vez construida la acción renormalizada, será posible definir cantidades físicas finitas mediante el tensor cuasilocal renormalizado τ_{ab} y, tras tomar el límite apropiado hacia la frontera conforme, relacionarlas con el tensor de energía-momento asociado a la teoría dual.

En los capítulos siguientes, este formalismo será aplicado a las distintas familias de agujeros negros con pelo escalar consideradas en esta tesis. En particular, la construcción explícita de los contratérminos, la especificación de las condiciones de borde y la elección de los términos finitos necesarios permitirán obtener acciones renormalizadas, masas bien definidas y relaciones termodinámicas consistentes con la estructura asintótica de cada solución.

Capítulo 4

Termodinámica de agujeros negros

La relación entre agujeros negros y termodinámica surge de una serie de resultados fundamentales en relatividad general y teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo. Los agujeros negros estacionarios satisfacen un conjunto de leyes que presentan una estrecha analogía matemática con las leyes de la termodinámica. Esta correspondencia fue formulada por Bardeen, Carter y Hawking [54] y posteriormente adquirió una interpretación física a partir de los trabajos de Bekenstein [7] y Hawking [8].

En este capítulo la constante cosmológica se considerará fija. Por lo tanto, no se utilizará el formalismo de la termodinámica extendida y la masa del agujero negro se interpretará como la energía interna del sistema.

4.1 Leyes de la mecánica de agujeros negros

Las leyes de la mecánica de agujeros negros describen propiedades generales de los horizontes de eventos de soluciones estacionarias de las ecuaciones de Einstein [54]. Su estructura presenta una analogía directa con las leyes de la termodinámica.

Ley cero

La ley cero establece que la gravedad superficial κ es constante sobre el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario,

$$\kappa = \text{constante en el horizonte.} \tag{4.1}$$

Esta propiedad permite establecer la analogía entre la gravedad superficial y la temperatura de un sistema termodinámico en equilibrio.

Primera ley

La primera ley de la mecánica de agujeros negros relaciona variaciones infinitesimales de los parámetros físicos que caracterizan una solución estacionaria [54],

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q. \quad (4.2)$$

Aquí M representa la masa del agujero negro, A el área del horizonte, J el momento angular y Q la carga eléctrica. Las cantidades Ω_H y Φ_H corresponden, respectivamente, a la velocidad angular y al potencial eléctrico evaluados en el horizonte.

Segunda ley

La segunda ley corresponde al teorema del área de Hawking [55], según el cual el área del horizonte de eventos no disminuye en un proceso físico clásico,

$$\delta A \geq 0. \quad (4.3)$$

Esta propiedad constituye el análogo gravitacional de la segunda ley de la termodinámica.

Tercera ley

La tercera ley establece que no es posible alcanzar un estado con gravedad superficial nula mediante un número finito de procesos físicos [56]. Esta propiedad es análoga a la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto en termodinámica.

4.2 Correspondencia con la termodinámica

La estructura de las leyes anteriores sugiere la siguiente correspondencia entre la mecánica de agujeros negros y la termodinámica,

Mecánica de agujeros negros	Termodinámica
κ	Temperatura T
A	Entropía S
M	Energía interna E
Ω_H	Potencial rotacional
Φ_H	Potencial químico

Dado que la constante cosmológica se mantiene fija en este trabajo, la masa M se interpreta como la energía interna del agujero negro.

A partir de esta analogía, Bekenstein propuso que los agujeros negros debían poseer una entropía proporcional al área de su horizonte de eventos [7]. En unidades del Sistema Internacional, la entropía de Bekenstein–Hawking está dada por

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}. \quad (4.4)$$

En lo que sigue se utilizarán unidades naturales,

$$G = c = \hbar = k_B = 1, \quad (4.5)$$

salvo que se indique explícitamente lo contrario. En estas unidades,

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}. \quad (4.6)$$

4.2.1 Radiación de Hawking

La interpretación física de la analogía entre la mecánica de agujeros negros y la termodinámica fue establecida por Hawking, quien demostró que los agujeros negros emiten radiación térmica cuando se consideran efectos cuánticos en las proximidades del horizonte [8].

Utilizando la convención geométrica para la gravedad superficial, la temperatura de Hawking en unidades del Sistema Internacional puede escribirse como

$$T_H = \frac{\hbar c \kappa}{2\pi k_B}. \quad (4.7)$$

En unidades naturales,

$$G = c = \hbar = k_B = 1, \quad (4.8)$$

la temperatura adopta la forma

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (4.9)$$

La radiación de Hawking proporciona así una interpretación física de la correspondencia termodinámica. En unidades naturales, la primera ley puede escribirse como

$$dM = T_H dS + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (4.10)$$

La relación

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4} \quad (4.11)$$

muestra que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte de eventos.

En espacios asintóticamente Anti-de Sitter, la estructura termodinámica puede presentar fenómenos adicionales, como transiciones de fase. Un ejemplo fundamental es la transición de Hawking–Page entre el agujero negro Schwarzschild–AdS y el AdS térmico en el ensamble canónico [57].

4.2.2 Temperatura a partir de la geometría cercana al horizonte

La temperatura de Hawking puede obtenerse directamente a partir de la geometría cercana al horizonte. Consideremos una métrica estática de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (4.12)$$

El horizonte de eventos se encuentra en $r = r_h$, donde

$$f(r_h) = 0. \quad (4.13)$$

Para un horizonte no extremal, el cero de $f(r)$ es simple,

$$f'(r_h) \neq 0, \quad (4.14)$$

por lo que cerca del horizonte

$$f(r) \simeq f'(r_h)(r - r_h). \quad (4.15)$$

Definiendo la coordenada radial

$$\rho = 2\sqrt{\frac{r - r_h}{f'(r_h)}}, \quad (4.16)$$

la parte (t, r) de la métrica toma la forma

$$ds^2 \simeq - \left(\frac{f'(r_h)}{2} \right)^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2. \quad (4.17)$$

La geometría cercana al horizonte es, por tanto, localmente de tipo Rindler. La gravedad superficial está dada por

$$\kappa = \frac{f'(r_h)}{2}. \quad (4.18)$$

Tras realizar una rotación de Wick,

$$t \rightarrow i\tau, \quad (4.19)$$

la métrica euclidiana cercana al horizonte adopta la forma

$$ds_E^2 \simeq \kappa^2 \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + r_h^2 d\Omega^2. \quad (4.20)$$

La ausencia de una singularidad cónica en $\rho = 0$ exige que el tiempo euclidiano sea periódico,

$$\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (4.21)$$

Identificando esta periodicidad con la temperatura inversa se obtiene

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{f'(r_h)}{4\pi}. \quad (4.22)$$

Esta expresión es válida para horizontes no extremales. El caso extremal requiere un análisis separado de la geometría cercana al horizonte.

4.2.3 Temperatura del agujero negro de Reissner–Nordström

Como aplicación, consideremos la solución de Reissner–Nordström,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.23)$$

Definiendo

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (4.24)$$

los horizontes están localizados en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.25)$$

El horizonte exterior corresponde a $r_h = r_+$. La gravedad superficial es

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad (4.26)$$

y, por lo tanto, la temperatura de Hawking viene dada por

$$T_H = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}. \quad (4.27)$$

En el límite extremal, $r_+ = r_-$, la gravedad superficial y la temperatura se anulan.

4.2.4 Temperatura del agujero negro de Kerr

La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist puede escribirse como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.28)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.29)$$

y

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (4.30)$$

Los horizontes se encuentran en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.31)$$

Para estudiar la geometría cercana al horizonte exterior se introduce la coordenada azimutal corrotante

$$\tilde{\phi} = \phi - \Omega_H t, \quad (4.32)$$

donde la velocidad angular del horizonte es

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (4.33)$$

La gravedad superficial del agujero negro de Kerr no extremal es

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}. \quad (4.34)$$

Por consiguiente, la temperatura de Hawking está dada por

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}. \quad (4.35)$$

En el límite extremal, $r_+ = r_-$, la gravedad superficial y la temperatura se anulan.

Capítulo 5

Tensor de energía–momento holográfico y cargas conservadas

Uno de los problemas fundamentales de la relatividad general consiste en la definición de cantidades conservadas asociadas al campo gravitacional. A diferencia de otras teorías de campos, la invariancia bajo difeomorfismos impide, en general, la definición de una densidad local covariante de energía gravitacional. Por esta razón, magnitudes como la masa, el momento angular o la energía total de una configuración gravitacional deben definirse a partir de propiedades globales o cuasilocales de la geometría [26].

En espacios–tiempo asintóticamente planos se han desarrollado diversas definiciones de masa y cargas conservadas, entre ellas las construcciones de ADM y Komar [58, 59]. Sin embargo, estas definiciones dependen de la estructura asintótica de la geometría y no siempre admiten una extensión directa a espacios–tiempo con otras condiciones de frontera, como aquellos asintóticamente Anti–de Sitter.

Una construcción particularmente importante fue introducida por Brown y York [60], quienes definieron un tensor cuasilocal a partir de la variación de la acción gravitacional respecto de la métrica inducida sobre una superficie de frontera. Este formalismo permite construir densidades y cargas conservadas asociadas a una región finita del espacio–tiempo.

En el contexto de espacios asintóticamente Anti–de Sitter, esta construcción debe complementarse con el procedimiento de renormalización discutido anteriormente. La inclusión de contraterminos permite obtener un tensor cuasilocal finito al aproximarse a la frontera asintótica y, en el contexto holográfico, relacionarlo con el tensor de energía–momento de la teoría dual [47, 49, 50].

En esta sección revisaremos la construcción del tensor cuasilocal de Brown–York y su papel en la definición de masas, momentos angulares y otras cargas conservadas relevantes para los sistemas considerados en esta tesis.

5.1 Tensor cuasilocal de Brown–York

El tensor cuasilocal de Brown–York se obtiene a partir de la variación de la acción gravitacional respecto de la métrica inducida sobre una hipersuperficie de frontera. Para condiciones de Dirichlet, la acción de Einstein–Hilbert debe complementarse con el término de Gibbons–Hawking–York [28, 29].

Consideremos una región del espacio–tiempo $\mathcal{M}$ limitada por una hipersuperficie $\partial\mathcal{M}$. La acción gravitacional puede escribirse como

$$I = I_{EH} + I_{GH}, \quad (5.1)$$

donde

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (5.2)$$

y

$$I_{GH} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K. \quad (5.3)$$

Aquí h_{ab} denota la métrica inducida sobre la hipersuperficie de frontera y K la traza de su curvatura extrínseca.

Introducimos un vector normal unitario n^μ tal que

$$n_\mu n^\mu = \epsilon, \quad (5.4)$$

con $\epsilon = +1$ para una frontera temporal y $\epsilon = -1$ para una frontera espacial. La métrica inducida puede escribirse como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu. \quad (5.5)$$

En las aplicaciones consideradas en esta tesis, la superficie reguladora será una hipersuperficie temporal de radio constante, por lo que $\epsilon = +1$.

La curvatura extrínseca se define mediante

$$K_{ab} = h_a^\mu h_b^\nu \nabla_\mu n_\nu, \quad (5.6)$$

y su traza por

$$K = h^{ab} K_{ab}. \quad (5.7)$$

El tensor cuasilocal se define a partir de la variación de la acción respecto de la métrica inducida. Utilizando las convenciones adoptadas en este trabajo,

$$\tau_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h^{ab}}. \quad (5.8)$$

Equivalentemente,

$$\tau^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h_{ab}}. \quad (5.9)$$

Al variar la acción gravitacional se obtiene el tensor de Brown–York,

$$\tau_{ab}^{\text{BY}} = \frac{1}{8\pi G} (K_{ab} - K h_{ab}), \quad (5.10)$$

con las convenciones anteriores para la curvatura extrínseca y la orientación del vector normal.

Esta cantidad es un tensor cuasilocal definido sobre la hipersuperficie de frontera. A partir de ella pueden construirse densidades superficiales y cargas asociadas a las simetrías de la geometría [60].

Cuando la superficie reguladora se aproxima a la frontera asintótica, tanto la acción evaluada sobre la solución como el tensor cuasilocal pueden presentar divergencias. En espacios asintóticamente Anti-de Sitter, estas divergencias se eliminan mediante la adición de contraterminos locales construidos a partir de los campos inducidos sobre la frontera, tal como se discutió en la sección anterior [47, 50].

El tensor cuasilocal relevante para las aplicaciones posteriores se obtiene, por lo tanto, variando la acción renormalizada. Las contribuciones de los contratérminos modifican la expresión de Brown–York y permiten definir cantidades conservadas finitas en el límite hacia la frontera asintótica.

5.2 Espacios asintóticamente planos

Las primeras aplicaciones del tensor cuasilocal de Brown–York se desarrollaron principalmente en el contexto de espacios–tiempo asintóticamente planos [60]. En este caso, la acción evaluada sobre la solución y las cantidades cuasilocales pueden presentar divergencias cuando la superficie de frontera es enviada al infinito.

Un procedimiento tradicional consiste en utilizar una sustracción de fondo, comparando la acción de la solución estudiada con la correspondiente a una geometría de referencia,

$$I_{\text{reg}} = I_{\text{sol}} - I_{\text{ref}}. \quad (5.11)$$

Aunque este método permite obtener resultados finitos en numerosos ejemplos, depende de la elección de la geometría de referencia y del procedimiento utilizado para realizar el emparejamiento entre ambas geometrías.

También se han desarrollado formulaciones intrínsecas basadas en términos de frontera construidos a partir de su geometría. Entre ellas se encuentra la construcción propuesta por Mann y Marolf [30], aplicable a determinadas clases de espacios–tiempo asintóticamente planos.

En cuatro dimensiones, para clases apropiadas de fronteras, puede utilizarse una expresión local de la forma

$$I_{ct} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \sqrt{2\mathcal{R}}, \quad (5.12)$$

donde $\mathcal{R}$ es el escalar de Ricci construido a partir de la métrica inducida h_{ab} .

Esta expresión no constituye una fórmula universal para cualquier geometría asintóticamente plana. La construcción general de Mann–Marolf se formula en términos de una cantidad geométrica definida implícitamente a partir de la curvatura intrínseca de la frontera [30]. La forma (5.12) corresponde a clases particulares de geometrías para las cuales puede obtenerse una representación local de este tipo.

La acción regularizada puede escribirse entonces como

$$I_{\text{ren}} = I_{EH} + I_{GH} + I_{ct}, \quad (5.13)$$

y el tensor cuasilocal correspondiente se obtiene mediante

$$\tau_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{\text{ren}}}{\delta h^{ab}} = \tau_{ab}^{\text{BY}} + \tau_{ab}^{\text{ct}}. \quad (5.14)$$

Estas construcciones permiten obtener cantidades finitas utilizando únicamente información geométrica definida sobre la frontera, sin recurrir a una sustracción explícita de fondo.

5.3 Espacios asintóticamente Anti-de Sitter

En espacios asintóticamente Anti-de Sitter, la estructura conforme de la región asintótica permite organizar sistemáticamente las divergencias de la acción y de las cantidades cuasilocales mediante contratérminos locales definidos sobre una superficie reguladora [52, 47, 50].

En cuatro dimensiones, la métrica de una solución asintóticamente AdS puede escribirse esquemáticamente cerca de la región asintótica como

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} + 1 + \mathcal{O}(r^{-1})\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 + \mathcal{O}(r^{-1})\right)^{-1} dr^2 + r^2 (\gamma_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1})) dx^i dx^j, \quad (5.15)$$

donde los términos subdominantes contienen la información física asociada a la solución. La forma precisa de la expansión depende de las coordenadas y de las condiciones de frontera.

Para gravedad de Einstein en cuatro dimensiones, los contratérminos gravitacionales mínimos son

$$I_{ct} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{l}{2} \mathcal{R} \right), \quad (5.16)$$

de modo que

$$I_{\text{ren}} = I_{EH} + I_{GH} + I_{ct}, \quad (5.17)$$

a la que deben añadirse las contribuciones correspondientes de los campos de materia cuando estas sean necesarias.

Con la definición (5.8), el tensor cuasilocal renormalizado toma la forma

$$\tau_{ab} = \frac{1}{8\pi G} \left[K_{ab} - K h_{ab} - \frac{2}{l} h_{ab} + l \left(\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} h_{ab} \right) \right], \quad (5.18)$$

donde $\mathcal{R}_{ab}$ y $\mathcal{R}$ son las cantidades de curvatura construidas a partir de la métrica inducida h_{ab} .

Esta expresión corresponde al tensor cuasilocal definido sobre una superficie reguladora de radio finito. Las cargas conservadas relevantes para las soluciones consideradas en esta tesis se construirán a partir de este tensor. Cuando se requiere una interpretación holográfica, el límite hacia la frontera conforme y la reescala correspondiente permiten relacionarlo con el tensor de energía-momento de la teoría dual, tal como se discutió en la sección de renormalización holográfica.

5.4 Dependencia de esquema y contratérminos de materia

La construcción de contratérminos constituye un elemento fundamental de la renormalización holográfica. Su función principal consiste en cancelar las divergencias que aparecen en la acción on-shell y en las cantidades obtenidas a partir del tensor cuasilocal.

Sin embargo, la cancelación de divergencias no determina necesariamente de manera única la acción renormalizada. Una vez eliminadas las divergencias, pueden añadirse términos finitos locales contruidos a partir de los datos de frontera. Esta libertad corresponde a una dependencia de esquema y puede modificar ciertas cantidades finitas sin afectar la cancelación de las divergencias [50, 61].

La situación adquiere especial importancia en presencia de campos de materia. Consideremos, por ejemplo, un campo escalar con comportamiento asintótico

$$\phi(r, x) = \frac{A(x)}{r^{\Delta_-}} + \frac{B(x)}{r^{\Delta_+}} + \dots, \quad (5.19)$$

donde los exponentes $\Delta_{\pm}$ están determinados por la masa del campo escalar y por la dimensión del espacio-tiempo.

Dependiendo del intervalo de masas, ambos modos pueden ser normalizables y pueden imponerse condiciones de frontera que relacionen sus coeficientes asintóticos,

$$B(x) = \mathcal{F}[A(x)]. \quad (5.20)$$

Estas condiciones de borde forman parte de la especificación del problema y, desde el punto de vista holográfico, afectan la identificación de los datos de frontera y la interpretación de los operadores duales [43, 44, 45].

La presencia del campo escalar puede requerir contratérminos adicionales dependientes de ϕ para garantizar tanto la finitud de la acción como un principio variacional consistente. Asimismo, los términos finitos necesarios para implementar determinadas condiciones de frontera pueden contribuir a las cantidades conservadas obtenidas a partir de τ_{ab} .

Por esta razón, en los sistemas con pelo escalar la construcción de la acción renormalizada debe considerar conjuntamente el comportamiento asintótico de la métrica, la expansión del campo escalar, los contratérminos necesarios y las condiciones de frontera impuestas sobre los modos asintóticos.

Estas cuestiones serán particularmente importantes en los capítulos dedicados a agujeros negros con pelo escalar y en la construcción del nuevo contratérmino estudiado posteriormente en esta tesis.

5.5 Cargas conservadas

Una vez construido el tensor cuasilocal renormalizado, es posible definir cantidades asociadas a las simetrías de la geometría de frontera. Consideremos una hipersuperficie espacial Σ contenida en la superficie de frontera reguladora, con métrica inducida σ_{ij} y vector normal unitario temporal u^a .

Si ξ^a genera una simetría apropiada de los datos de frontera, la carga asociada puede escribirse como

$$Q[\xi] = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (5.21)$$

La conservación de esta cantidad depende de las condiciones de frontera y de las simetrías de las fuentes presentes. En ausencia de flujo a través de la frontera y cuando los datos de frontera son invariantes bajo la transformación generada por ξ^a , la carga $Q[\xi]$ puede interpretarse como una cantidad conservada.

En presencia de fuentes de materia, la identidad de Ward puede adquirir contribuciones adicionales. Por ejemplo, en presencia de una fuente escalar $\phi_{(0)}$ y de una fuente gauge $A_{(0)a}$, su forma esquemática es

$$\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle \partial_b \phi_{(0)} + F_{ba}^{(0)} \langle J^a \rangle, \quad (5.22)$$

con posibles modificaciones dependientes de las convenciones utilizadas. Por lo tanto, la conservación de las cargas debe analizarse conjuntamente con las condiciones de frontera y las simetrías de las fuentes.

Masa

Para una solución estacionaria, la masa se obtiene tomando como generador el vector de Killing temporal,

$$\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \quad (5.23)$$

con la normalización correspondiente al marco temporal elegido en la frontera. La carga asociada es

$$M = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (5.24)$$

Una vez incluidos los contratérminos apropiados y tomado el límite asintótico correspondiente, esta expresión permite obtener una definición finita de la masa de la solución.

La relación entre esta cantidad y la energía de la teoría dual depende de la elección del marco conforme y de la normalización del vector temporal en la frontera. En las soluciones consideradas en esta tesis, estas elecciones se especificarán de acuerdo con la estructura asintótica de cada geometría.

Momento angular

Si la geometría posee una simetría rotacional generada por un vector de Killing axial

$$\psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^a, \quad (5.25)$$

puede definirse la carga asociada

$$J = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \psi^b. \quad (5.26)$$

Esta cantidad corresponde al momento angular asociado a la simetría rotacional considerada.

Relación con la termodinámica

Las cargas obtenidas a partir del tensor cuasilocal renormalizado desempeñan un papel central en la formulación termodinámica de los agujeros negros. Para una solución cargada y rotante, la primera ley adopta la forma

$$dM = T dS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (5.27)$$

con posibles contribuciones adicionales asociadas a los campos de materia y a las condiciones de frontera.

En particular, en presencia de campos escalares, la definición de la masa puede depender de los términos de frontera requeridos por la estructura asintótica de la solución. La construcción de una acción renormalizada consistente constituye entonces un ingrediente esencial para obtener cargas bien definidas y verificar las relaciones termodinámicas correspondientes.

Las expresiones desarrolladas en este capítulo serán utilizadas en los capítulos siguientes para calcular las cargas conservadas asociadas a las distintas familias de agujeros negros consideradas en esta tesis. En particular, el análisis de los contratérminos y de las condiciones de frontera permitirá establecer definiciones consistentes de la masa y de las demás cantidades termodinámicas relevantes para cada solución.

Capítulo 6

Agujeros negros cargados en espacios Anti-de Sitter

En los capítulos anteriores se introdujeron las herramientas necesarias para definir cantidades físicas en espacios asintóticamente Anti-de Sitter mediante el formalismo de Brown–York y la renormalización holográfica. En este capítulo aplicaremos dicho formalismo al agujero negro de Reissner–Nordström–Anti-de Sitter (RN–AdS), una solución de la teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica negativa.

Además de su interés como solución exacta, el agujero negro RN–AdS constituye un caso de referencia para los sistemas estudiados posteriormente en esta tesis. Las cantidades termodinámicas y la energía obtenida mediante el tensor cuasilocal renormalizado servirán como punto de comparación para las soluciones más generales con campos escalares y para la posterior aplicación de la fórmula de Cardy–Verlinde.

En lo que sigue se utilizarán unidades geométricas en las que

$$G = 1. \tag{6.1}$$

Esta convención se mantendrá en los capítulos posteriores, salvo que se indique explícitamente lo contrario.

El capítulo comienza con la presentación de la teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica negativa y sus ecuaciones de movimiento. Posteriormente se introduce la solución RN–AdS y se estudian sus propiedades geométricas y termodinámicas. Finalmente, se calcula su energía mediante el tensor cuasilocal renormalizado y se verifica la primera ley de la termodinámica.

6.1 La teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica

La teoría de Einstein–Maxwell describe el acoplamiento mínimo entre el campo gravitacional y un campo electromagnético clásico [26, 27]. Considerando una constante cosmológica negativa, la acción puede escribirse como

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K, \quad (6.2)$$

donde R es el escalar de Ricci asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$, Λ es la constante cosmológica, K es la traza de la curvatura extrínseca de la frontera y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.3)$$

es el tensor electromagnético construido a partir del potencial vectorial A_μ . El segundo término corresponde al término de Gibbons–Hawking–York, necesario para establecer un principio variacional bien definido bajo condiciones de borde de Dirichlet [28, 29].

Para espacios asintóticamente Anti-de Sitter, la constante cosmológica se escribe como

$$\Lambda = -\frac{3}{l^2}, \quad (6.4)$$

donde l es el radio de curvatura de AdS. En el límite $l \rightarrow \infty$ se recupera la teoría de Einstein–Maxwell en espacio asintóticamente plano.

6.1.1 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción (6.2) respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ y del potencial electromagnético A_μ .

La variación respecto de A_μ conduce a las ecuaciones de Maxwell en espacio–tiempo curvo,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (6.5)$$

Por otra parte, la variación respecto de la métrica produce las ecuaciones de Einstein con fuente electromagnética,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{3}{l^2}g_{\mu\nu} = 2 \left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right). \quad (6.6)$$

El miembro derecho corresponde al tensor de energía-momento del campo electromagnético,

$$T_{\mu\nu} = 2 \left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right). \quad (6.7)$$

Para obtener soluciones estáticas y esféricamente simétricas, consideramos el ansatz

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.8)$$

donde $d\Omega_2^2$ representa la métrica de la esfera unitaria bidimensional.

Para el campo electromagnético adoptamos un potencial puramente eléctrico,

$$A = \Phi(r) dt. \quad (6.9)$$

En consecuencia,

$$F_{tr} = -\frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (6.10)$$

Con estos ansatz, las ecuaciones de Maxwell y Einstein pueden integrarse para obtener la solución de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter.

6.1.2 La solución de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter

La ecuación de Maxwell admite un potencial gauge de la forma

$$A = \left(-\frac{Q}{r} + \frac{Q}{r_+} \right) dt, \quad (6.11)$$

donde la constante aditiva se ha elegido de manera que el potencial sea regular en el horizonte,

$$A_t(r_+) = 0. \quad (6.12)$$

El campo electromagnético correspondiente es

$$F = dA = \frac{Q}{r^2} dr \wedge dt, \quad (6.13)$$

por lo que

$$F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad F_{tr} = -\frac{Q}{r^2}. \quad (6.14)$$

La función métrica viene dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (6.15)$$

Por tanto, la métrica RN–AdS adopta la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.16)$$

Los parámetros M y Q caracterizan, respectivamente, la masa y la carga de la solución. Más adelante verificaremos que, con las convenciones adoptadas, la energía obtenida mediante el tensor cuasilocal renormalizado coincide con el parámetro M .

En el límite

$$Q \rightarrow 0, \quad (6.17)$$

se recupera la solución de Schwarzschild–Anti–de Sitter, mientras que para

$$l \rightarrow \infty, \quad (6.18)$$

se obtiene el agujero negro de Reissner–Nordström en espacio asintóticamente plano [31, 32, 26].

Los horizontes están determinados por las raíces positivas de

$$f(r) = 0. \quad (6.19)$$

Denotaremos el horizonte exterior por r_+ . La condición

$$f(r_+) = 0 \quad (6.20)$$

permite expresar el parámetro de masa en función del radio del horizonte y de la carga,

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (6.21)$$

6.2 Termodinámica del agujero negro Reissner–Nordström–AdS

Las principales cantidades termodinámicas de la solución pueden expresarse en función del radio del horizonte r_+ , la carga eléctrica Q y el radio de curvatura AdS l .

Temperatura

Para una métrica estática de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.22)$$

la temperatura de Hawking está dada por

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{f'(r_+)}{4\pi}. \quad (6.23)$$

Utilizando la función métrica

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (6.24)$$

se obtiene

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2M}{r_+^2} - \frac{2Q^2}{r_+^3} + \frac{2r_+}{l^2} \right). \quad (6.25)$$

Utilizando la condición de horizonte, la temperatura puede escribirse como

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_+^2} \right). \quad (6.26)$$

En el límite extremal se cumple

$$1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_+^2} = 0, \quad (6.27)$$

por lo que

$$T = 0. \quad (6.28)$$

Entropía

La entropía viene dada por la fórmula de Bekenstein–Hawking,

$$S = \frac{A}{4}. \quad (6.29)$$

Para un horizonte esférico,

$$A = 4\pi r_+^2, \quad (6.30)$$

y, por tanto,

$$S = \pi r_+^2. \quad (6.31)$$

Carga eléctrica y potencial

La carga eléctrica se obtiene mediante la ley de Gauss,

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} {}^*F. \quad (6.32)$$

Para el campo electromagnético

$$F = \frac{Q}{r^2} dr \wedge dt, \quad (6.33)$$

la integral sobre una esfera de radio constante reproduce el parámetro Q que aparece en la solución.

El potencial electrostático relevante para la termodinámica corresponde a la diferencia entre el infinito y el horizonte. Con el gauge elegido en (6.11),

$$\Phi = A_t(\infty) - A_t(r_+) = \frac{Q}{r_+}. \quad (6.34)$$

Masa holográfica del agujero negro RN–AdS

La energía asociada a una solución asintóticamente Anti-de Sitter puede obtenerse a partir del tensor cuasilocal renormalizado definido sobre una superficie de radio constante $r = R$.

Para la teoría de Einstein en cuatro dimensiones, el tensor renormalizado toma la forma

$$\tau_{ab} = \frac{1}{8\pi} \left[K_{ab} - K h_{ab} - \frac{2}{l} h_{ab} + l \left(\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} h_{ab} \right) \right]. \quad (6.35)$$

Consideremos una superficie reguladora de radio constante $r = R$. La métrica inducida es

$$ds_{\partial\mathcal{M}}^2 = -f(R)dt^2 + R^2 d\Omega_2^2, \quad (6.36)$$

mientras que el vector normal exterior puede elegirse como

$$n_\mu dx^\mu = \frac{dr}{\sqrt{f(R)}}. \quad (6.37)$$

Con la definición

$$K_{ab} = h_a^\mu h_b^\nu \nabla_\mu n_\nu, \quad (6.38)$$

las componentes relevantes de la curvatura extrínseca son

$$K_{tt} = -\frac{1}{2}\sqrt{f} f', \quad (6.39)$$

$$K_{\theta\theta} = R\sqrt{f}, \quad (6.40)$$

y

$$K_{\phi\phi} = R\sqrt{f} \sin^2 \theta. \quad (6.41)$$

Su traza es

$$K = \frac{f'}{2\sqrt{f}} + \frac{2\sqrt{f}}{R}. \quad (6.42)$$

Para estudiar el comportamiento asintótico utilizamos

$$f(R) = 1 + \frac{R^2}{l^2} - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}. \quad (6.43)$$

La expansión de $\sqrt{f(R)}$ para $R \rightarrow \infty$ es

$$\sqrt{f(R)} = \frac{R}{l} + \frac{l}{2R} - \frac{Ml}{R^2} + \frac{lQ^2}{2R^3} - \frac{l^3}{8R^3} + \mathcal{O}(R^{-4}). \quad (6.44)$$

Al sustituir estas expresiones en (6.35), los términos divergentes se cancelan y el término relevante para la energía es

$$\tau_{tt} = \frac{M}{4\pi l R} + \mathcal{O}(R^{-2}). \quad (6.45)$$

La energía cuasilocal asociada al vector de Killing temporal

$$\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad (6.46)$$

se obtiene mediante

$$E(R) = \int_{\Sigma_R} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b, \quad (6.47)$$

donde

$$u^a = \frac{1}{\sqrt{f(R)}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad (6.48)$$

es el vector normal unitario a la sección espacial Σ_R .

Por tanto,

$$E(R) = 4\pi R^2 \frac{\tau_{tt}}{\sqrt{f(R)}}. \quad (6.49)$$

Utilizando (6.45) y tomando el límite $R \rightarrow \infty$, se obtiene

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} E(R) = M. \quad (6.50)$$

Así, con las convenciones y condiciones de frontera adoptadas, la energía obtenida mediante el tensor cuasilocal renormalizado coincide con el parámetro M de la solución.

Primera ley de la termodinámica

A partir de la condición de horizonte $f(r_+) = 0$, la energía puede escribirse como

$$E = M(r_+, Q) = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (6.51)$$

Manteniendo fijo el radio de curvatura l , su diferencial es

$$dE = \left[\frac{1}{2} - \frac{Q^2}{2r_+^2} + \frac{3r_+^2}{2l^2} \right] dr_+ + \frac{Q}{r_+} dQ. \quad (6.52)$$

Por otra parte, utilizando

$$S = \pi r_+^2, \quad (6.53)$$

se tiene

$$dS = 2\pi r_+ dr_+. \quad (6.54)$$

Multiplicando por la temperatura (6.26),

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_+^2} \right), \quad (6.55)$$

obtenemos

$$TdS = \left[\frac{1}{2} - \frac{Q^2}{2r_+^2} + \frac{3r_+^2}{2l^2} \right] dr_+. \quad (6.56)$$

Además, utilizando

$$\Phi = \frac{Q}{r_+}, \quad (6.57)$$

se tiene

$$\Phi dQ = \frac{Q}{r_+} dQ. \quad (6.58)$$

Por consiguiente,

$$dE = TdS + \Phi dQ. \quad (6.59)$$

La primera ley queda así verificada para l fijo.

Para el agujero negro RN–AdS, la energía obtenida mediante el tensor cuasilocal renormalizado coincide con el parámetro M y la primera ley adopta la forma (6.59). Este resultado proporcionará el punto de comparación para las soluciones con pelo escalar estudiadas en los capítulos siguientes.

Capítulo 7

Agujeros negros con pelo escalar

7.1 Agujeros negros acoplados a un campo escalar

En el capítulo anterior estudiamos el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter, que constituye una de las soluciones cargadas más simples de la teoría de Einstein–Maxwell con constante cosmológica negativa. Sin embargo, numerosas teorías efectivas de gravedad, particularmente aquellas que surgen como truncaciones de supergravedad o como límites de baja energía de teoría de cuerdas, contienen campos escalares que se acoplan de manera no trivial tanto a la geometría como a los campos gauge. La presencia de estos grados de libertad adicionales modifica las propiedades geométricas, holográficas y termodinámicas de las soluciones [62, 63].

En este capítulo trabajaremos, salvo indicación contraria, en unidades tales que

$$G = 1.$$

Por tanto, la constante de Newton no aparecerá explícitamente en las expresiones siguientes.

Estudiaremos una familia de soluciones perteneciente al denominado modelo STU, obtenido como una truncación consistente de la supergravedad *gauged* $N = 8$ en cuatro dimensiones [62, 63]. El término *gauged* indica que una simetría global de la teoría original ha sido promovida a una simetría local. Como consecuencia aparecen campos gauge y un potencial escalar no trivial que permite la existencia de un vacío Anti–de Sitter.

En esta truncación sobreviven la métrica, tres campos escalares dilatónicos y cuatro campos gauge abelianos. La presencia de los campos escalares permite la existencia de soluciones con *pelo escalar*. En la familia que estudiaremos, el perfil de los campos escalares está determinado por los parámetros de carga de la solución. El pelo escalar es, por tanto, secundario dentro de esta familia de soluciones.

Siguiendo las convenciones de [64], la acción del modelo STU puede escribirse como

$$I[g_{\mu\nu}, \vec{\phi}, A_i] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2} (\partial \vec{\phi})^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i^{-2} F_i^2 + \frac{1}{l^2} \sum_{i<j}^4 X_i X_j \right]. \quad (7.1)$$

Aquí R representa el escalar de Ricci, $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ denota los tres campos escalares y

$$F_i = dA_i$$

son las intensidades de campo asociadas a los cuatro potenciales gauge A_i .

La normalización elegida en (7.1) fija también la convención para las cargas eléctricas físicas. Para cada campo gauge, la carga conservada se define mediante el flujo

$$Q_i = \frac{1}{16\pi} \oint_{S_\infty^2} X_i^{-2} \star F_i. \quad (7.2)$$

Los factores X_i , que describen el acoplamiento entre los campos escalares y los campos gauge, satisfacen la restricción

$$X_1 X_2 X_3 X_4 = 1. \quad (7.3)$$

En términos de los campos escalares pueden escribirse como

$$X_i = e^{-\frac{1}{2} \vec{a}_i \cdot \vec{\phi}}, \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 4\delta_{ij} - 1. \quad (7.4)$$

Una elección conveniente para los vectores constantes $\vec{a}_i$ es [63]

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (1, -1, -1), \quad \vec{a}_3 = (-1, 1, -1), \quad \vec{a}_4 = (-1, -1, 1). \quad (7.5)$$

Con esta parametrización, la acción puede escribirse de manera equivalente como

$$I[g_{\mu\nu}, \vec{\phi}, A_i] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\vec{\phi})^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 e^{\vec{a}_i \cdot \vec{\phi}} F_i^2 - V(\vec{\phi}) \right], \quad (7.6)$$

donde el potencial escalar es

$$V(\vec{\phi}) = -\frac{2}{l^2} (\cosh \phi_1 + \cosh \phi_2 + \cosh \phi_3). \quad (7.7)$$

El potencial posee un punto estacionario en

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0,$$

correspondiente al vacío Anti-de Sitter con radio de curvatura l .

Las ecuaciones de movimiento admiten una familia de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos [65]. La métrica puede escribirse como

$$ds^2 = - \left(\prod_{i=1}^4 H_i \right)^{-1/2} f dt^2 + \left(\prod_{i=1}^4 H_i \right)^{1/2} [f^{-1} d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (7.8)$$

donde

$$f(\rho) = 1 - \frac{\eta}{\rho} + \frac{\rho^2}{l^2} \prod_{i=1}^4 H_i(\rho), \quad H_i(\rho) = 1 + \frac{q_i}{\rho}. \quad (7.9)$$

Los parámetros q_i caracterizan la solución, mientras que las cargas eléctricas físicas asociadas a los cuatro campos gauge vienen dadas por

$$Q_i = \frac{\sqrt{q_i(q_i + \eta)}}{4}. \quad (7.10)$$

El parámetro η está relacionado con la masa de la solución.

Los potenciales gauge pueden elegirse como

$$A_i = \frac{\sqrt{q_i(q_i + \eta)}}{\rho + q_i} dt. \quad (7.11)$$

De esta forma,

$$F_i = dA_i = -\frac{\sqrt{q_i(q_i + \eta)}}{(\rho + q_i)^2} d\rho \wedge dt. \quad (7.12)$$

El potencial (7.11) satisface

$$A_{it}(\infty) = 0.$$

Para trabajar con un potencial regular en la sección euclidiana se puede realizar un desplazamiento gauge constante,

$$A_i^{(\text{reg})} = [A_{it}(\rho) - A_{it}(\rho_+)] dt, \quad (7.13)$$

de modo que

$$A_{it}^{(\text{reg})}(\rho_+) = 0.$$

La cantidad termodinámica conjugada a Q_i corresponde a la diferencia de potencial entre el infinito y el horizonte. Adoptaremos la convención

$$\Phi_i = A_{it}(\infty) - A_{it}(\rho_+). \quad (7.14)$$

Los factores escalares correspondientes son

$$X_i = \left(\prod_{j=1}^4 H_j \right)^{1/4} H_i^{-1}, \quad (7.15)$$

mientras que los tres campos escalares toman la forma

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{H_1 H_2}{H_3 H_4} \right), \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{H_1 H_3}{H_2 H_4} \right), \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{H_1 H_4}{H_2 H_3} \right). \quad (7.16)$$

Los perfiles escalares quedan así determinados por las funciones H_i y, por tanto, por los parámetros que caracterizan la solución.

7.2 Estudio de casos particulares

La teoría introducida en la sección anterior posee una estructura rica debido a la presencia de cuatro campos gauge y tres campos escalares. Algunas elecciones particulares de los parámetros permiten recuperar soluciones conocidas o truncaciones más simples. Estas truncaciones serán especialmente útiles para el análisis holográfico y termodinámico desarrollado en las secciones siguientes [66].

7.2.1 Truncación de cuatro cargas iguales

Consideremos primero el caso

$$q \equiv q_1 = q_2 = q_3 = q_4. \quad (7.17)$$

En este caso,

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0, \quad (7.18)$$

por lo que

$$X_i = 1.$$

El potencial escalar se reduce a

$$V(0) = -\frac{6}{l^2}, \quad (7.19)$$

y la acción toma la forma

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 F_i^2 + \frac{6}{l^2} \right]. \quad (7.20)$$

Mediante una identificación consistente de los cuatro campos gauge, esta truncación se reduce al sector de Einstein–Maxwell–Anti–de Sitter. La solución resultante corresponde a la familia de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter estudiada en el capítulo anterior.

Este límite proporciona el caso sin pelo escalar dentro del modelo STU. Cuando las cargas dejan de ser iguales, los campos escalares adquieren perfiles no triviales fuera del horizonte y la geometría se aparta de la solución de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter.

7.2.2 Truncación para un campo escalar

Consideremos ahora una truncación en la cual únicamente una de las cuatro cargas es distinta de cero,

$$q_1 = q, \quad q_2 = q_3 = q_4 = 0. \quad (7.21)$$

Los tres campos escalares quedan entonces relacionados y pueden describirse mediante un único campo efectivo,

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 \equiv -\frac{\phi}{\sqrt{3}}. \quad (7.22)$$

La acción reducida es

$$I[g_{\mu\nu}, \phi, A] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}F^2 - V(\phi) \right], \quad (7.23)$$

donde

$$V(\phi) = -\frac{6}{l^2} \cosh\left(\frac{\phi}{\sqrt{3}}\right). \quad (7.24)$$

La variación de la acción conduce a las ecuaciones

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - g_{\mu\nu} V(\phi) \right] + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3}\phi} \left[F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right]. \quad (7.25)$$

Definiendo

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(\partial\phi)^2 + 2V(\phi)], \quad (7.26)$$

y

$$T_{\mu\nu}^{EM} = e^{-\sqrt{3}\phi} \left[F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right], \quad (7.27)$$

la ecuación de Einstein puede escribirse como

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^{\phi} + T_{\mu\nu}^{EM}). \quad (7.28)$$

La ecuación para el campo escalar es

$$\nabla^2 \phi = \frac{dV}{d\phi} - \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-\sqrt{3}\phi} F^2, \quad (7.29)$$

mientras que la ecuación de Maxwell es

$$\nabla_{\mu} (e^{-\sqrt{3}\phi} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (7.30)$$

Una solución de estas ecuaciones puede escribirse como [\[65\]](#)

$$ds^2 = -\frac{f(\rho)}{\sqrt{H(\rho)}} dt^2 + \sqrt{H(\rho)} \left[\frac{d\rho^2}{f(\rho)} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (7.31)$$

con

$$\phi(\rho) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln H(\rho), \quad (7.32)$$

y

$$f(\rho) = 1 - \frac{\eta}{\rho} + \frac{\rho^2}{l^2} H(\rho), \quad H(\rho) = 1 + \frac{q}{\rho}. \quad (7.33)$$

Para simplificar la notación definimos

$$a(\rho)^2 = \frac{f(\rho)}{\sqrt{H(\rho)}}, \quad b(\rho)^2 = \rho^2 \sqrt{H(\rho)}. \quad (7.34)$$

Siguiendo la convención de signos utilizada para la solución, el potencial gauge es

$$A = A_t(\rho) dt, \quad A_t(\rho) = -\frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{\rho+q}. \quad (7.35)$$

Por tanto,

$$F = dA = \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{(\rho+q)^2} d\rho \wedge dt. \quad (7.36)$$

Equivalentemente,

$$F = -e^{\sqrt{3}\phi} \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{b^2} dt \wedge d\rho, \quad (7.37)$$

y

$$F^2 = -\frac{2q(q+\eta)}{b^4} e^{2\sqrt{3}\phi}. \quad (7.38)$$

La solución describe un agujero negro cargado con un perfil escalar no trivial determinado por los parámetros q y η .

7.3 Termodinámica del agujero negro acoplado a un campo escalar

Sea ρ_+ la posición del horizonte, determinada por

$$f(\rho_+) = 0. \quad (7.39)$$

La temperatura de Hawking y la entropía de Bekenstein–Hawking son

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{3\rho_+^2 + 2q\rho_+ + l^2}{l^2 \sqrt{\rho_+(\rho_+ + q)}}, \quad (7.40)$$

y

$$S = \pi \rho_+^2 \sqrt{1 + \frac{q}{\rho_+}}. \quad (7.41)$$

La condición de horizonte permite expresar η en términos de ρ_+ y q ,

$$\eta = \rho_+ + \frac{\rho_+^2(\rho_+ + q)}{l^2}. \quad (7.42)$$

La carga eléctrica física se obtiene a partir del flujo del campo gauge,

$$Q = \frac{1}{16\pi} \oint_{S^2} e^{-\sqrt{3}\phi} \star F = \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{4}. \quad (7.43)$$

El potencial (7.35) satisface

$$A_t(\infty) = 0.$$

Un potencial regular en el horizonte se obtiene mediante el desplazamiento

$$A_t^{(\text{reg})}(\rho) = A_t(\rho) - A_t(\rho_+). \quad (7.44)$$

Adoptando la convención

$$\Psi = A_t(\infty) - A_t(\rho_+), \quad (7.45)$$

se obtiene

$$\Psi = \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{\rho_+ + q} = \frac{4Q}{\rho_+ + q}. \quad (7.46)$$

Esta cantidad corresponde a la diferencia de potencial entre el infinito y el horizonte.

7.4 Tensor de estrés holográfico

Además de las cantidades termodinámicas obtenidas a partir del horizonte, resulta necesario identificar correctamente la energía del sistema. En presencia de campos escalares con condiciones de borde no triviales, la energía física puede recibir contribuciones adicionales provenientes del sector escalar.

La acción evaluada sobre soluciones asintóticamente Anti-de Sitter contiene divergencias asociadas al volumen infinito del espacio-tiempo. Para obtener un principio variacional bien definido y cantidades conservadas finitas se introducen el término de Gibbons-Hawking y los contratérminos holográficos apropiados [47, 50, 45, 67].

Para la solución considerada, el campo escalar presenta el comportamiento asintótico

$$\phi(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (7.47)$$

donde

$$A = -\frac{\sqrt{3}q}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{3}q^2}{8}. \quad (7.48)$$

La coordenada r corresponde a la coordenada radial asintótica en la cual el desarrollo adopta la forma canónica. Los coeficientes satisfacen una condición de borde mixta

$$B = \frac{dW(A)}{dA}, \quad (7.49)$$

con

$$W(A) = \frac{\sqrt{3}}{18} A^3. \quad (7.50)$$

Esta condición de borde será la utilizada en la construcción de la acción renormalizada y del tensor de estrés holográfico.

La acción euclidiana regularizada puede escribirse como

$$\begin{aligned} I^E = & I_{\text{bulk}}^E - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h^E} K \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h^E} \left(\frac{2}{l} + \frac{l\mathcal{R}}{2} \right) \\ & + \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h^E} \left(\frac{\phi^2}{2l} + \frac{\sqrt{3}}{18l} \phi^3 \right). \end{aligned} \quad (7.51)$$

El término de volumen es

$$I_{\text{bulk}}^E = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g^E} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}F^2 + \frac{6}{l^2} \cosh\left(\frac{\phi}{\sqrt{3}}\right) \right]. \quad (7.52)$$

El tensor de estrés holográfico se define mediante la variación de la acción renormalizada respecto de la métrica inducida. Con las convenciones adoptadas, toma la forma

$$\begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{\text{ren}}}{\delta h^{ab}} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \left[K_{ab} - \left(K - \frac{2}{l} \right) h_{ab} - l G_{ab} \right] \\ &\quad - \frac{h_{ab}}{16\pi} \left[\frac{\phi^2}{2l} + \frac{W(A)}{lA^3} \phi^3 \right]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

La energía asociada al vector de Killing temporal $\xi = \partial_t$ viene dada por

$$E = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (7.54)$$

Para la solución de un campo escalar se obtiene

$$E = M = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{q}{2} \right) = \frac{\eta}{2} + \frac{q}{4}. \quad (7.55)$$

La traza del tensor de estrés holográfico depende de las condiciones de borde impuestas al campo escalar. Para condiciones mixtas generales aparece la combinación

$$\langle \tau^a_a \rangle = -\frac{3}{16\pi l^4} \left(W - \frac{AB}{3} \right). \quad (7.56)$$

Para la solución considerada,

$$W(A) = \frac{\sqrt{3}}{18} A^3,$$

y se cumple

$$W = \frac{AB}{3}.$$

En consecuencia,

$$\nabla^a \tau_{ab} = 0, \quad h^{ab} \tau_{ab} = 0. \quad (7.57)$$

7.5 Agujeros negros diónicos con campo escalar

La solución estudiada anteriormente corresponde a una truncación con una única carga eléctrica no trivial. Una extensión natural consiste en considerar soluciones que posean simultáneamente carga eléctrica y magnética. Estas configuraciones permiten analizar con mayor detalle la relación entre el sector escalar, las condiciones de borde y la termodinámica [68, 66].

Consideremos la acción

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{4} e^{\gamma\phi} F^2 - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + I_{GH} + I_g + I_\phi. \quad (7.58)$$

En lo que sigue consideraremos el caso

$$\gamma = -\sqrt{3}, \quad V(\phi) = -\frac{6}{l^2} \cosh\left(\frac{\phi}{\sqrt{3}}\right). \quad (7.59)$$

La solución estática y esféricamente simétrica puede escribirse como [68]

$$ds^2 = -(H_1 H_2)^{-1/2} f dt^2 + (H_1 H_2)^{1/2} \left[\frac{d\rho^2}{f} + \rho^2 d\Omega^2 \right], \quad (7.60)$$

con

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{H_2}{H_1}\right), \quad (7.61)$$

y

$$f = f_0 + \frac{\rho^2}{l^2} H_1 H_2, \quad f_0 = 1 - \frac{2\mu}{\rho}. \quad (7.62)$$

Las funciones H_1 y H_2 son

$$H_1 = \gamma_1^{-1} (1 - 2\beta_1 f_0 + \beta_1 \beta_2 f_0^2), \quad (7.63)$$

$$H_2 = \gamma_2^{-1} (1 - 2\beta_2 f_0 + \beta_1 \beta_2 f_0^2), \quad (7.64)$$

donde

$$\gamma_1 = 1 - 2\beta_1 + \beta_1 \beta_2, \quad \gamma_2 = 1 - 2\beta_2 + \beta_1 \beta_2. \quad (7.65)$$

El potencial gauge completo de la solución es

$$A = \sqrt{2} \left(\frac{1 - \beta_1 f_0}{\sqrt{\beta_1 \gamma_2} H_1} \right) dt + \frac{2\mu}{\gamma_2} \sqrt{\beta_2 \gamma_1} \cos \theta d\varphi. \quad (7.66)$$

La carga eléctrica se obtiene a partir del flujo del campo eléctrico, mientras que la carga magnética viene dada por

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} F. \quad (7.67)$$

Las cargas eléctrica y magnética físicas son

$$Q = \frac{\mu \sqrt{\beta_1 \gamma_2}}{\gamma_1 \sqrt{2}}, \quad P = \frac{\mu \sqrt{\beta_2 \gamma_1}}{\gamma_2 \sqrt{2}}. \quad (7.68)$$

Los potenciales conjugados correspondientes pueden escribirse como

$$\Psi = \sqrt{\frac{2}{\beta_1 \gamma_2}} \left[1 - \beta_1 - \frac{1 - \beta_1 f_0(\rho_+)}{H_1(\rho_+)} \right], \quad (7.69)$$

y

$$\Upsilon = \sqrt{\frac{2}{\beta_2 \gamma_1}} \left[1 - \beta_2 - \frac{1 - \beta_2 f_0(\rho_+)}{H_2(\rho_+)} \right]. \quad (7.70)$$

El potencial eléctrico Ψ corresponde a la diferencia de potencial asociada al campo eléctrico, utilizando una elección de gauge regular en el horizonte. El potencial magnético Υ se define a partir de la estructura termodinámica de la solución.

7.5.1 Termodinámica y cargas escalares

La cantidad asociada al término $1/\rho$ en el comportamiento asintótico de la métrica es

$$M = \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2)\mu}{\gamma_1\gamma_2}. \quad (7.71)$$

Para variaciones generales de los parámetros de la solución, la primera ley adopta la forma [68]

$$dM = TdS + \Psi dQ + \Upsilon dP + X dY. \quad (7.72)$$

El par termodinámico adicional asociado al sector escalar puede escribirse como

$$X = \frac{4\mu^3(\beta_1 - \beta_2)\sqrt{\beta_1\gamma_2}}{l^2(1 - \beta_1\beta_2)\gamma_1^2}, \quad Y = \frac{\sqrt{\beta_1\gamma_2}}{\sqrt{\beta_2\gamma_1}}. \quad (7.73)$$

La forma de la primera ley depende, por tanto, de las condiciones de borde impuestas al campo escalar y de la definición de energía empleada.

Para analizar esta relación desde la perspectiva holográfica, consideramos el comportamiento asintótico del campo escalar,

$$\phi(\rho) = \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho^2} + O(\rho^{-3}), \quad (7.74)$$

con

$$A(\mu, \beta_1, \beta_2) = \frac{2\sqrt{3}\mu(\beta_2 - \beta_1)(1 - \beta_1\beta_2)}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}, \quad (7.75)$$

y

$$B(\mu, \beta_1, \beta_2) = \frac{2\sqrt{3}\mu^2(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1^2\gamma_2^2} \left[\beta_1^3\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^3 - 8\beta_1^2\beta_2^2 \right. \\ \left. + 6\beta_1^2\beta_2 + 6\beta_1\beta_2^2 - 8\beta_1\beta_2 + \beta_1 + \beta_2 \right]. \quad (7.76)$$

Los coeficientes A y B caracterizan las condiciones de borde del campo escalar. Para condiciones mixtas se introduce un funcional $W(A)$ tal que

$$B = \frac{dW(A)}{dA}. \quad (7.77)$$

La energía obtenida mediante la renormalización holográfica incorpora una contribución determinada por las condiciones de borde del campo escalar. Su estructura general puede escribirse como

$$E_{\text{total}} = M + \frac{1}{4l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right). \quad (7.78)$$

La contribución

$$W - \frac{AB}{3}$$

está determinada por las condiciones de borde del campo escalar. Para las condiciones de borde que preservan la estructura conforme correspondiente, esta combinación se anula.

La traza del tensor de estrés holográfico toma la forma

$$\langle \tau^a_a \rangle = -\frac{3}{16\pi l^4} \left(W - \frac{AB}{3} \right). \quad (7.79)$$

De este modo, la estructura de la traza está directamente relacionada con las condiciones de borde mixtas impuestas al campo escalar.

La variación de la contribución escalar a la energía permite reorganizar la primera ley en términos de la energía holográfica total. Bajo las condiciones de borde y el esquema de renormalización correspondientes, se obtiene

$$dE_{\text{total}} = TdS + \Psi dQ + \Upsilon dP. \quad (7.80)$$

Por tanto, pueden distinguirse dos descripciones de la estructura termodinámica de la solución. Utilizando el parámetro M asociado directamente al comportamiento asintótico de la métrica y permitiendo variaciones generales de los parámetros, la primera ley toma la forma

$$dM = TdS + \Psi dQ + \Upsilon dP + X dY.$$

Por otra parte, al utilizar la energía total obtenida mediante la renormalización holográfica, incluyendo la contribución determinada por las condiciones de borde del campo escalar, la relación termodinámica adopta la forma

$$dE_{\text{total}} = TdS + \Psi dQ + \Upsilon dP.$$

La presencia del campo escalar modifica así la relación entre los datos asintóticos de la solución, las cargas conservadas y la termodinámica. Mientras que para el agujero negro RN–AdS la energía holográfica coincide directamente con el parámetro de masa, en las soluciones con pelo escalar las condiciones de borde pueden introducir contribuciones adicionales.

La renormalización holográfica proporciona entonces un marco para relacionar las condiciones de borde del campo escalar, el tensor de estrés holográfico y la definición de las cargas conservadas. Esta estructura será particularmente importante en el análisis posterior de las propiedades termodinámicas de las soluciones consideradas y en la aplicación de la fórmula de Cardy–Verlinde.

Capítulo 8

Un nuevo contratérmino

8.1 Contratérminos para la teoría

La regularización de la acción para la solución general del modelo STU sigue, en principio, el procedimiento estándar de la renormalización holográfica para espacios asintóticamente Anti-de Sitter [47, 49, 50, 15, 69]. Además de la acción de Einstein–Hilbert, es necesario incorporar el término de Gibbons–Hawking para obtener un principio variacional bien definido, junto con los contratérminos gravitacionales y escalares necesarios para cancelar las divergencias asociadas al comportamiento asintótico de la geometría y de los campos escalares [45, 67, 16, 17, 70].

La acción regularizada puede escribirse como

$$I_{\text{ren}} = I_{\text{bulk}} + I_{GH} + I_G + I_\phi. \quad (8.1)$$

En los capítulos anteriores vimos que, en presencia de un único campo escalar, el contratérmino escalar puede construirse a partir de su comportamiento asintótico, obteniéndose una acción finita y una definición consistente del tensor de Brown–York y de las cargas conservadas [66]. Una extensión directa al caso de tres campos escalares consistiría en asignar una contribución independiente a cada campo,

$$I_\phi = \sum_{i=1}^3 I_{\phi_i}, \quad (8.2)$$

con

$$I_{\phi_i} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{\phi_i^2}{2l} + \frac{W_i(A_i)}{lA_i^3} \phi_i^3 \right). \quad (8.3)$$

Esta construcción supone implícitamente que las condiciones de borde de cada campo escalar pueden describirse mediante funciones independientes $W_i(A_i)$. Como veremos, esta suposición no es compatible con la estructura asintótica de la solución general del modelo STU. La dificultad no corresponde, sin embargo, a una ausencia de integrabilidad en el espacio conjunto de los modos escalares, sino a la imposibilidad de factorizar el funcional de borde en una suma de tres funciones que dependan separadamente de cada A_i .

Situaciones en las que las condiciones de borde mixtas involucran simultáneamente los modos asintóticos de varios campos escalares han sido discutidas en el contexto de la *designer gravity*, las deformaciones multi-traza y las condiciones de borde mixtas [12, 13, 15, 14, 71].

Para los campos escalares considerados aquí, el comportamiento asintótico adopta la forma

$$\phi_i = \frac{A_i}{r} + \frac{B_i}{r^2} + O(r^{-3}). \quad (8.4)$$

En presencia de condiciones de borde mixtas, la relación entre los coeficientes A_i y B_i puede codificarse mediante un funcional W de los modos dominantes. Para un único campo escalar, esta relación toma la forma

$$B = \frac{dW}{dA}. \quad (8.5)$$

En el caso de varios campos escalares, la generalización natural consiste en introducir un funcional conjunto

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{tot}}(A_1, A_2, A_3), \quad (8.6)$$

tal que

$$B_i = \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i}. \quad (8.7)$$

La existencia de dicho funcional requiere que las relaciones entre los submodos B_i satisfagan las condiciones de integrabilidad

$$\frac{\partial B_i}{\partial A_j} = \frac{\partial B_j}{\partial A_i}. \quad (8.8)$$

Esta formulación será particularmente importante para la solución general del modelo STU.

Al expandir los campos escalares cerca del borde se obtiene

$$2A_1 = q_1 + q_2 - q_3 - q_4, \quad 2A_2 = q_1 - q_2 + q_3 - q_4, \quad 2A_3 = q_1 - q_2 - q_3 + q_4, \quad (8.9)$$

mientras que

$$\begin{aligned} 8B_1 &= -(q_4 + q_1 - q_3 - q_2)(q_1 - q_2 + q_3 - q_4), \\ 8B_2 &= -(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)(q_1 - q_2 - q_3 + q_4), \\ 8B_3 &= -(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)(q_1 - q_2 + q_3 - q_4). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Utilizando las expresiones para los coeficientes dominantes, estas relaciones pueden escribirse de manera compacta como

$$B_1 = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad B_2 = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad B_3 = -\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (8.11)$$

Estas ecuaciones muestran inmediatamente que el submodo asociado a cada campo escalar depende de los modos dominantes de los otros dos campos. Por tanto, no es posible describir las condiciones de borde mediante tres funciones independientes de una sola variable,

$$W_1 = W_1(A_1), \quad W_2 = W_2(A_2), \quad W_3 = W_3(A_3), \quad (8.12)$$

que satisfagan simultáneamente

$$\frac{dW_1}{dA_1} = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad \frac{dW_2}{dA_2} = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad \frac{dW_3}{dA_3} = -\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (8.13)$$

Sin embargo, esto no implica una falta de integrabilidad para un funcional conjunto. En efecto, a partir de (8.11) se obtiene

$$\frac{\partial B_i}{\partial A_j} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}. \quad (8.14)$$

La matriz (8.14) es simétrica, por lo que se verifica explícitamente

$$\frac{\partial B_i}{\partial A_j} = \frac{\partial B_j}{\partial A_i}. \quad (8.15)$$

Por tanto, existe un funcional global $W_{\text{tot}}(A_1, A_2, A_3)$ tal que

$$B_i = \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i}. \quad (8.16)$$

Integrando, se obtiene

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2} + C, \quad (8.17)$$

donde C es una constante independiente de los coeficientes A_i . En lo que sigue tomaremos $C = 0$, ya que una constante aditiva no modifica las condiciones de borde.

En consecuencia, la estructura asintótica de la solución general del modelo STU no requiere abandonar la condición de integrabilidad, sino generalizarla desde una descripción en términos de tres funcionales independientes a un único funcional conjunto de los tres modos dominantes,

$$\boxed{W_{\text{tot}}(A_1, A_2, A_3) = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}}. \quad (8.18)$$

Este resultado determina la estructura funcional de las condiciones de borde. En la sección siguiente se construirá una realización local de este funcional mediante un contratérmino cúbico y se analizará su compatibilidad con el principio variacional.

8.2 Construcción del Contratérmino Mixto

La estructura de las condiciones de borde obtenida en la sección anterior está gobernada por el funcional conjunto

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}. \quad (8.19)$$

En esta sección construiremos una realización local de dicho funcional mediante un contratérmino definido directamente sobre la superficie de corte y analizaremos su compatibilidad con el principio variacional.

8.2.1 Representación local mediante un contratérmino cúbico

El funcional W_{tot} está definido en términos de los coeficientes asintóticos A_i . Sin embargo, un contratérmino holográfico debe formularse directamente como un funcional local

y covariante de los campos inducidos sobre la superficie de corte. Para relacionar ambas descripciones consideramos los desarrollos asintóticos

$$\phi_i = \frac{A_i}{r} + \frac{B_i}{r^2} + O(r^{-3}). \quad (8.20)$$

De esta forma, el producto de los tres campos escalares se comporta como

$$\phi_1\phi_2\phi_3 = \frac{A_1A_2A_3}{r^3} + O(r^{-4}). \quad (8.21)$$

Por otra parte, para una superficie de radio constante en un espacio asintóticamente AdS_4 , la métrica inducida satisface

$$\sqrt{-h} \sim \frac{r^3}{l} \sqrt{-h_{(0)}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (8.22)$$

donde $h_{(0)}$ representa la métrica inducida en el borde conforme.

Combinando (8.21) y (8.22), se observa que

$$\sqrt{-h} \phi_1\phi_2\phi_3 \sim \frac{1}{l} \sqrt{-h_{(0)}} A_1A_2A_3 + O(r^{-1}). \quad (8.23)$$

Por consiguiente, una interacción cúbica local entre los tres campos escalares produce una contribución finita en el límite asintótico. Esto permite representar localmente la estructura del funcional (8.18) mediante un término de borde que acopla directamente los tres campos.

La estructura general del contratérmino escalar puede escribirse como

$$I_\phi = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{2l} \sum_{i=1}^3 \phi_i^2 + I_{\text{mix}}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \right]. \quad (8.24)$$

De acuerdo con la estructura del funcional (8.18), la realización local correspondiente está dada por un término cúbico entre los tres campos,

$$I_{\text{mix}} = -\frac{1}{2l} \phi_1\phi_2\phi_3. \quad (8.25)$$

Por tanto, el contratérmino escalar completo adopta la forma

$$I_\phi = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{2l} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) - \frac{1}{2l} \phi_1\phi_2\phi_3 \right]. \quad (8.26)$$

La identificación precisa entre la normalización del término cúbico y el funcional W_{tot} debe realizarse conjuntamente con las convenciones globales adoptadas para la acción y para los desarrollos asintóticos. En particular, utilizando (8.21), la contribución finita del término mixto queda directamente relacionada con el producto $A_1 A_2 A_3$.

Es importante enfatizar que W_{tot} y el término local $\phi_1 \phi_2 \phi_3$ desempeñan papeles conceptualmente distintos. El primero codifica las condiciones de borde mixtas en términos de los coeficientes asintóticos, mientras que el segundo proporciona una realización local de esta estructura sobre la superficie de corte. La conexión entre ambos se establece mediante el límite asintótico de la acción renormalizada.

8.2.2 Principio variacional

La introducción del término mixto no sólo debe cancelar correctamente las contribuciones finitas asociadas a los campos escalares, sino que debe ser compatible con un principio variacional bien definido.

Para comprender el origen de las condiciones de borde, consideremos esquemáticamente la variación de la parte escalar de la acción bulk. Al variar el término cinético e integrar por partes se obtiene una contribución de frontera proporcional al momento canónico radial de cada campo escalar,

$$\delta I_{\text{bulk}}^{(\phi)} \sim - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial \mathcal{M}} d^3 x \sqrt{-h} n^\mu \partial_\mu \phi_i \delta \phi_i, \quad (8.27)$$

donde se han utilizado las ecuaciones de movimiento para eliminar las contribuciones de volumen.

Después de añadir los contratérminos necesarios para cancelar las divergencias y utilizar las ecuaciones de movimiento, la variación renormalizada queda determinada por el momento canónico radial y adopta, en términos de los datos asintóticos, una estructura finita proporcional a

$$\delta I_{\text{ren}}^{(0,\phi)} \sim \int_{\partial \mathcal{M}} d^3 x \sqrt{-h_{(0)}} \sum_{i=1}^3 B_i \delta A_i. \quad (8.28)$$

La condición de borde mixta se implementa añadiendo un término finito cuya dependencia asintótica está determinada por W_{tot} . Su variación produce

$$\delta W_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i} \delta A_i. \quad (8.29)$$

Por tanto, con la elección apropiada del término finito de borde, la variación total de la parte escalar adopta la estructura

$$\delta I_{\text{ren}}^{(\phi)} \sim \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h_{(0)}} \sum_{i=1}^3 \left(B_i - \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i} \right) \delta A_i. \quad (8.30)$$

Bajo las condiciones de borde mixtas

$$B_i = \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i}, \quad (8.31)$$

la contribución escalar a la variación de la acción renormalizada se anula,

$$\delta I_{\text{ren}}^{(\phi)} = 0. \quad (8.32)$$

Para el funcional (8.18), esta condición se verifica explícitamente,

$$\frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_1} = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_2} = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_3} = -\frac{A_1 A_2}{2}, \quad (8.33)$$

que coincide exactamente con las relaciones asintóticas obtenidas para B_1 , B_2 y B_3 .

De este modo, el funcional

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2} \quad (8.34)$$

proporciona una formulación integrada de las condiciones de borde de los tres campos escalares.

Aunque formalmente puede escribirse

$$W_{\text{tot}} = W_1 + W_2 + W_3, \quad W_1 = W_2 = W_3 = -\frac{A_1 A_2 A_3}{6}, \quad (8.35)$$

esta descomposición es puramente algebraica y no corresponde a tres condiciones de borde independientes, ya que cada W_i depende de los tres coeficientes A_1 , A_2 y A_3 . La condición variacional está determinada por el funcional conjunto W_{tot} .

La construcción presentada establece la estructura del contratérmino mixto y su relación con las condiciones de borde de los tres campos escalares. En las secciones siguientes aplicaremos esta construcción directamente a la teoría y a la solución general del modelo STU. En particular, evaluaremos la acción regularizada sobre la solución, analizaremos la contribución del contratérmino mixto a la acción euclidiana y mostraremos cómo la energía libre y las relaciones termodinámicas se recuperan dentro de este esquema. Posteriormente, verificaremos de manera independiente la energía mediante el tensor cuasilocal de Brown–York y discutiremos explícitamente la primera ley de la termodinámica para las variaciones permitidas de los parámetros de la solución.

8.3 Aplicación a la Solución General del Modelo STU

Aplicaremos ahora la construcción anterior a la solución general del modelo STU. El objetivo es evaluar la acción euclidiana regularizada y verificar que la energía obtenida es consistente con el tensor de Brown–York y con la primera ley de la termodinámica.

8.3.1 Datos termodinámicos de la solución

Recordemos que la solución general está determinada por

$$f(\rho) = 1 - \frac{\eta}{\rho} + \frac{\rho^2}{l^2} \prod_{i=1}^4 H_i, \quad H_i = 1 + \frac{q_i}{\rho}. \quad (8.36)$$

El horizonte exterior ρ_+ está definido por

$$f(\rho_+) = 0. \quad (8.37)$$

Las cargas eléctricas vienen dadas por

$$Q_i = \frac{1}{4} \sqrt{q_i(q_i + \eta)}, \quad (8.38)$$

mientras que los potenciales eléctricos, en un gauge regular en el horizonte, son

$$\Phi_i = \frac{4Q_i}{\rho_+ + q_i}. \quad (8.39)$$

La entropía de Bekenstein–Hawking es

$$S = \pi \rho_+^2 \sqrt{\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}, \quad (8.40)$$

y la temperatura está dada por

$$T = \frac{f'(\rho_+)}{4\pi \sqrt{\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}}. \quad (8.41)$$

En lo que sigue trabajaremos inicialmente en el ensamble gran canónico, en el cual los potenciales eléctricos Φ_i se mantienen fijos en el borde. En este caso, la acción euclidiana regularizada se relaciona con la energía libre de Gibbs mediante

$$I^E = \beta F, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad (8.42)$$

donde

$$F = E - TS - \sum_{i=1}^4 Q_i \Phi_i. \quad (8.43)$$

8.3.2 Contratérmino escalar para la solución STU

La estructura obtenida en la sección anterior conduce al contratérmino escalar

$$I_\phi = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{2l} \sum_{i=1}^3 \phi_i^2 - \frac{1}{2l} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \right]. \quad (8.44)$$

El primer término corresponde a la contribución cuadrática necesaria para cancelar las divergencias asociadas a los tres campos escalares. El segundo término es finito en el límite asintótico y representa localmente la estructura de acoplamiento contenida en el funcional

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}. \quad (8.45)$$

En efecto, utilizando los desarrollos asintóticos

$$\phi_i = \frac{A_i}{r} + \frac{B_i}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (8.46)$$

se obtiene

$$\phi_1 \phi_2 \phi_3 = \frac{A_1 A_2 A_3}{r^3} + O(r^{-4}). \quad (8.47)$$

Por otra parte, la métrica inducida sobre una superficie de radio constante satisface

$$\sqrt{-h} = \frac{r^3}{l} \sqrt{-h_{(0)}} + O(r). \quad (8.48)$$

Por tanto,

$$\sqrt{-h} \phi_1 \phi_2 \phi_3 = \frac{1}{l} \sqrt{-h_{(0)}} A_1 A_2 A_3 + O(r^{-1}), \quad (8.49)$$

de modo que el término cúbico produce una contribución finita proporcional al producto de los tres coeficientes dominantes.

La acción regularizada puede escribirse entonces como

$$I_{\text{ren}} = I_{\text{bulk}} + I_{GH} + I_G + I_\phi, \quad (8.50)$$

donde

$$I_G = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{2}{l} + \frac{l}{2} \mathcal{R} \right), \quad (8.51)$$

con las convenciones correspondientes para la orientación de la normal y el término de Gibbons–Hawking.

8.3.3 Evaluación de la acción euclidiana

Evalúamos ahora la acción euclidiana sobre la solución general del modelo STU. La suma de la acción bulk, el término de Gibbons–Hawking y los contratérminos gravitacionales produce, antes de incorporar completamente las contribuciones escalares, una expresión de la forma

$$\begin{aligned} I_{\text{bulk}}^E + I_{GH}^E + I_G^E = & -\frac{1}{T} \left(\sum_{i=1}^4 Q_i \Phi_i + TS \right) \\ & + \frac{1}{4T} \left[4 \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) - \frac{r \vec{A} \cdot \vec{A}}{2l^2} - \frac{4 \vec{A} \cdot \vec{B}}{3l^2} + O(r^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (8.52)$$

La contribución cuadrática de los escalares cancela la divergencia lineal restante. Por otra parte, el término cúbico introduce la contribución finita asociada al funcional mixto W_{tot} . La contribución total del sector escalar adopta entonces la estructura

$$\begin{aligned} I_\phi^E = \frac{1}{4T} \left[\frac{r \vec{A} \cdot \vec{A}}{2l^2} - 2 \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) \right. \\ \left. + \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{l^2} + W_{\text{tot}} + O(r^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (8.53)$$

donde la normalización del último término debe entenderse de acuerdo con las convenciones globales de la acción y con la definición del funcional finito de borde.

Al sumar las distintas contribuciones, las divergencias se cancelan y la acción euclidiana regularizada toma la forma

$$I^E = \beta \left[E - \sum_{i=1}^4 Q_i \Phi_i - TS \right], \quad (8.54)$$

con

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) + \frac{1}{4l^2} \left(W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} \right). \quad (8.55)$$

La contribución finita asociada a los campos escalares puede simplificarse utilizando las condiciones de borde obtenidas para la solución.

8.3.4 Cancelación de la contribución escalar finita

Para la solución general del modelo STU se tiene

$$B_1 = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad B_2 = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad B_3 = -\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (8.56)$$

Por tanto,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = -\frac{3}{2} A_1 A_2 A_3. \quad (8.57)$$

Por otra parte,

$$W_{\text{tot}} = -\frac{1}{2} A_1 A_2 A_3. \quad (8.58)$$

En consecuencia,

$$W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} = -\frac{1}{2} A_1 A_2 A_3 + \frac{1}{2} A_1 A_2 A_3 = 0. \quad (8.59)$$

La energía se reduce entonces a

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (8.60)$$

Por tanto, la acción euclidiana regularizada queda

$$I^E = \beta F, \quad (8.61)$$

con

$$F = E - TS - \sum_{i=1}^4 Q_i \Phi_i. \quad (8.62)$$

De este modo, el funcional mixto asociado a las condiciones de borde de los tres campos escalares elimina la contribución finita adicional que aparecería en la energía y permite recuperar la estructura termodinámica esperada para la solución general.

8.3.5 Comparación con el formalismo de superpotencial

Una vez determinada la estructura del contratérmino mixto a partir de las condiciones de borde de la solución general del modelo STU, resulta natural comparar el resultado con la construcción de contratérminos basada en el formalismo de Hamilton–Jacobi. Este procedimiento permite obtener los términos de borde a partir de una función de tipo superpotencial asociada al potencial escalar de la teoría [72]. Un tratamiento relacionado de la masa mediante el tensor de energía–momento de frontera y contratérminos finitos fue desarrollado por Liu y Sabra [73].

En el formalismo de Hamilton–Jacobi, el contratérmino asociado al sector gravitacional y escalar puede escribirse como

$$I_{\text{ct}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left[\mathcal{W}(\phi) + \frac{l}{2} \mathcal{R} \right]. \quad (8.63)$$

La función $\mathcal{W}(\phi)$ está determinada por el potencial escalar mediante una ecuación de superpotencial. Con las convenciones utilizadas en esta tesis, definimos

$$(\partial\mathcal{W})^2 \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\phi_i} \right)^2, \quad (8.64)$$

de modo que la relación entre el potencial y el superpotencial toma la forma

$$V = 2(\partial\mathcal{W})^2 - \frac{3}{2}\mathcal{W}^2. \quad (8.65)$$

Para el modelo STU considerado en esta tesis, el superpotencial adopta la forma

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2l} \sum_{i=1}^4 X_i. \quad (8.66)$$

Los campos X_i están relacionados con los campos escalares ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mediante la parametrización empleada en los capítulos anteriores. Al expandir (8.66) cerca del borde se obtiene

$$\mathcal{W} = \frac{2}{l} + \frac{\vec{A} \cdot \vec{A}}{4lr^2} + \frac{1}{4lr^3} \left(2\vec{A} \cdot \vec{B} - A_1 A_2 A_3 \right) + O(r^{-4}), \quad (8.67)$$

donde

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i^2, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i. \quad (8.68)$$

Esta expansión permite evaluar la contribución del contratérmino obtenido mediante el formalismo de Hamilton–Jacobi sobre la solución general. Después de combinar dicha contribución con las restantes partes de la acción euclidiana, se obtiene

$$I_{\text{HJ}}^E = \frac{1}{4T} \left[\frac{4r^3}{l^2} + 2r + \frac{r\vec{A} \cdot \vec{A}}{2l^2} - 2 \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) + \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{l^2} - \frac{A_1 A_2 A_3}{2l^2} \right] + O(r^{-1}). \quad (8.69)$$

Al combinar esta expresión con las restantes contribuciones de la acción regularizada, la energía obtenida mediante esta prescripción puede escribirse como

$$E_{\text{HJ}} = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) + \frac{1}{4l^2} \left(-\frac{A_1 A_2 A_3}{2} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} \right). \quad (8.70)$$

Las relaciones entre los coeficientes asintóticos de la solución general del modelo STU son

$$B_1 = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad B_2 = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad B_3 = -\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (8.71)$$

Por consiguiente,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{3}{2} A_1 A_2 A_3, \quad (8.72)$$

y, por tanto,

$$-\frac{A_1 A_2 A_3}{2} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} = 0. \quad (8.73)$$

La expresión (8.70) se reduce entonces a

$$E_{\text{HJ}} = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (8.74)$$

Por otro lado, el procedimiento desarrollado en este trabajo parte de las condiciones de integrabilidad de los modos asintóticos y conduce al funcional conjunto

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}. \quad (8.75)$$

Es importante distinguir este funcional del superpotencial $\mathcal{W}$ introducido anteriormente. El primero es un funcional de los coeficientes asintóticos dominantes (A_1, A_2, A_3) y codifica las condiciones de borde mixtas de los tres campos escalares. En cambio, $\mathcal{W}(\phi)$ es una función de los campos escalares de la teoría que aparece en la construcción Hamilton–Jacobi y está determinada por el potencial escalar mediante (8.65). Por tanto, aunque ambos objetos intervienen en la construcción de términos de borde y sus evaluaciones sobre la solución están relacionadas, no constituyen el mismo funcional.

La energía obtenida mediante nuestro contratérmino mixto puede escribirse como

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) + \frac{1}{4l^2} \left(W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} \right). \quad (8.76)$$

Utilizando

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{3}{2} A_1 A_2 A_3, \quad (8.77)$$

se obtiene

$$W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} = 0, \quad (8.78)$$

y, por tanto,

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) = E_{\text{HJ}}. \quad (8.79)$$

La coincidencia entre ambas expresiones para la energía puede apreciarse directamente a partir de las relaciones entre los modos asintóticos. En el formalismo de Hamilton–Jacobi, la expansión del superpotencial $\mathcal{W}$ contiene la combinación

$$2\vec{A} \cdot \vec{B} - A_1 A_2 A_3, \quad (8.80)$$

mientras que en la construcción desarrollada en este trabajo la dependencia finita de las condiciones de borde queda codificada mediante

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}. \quad (8.81)$$

Además, la estructura obtenida para los modos subdominantes permite escribir

$$W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2} = W_{\text{tot}}, \quad (8.82)$$

donde cada W_i depende de los tres coeficientes A_j . Esta descomposición es únicamente algebraica y no representa tres condiciones de borde independientes.

En consecuencia, ambos procedimientos conducen a la misma expresión para la energía cuando son evaluados sobre la solución general del modelo STU,

$$E = E_{\text{HJ}} = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (8.83)$$

Esta coincidencia proporciona una comprobación de la consistencia on-shell de la construcción del contratérmino mixto. La verificación independiente mediante el tensor cuasilocal de Brown–York permitirá comprobar a continuación que la misma expresión para la energía se obtiene directamente a partir de las cargas conservadas asociadas a la acción renormalizada.

8.3.6 Verificación mediante el tensor de Brown–York

La consistencia de la energía obtenida a partir de la acción euclidiana puede verificarse de manera independiente mediante el tensor cuasilocal de Brown–York. Éste se define como

$$\tau_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{\text{ren}}}{\delta h^{ab}}. \quad (8.84)$$

A partir de la acción regularizada, el tensor toma esquemáticamente la forma

$$\begin{aligned} \tau_{ab} = -\frac{1}{8\pi} \left[K_{ab} - \left(K - \frac{2}{l} \right) h_{ab} - l G_{ab} \right. \\ \left. - \frac{h_{ab}}{2l} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \phi_i^2 - \frac{1}{2} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \right) \right], \end{aligned} \quad (8.85)$$

donde nuevamente la expresión exacta depende de las convenciones adoptadas para los signos de los contratérminos.

La carga asociada al vector de Killing temporal $\xi = \partial_t$ es

$$E = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (8.86)$$

Al evaluar esta expresión sobre la solución general se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) + \frac{1}{4l^2} \left(W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} \right). \quad (8.87)$$

Utilizando

$$W_{\text{tot}} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{3} = 0, \quad (8.88)$$

se recupera nuevamente

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (8.89)$$

La coincidencia entre la energía obtenida mediante la acción euclidiana y la carga de Brown–York proporciona una verificación independiente de la consistencia del esquema de regularización.

8.3.7 Primera ley de la termodinámica

Finalmente, verificamos explícitamente que la energía obtenida a partir de la acción renormalizada satisface la primera ley de la termodinámica. Para ello, utilizamos la ecuación que determina la posición del horizonte,

$$f(\rho_+) = 0, \quad (8.90)$$

para eliminar el parámetro η y expresarlo en términos del radio del horizonte y de los parámetros q_i .

A partir de

$$f(\rho) = 1 - \frac{\eta}{\rho} + \frac{\rho^2}{l^2} \prod_{i=1}^4 \left(1 + \frac{q_i}{\rho} \right), \quad (8.91)$$

la condición $f(\rho_+) = 0$ permite escribir

$$\eta = \rho_+ + \frac{1}{l^2 \rho_+} \prod_{i=1}^4 (\rho_+ + q_i). \quad (8.92)$$

Equivalentemente, desarrollando el producto,

$$\begin{aligned} \eta = \rho_+ + \frac{\rho_+^3}{l^2} + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\rho_+^2}{l^2} \\ + \frac{(q_2 + q_3 + q_4)q_1 + (q_3 + q_4)q_2 + q_3q_4}{l^2} \rho_+ \\ + \frac{[(q_3 + q_4)q_2 + q_3q_4]q_1 + q_2q_3q_4}{l^2} + \frac{q_1q_2q_3q_4}{l^2 \rho_+}. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Una vez realizada esta sustitución, las variables independientes pueden tomarse como

$$(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4). \quad (8.94)$$

En particular, la energía pasa a ser una función de estas cinco variables,

$$E = E(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4), \quad (8.95)$$

con

$$E = \frac{1}{2} \left[\eta(\rho_+, q_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right]. \quad (8.96)$$

Es importante notar que esta sustitución también modifica la dependencia de las cargas eléctricas. Originalmente,

$$Q_i = \frac{1}{4} \sqrt{q_i(q_i + \eta)}, \quad (8.97)$$

por lo que, al utilizar (8.92), cada carga debe considerarse como una función de las mismas cinco variables independientes,

$$Q_i = Q_i(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4). \quad (8.98)$$

En efecto, aunque Q_i depende explícitamente de q_i , también depende de ρ_+ y de los cuatro parámetros q_j a través de $\eta(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4)$. Por ejemplo,

$$Q_2 = \frac{1}{4} \sqrt{q_2 [q_2 + \eta(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4)]}, \quad (8.99)$$

y análogamente para Q_1 , Q_3 y Q_4 .

La primera ley,

$$dE = TdS + \sum_{i=1}^4 \Phi_i dQ_i, \quad (8.100)$$

puede entonces verificarse directamente mediante las derivadas parciales respecto de las cinco variables independientes. En efecto, al escribir

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \rho_+} d\rho_+ + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial E}{\partial q_j} dq_j, \quad (8.101)$$

y de manera análoga para S y cada una de las cargas Q_i , la ecuación (8.100) es equivalente a las cinco relaciones independientes

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial \rho_+} = T \frac{\partial S}{\partial \rho_+} + \sum_{i=1}^4 \Phi_i \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_+}}. \quad (8.102)$$

Para cada uno de los parámetros q_j se obtiene, respectivamente,

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial q_1} = T \frac{\partial S}{\partial q_1} + \sum_{i=1}^4 \Phi_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_1}}, \quad (8.103)$$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial q_2} = T \frac{\partial S}{\partial q_2} + \sum_{i=1}^4 \Phi_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_2}}, \quad (8.104)$$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial q_3} = T \frac{\partial S}{\partial q_3} + \sum_{i=1}^4 \Phi_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_3}}, \quad (8.105)$$

y

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial q_4} = T \frac{\partial S}{\partial q_4} + \sum_{i=1}^4 \Phi_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_4}}. \quad (8.106)$$

De esta forma, las contribuciones de todas las cargas aparecen en cada una de las cinco relaciones. Esto es necesario porque, después de eliminar η mediante la ecuación del horizonte, cada Q_i depende de ρ_+ y de todos los q_j a través de $\eta(\rho_+, q_1, q_2, q_3, q_4)$.

Por tanto, la energía

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right) \quad (8.107)$$

es consistente con la acción euclidiana regularizada, con la carga obtenida mediante el tensor de Brown–York y con la primera ley de la termodinámica.

En conjunto, esta verificación proporciona una comprobación adicional de la consistencia termodinámica de la solución general del modelo STU. La construcción del contratérmino mixto conduce a una energía que, además de ser finita y coincidir con la obtenida mediante el tensor de Brown–York, satisface la primera ley para las variaciones permitidas de todos los parámetros independientes de la solución.

Capítulo 9

Fórmula de Cardy–Verlinde

La correspondencia AdS/CFT establece una relación profunda entre la dinámica gravitacional en espacios Anti-de Sitter y teorías conformes de campos definidas sobre el borde del espacio-tiempo [11, 40, 36]. Una de las consecuencias más interesantes de esta dualidad es la posibilidad de describir la termodinámica de agujeros negros asintóticamente AdS en términos de cantidades características de la teoría conforme dual.

En dos dimensiones, Cardy obtuvo una expresión para la densidad asintótica de estados de una teoría conforme, relacionando la entropía con la energía y la carga central de la teoría [74]. Motivado por la correspondencia AdS/CFT, Verlinde propuso una generalización de esta relación para teorías conformes de dimensión arbitraria definidas sobre un espacio compacto [75]. En esta formulación, la entropía puede expresarse en función de la energía total y de la energía de Casimir, obteniéndose la denominada fórmula de Cardy–Verlinde. Esta relación ha sido estudiada en numerosos contextos, incluyendo agujeros negros cargados, rotantes y con distintas topologías de horizonte [76, 22, 20, 21, 77, 78].

En este capítulo revisaremos la derivación de esta fórmula a partir de las propiedades de homogeneidad de la energía en una teoría conforme de campos. Posteriormente estudiaremos su aplicación a las distintas soluciones de agujeros negros con pelo escalar analizadas en esta tesis y mostraremos cómo la estructura holográfica de la energía y del tensor de energía–momento determina la validez de la fórmula en las familias de soluciones consideradas.

9.1 Derivación de la fórmula de Cardy–Verlinde

La derivación de la fórmula de Cardy–Verlinde se basa en las propiedades de homogeneidad de la energía para sistemas termodinámicos extensivos [75]. En termodinámica clásica, la entropía S y la energía E son cantidades extensivas. En consecuencia, para un sistema contenido en un volumen finito V , la energía puede escribirse como una función de estado

$$E = E(S, V),$$

la cual satisface la propiedad de homogeneidad de primer grado

$$E(\lambda S, \lambda V) = \lambda E(S, V), \quad (9.1)$$

donde λ es un parámetro de escala.

Derivando esta expresión con respecto a λ , se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial(\lambda S)} \frac{\partial(\lambda S)}{\partial \lambda} + \frac{\partial E}{\partial(\lambda V)} \frac{\partial(\lambda V)}{\partial \lambda} = E(S, V). \quad (9.2)$$

Evalutando en $\lambda = 1$,

$$E = S \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V + V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S. \quad (9.3)$$

Finalmente, utilizando la primera ley de la termodinámica,

$$dE = TdS - PdV,$$

se obtiene la relación de Euler

$$E = TS - PV. \quad (9.4)$$

En una teoría conforme de campos definida sobre un espacio compacto, la energía presenta además una contribución subextensiva asociada al tamaño finito del sistema [75, 79]. Esta contribución se caracteriza mediante la denominada energía de Casimir. En consecuencia, la energía puede descomponerse como

$$E(S, V) = E_E(S, V) + \frac{1}{2}E_C(S, V), \quad (9.5)$$

donde E_E representa la parte extensiva de la energía y E_C la contribución de Casimir.

La componente extensiva satisface una ley de homogeneidad de primer grado,

$$E_E(\lambda S, \lambda V) = \lambda E_E(S, V), \quad (9.6)$$

mientras que la energía de Casimir escala como

$$E_C(\lambda S, \lambda V) = \lambda^{1-\frac{2}{n}} E_C(S, V), \quad (9.7)$$

siendo n la dimensión espacial de la teoría conforme.

La energía total satisface entonces

$$E(\lambda S, \lambda V) = \lambda E_E(S, V) + \frac{1}{2} \lambda^{1-\frac{2}{n}} E_C(S, V). \quad (9.8)$$

Derivando respecto de λ y evaluando en $\lambda = 1$, se obtiene

$$S \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V + V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S = E_E + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n} \right) E_C. \quad (9.9)$$

Combinando esta expresión con la primera ley de la termodinámica,

$$dE = TdS - PdV,$$

resulta

$$TS - PV = E_E + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n} \right) E_C. \quad (9.10)$$

Utilizando

$$E = E_E + \frac{1}{2} E_C,$$

se obtiene finalmente

$$E_C = n(E + PV - TS). \quad (9.11)$$

Para el caso de una teoría conforme definida sobre una esfera de radio R , las propiedades de homogeneidad y dimensionalidad permiten parametrizar las contribuciones extensiva y subextensiva como [75]

$$E_E = \frac{a}{4\pi R} S^{1+\frac{1}{n}}, \quad E_C = \frac{b}{2\pi R} S^{1-\frac{1}{n}}, \quad (9.12)$$

donde a y b son constantes independientes de R y S .

A partir de

$$E = E_E + \frac{1}{2}E_C,$$

se tiene

$$E = \frac{a}{4\pi R} S^{1+\frac{1}{n}} + \frac{b}{4\pi R} S^{1-\frac{1}{n}}. \quad (9.13)$$

Multiplicando por $4\pi R$ y definiendo

$$x = S^{1/n},$$

resulta

$$4\pi R E = ax^{n+1} + bx^{n-1}. \quad (9.14)$$

Para las soluciones consideradas en esta tesis, correspondientes a una teoría conforme de dimensión espacial $n = 2$, las expresiones anteriores se reducen a

$$E_E = \frac{a}{4\pi R} S^{3/2}, \quad E_C = \frac{b}{2\pi R} S^{1/2}. \quad (9.15)$$

Eliminando a y b mediante la relación entre E_E , E_C y E , se obtiene

$$S = \frac{2\pi R}{\sqrt{ab}} \sqrt{E_C(2E - E_C)}. \quad (9.16)$$

En la normalización utilizada para una CFT definida sobre una esfera de dimensión espacial n , se adopta

$$\sqrt{ab} = n.$$

Por tanto, la fórmula de Cardy–Verlinde adopta la forma

$$\boxed{S = \frac{2\pi R}{n} \sqrt{E_C(2E - E_C)}}. \quad (9.17)$$

Para el caso $n = 2$ que corresponde a un espacio-tiempo bulk de cuatro dimensiones,

$$\boxed{S = \pi R \sqrt{E_C(2E - E_C)}}. \quad (9.18)$$

Esta será la normalización utilizada en las aplicaciones desarrolladas en las secciones siguientes.

9.2 Ejemplo: Schwarzschild–AdS₅

Antes de considerar la presencia de cargas eléctricas y campos escalares, resulta conveniente ilustrar explícitamente cómo funciona la fórmula de Cardy–Verlinde en un ejemplo sin carga. Para ello consideraremos el agujero negro de Schwarzschild–AdS₅. Este caso permite, además, distinguir entre dos cantidades que aparecen naturalmente en el contexto holográfico: la energía de vacío de AdS₅ y la energía de Casimir E_C que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde.

La diferencia entre ambas cantidades es importante. La energía de vacío se obtiene holográficamente a partir del tensor de Brown–York renormalizado y corresponde a la energía del estado fundamental de la teoría conforme dual definida sobre $S^3 \times \mathbb{R}$. En cambio, E_C es una cantidad termodinámica que caracteriza la contribución subextensiva de un estado determinado de la teoría conforme y se obtiene a partir de la desviación de la relación de Euler. Como veremos, ambas cantidades están relacionadas con efectos de tamaño finito de la teoría dual, pero no deben identificarse.

9.2.1 Geometría y termodinámica

Consideremos la solución de Schwarzschild–AdS₅,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_3^2, \quad (9.19)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (9.20)$$

y

$$d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9.21)$$

Trabajaremos en unidades naturales y fijaremos

$$G_5 = 1. \quad (9.22)$$

El radio del horizonte r_+ está determinado por

$$f(r_+) = 0, \quad (9.23)$$

de donde

$$\mu = r_+^2 \left(1 + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (9.24)$$

La energía, temperatura y entropía del agujero negro son

$$E_{\text{BH}} = \frac{3\pi}{8} \mu, \quad (9.25)$$

$$T = \frac{1}{2\pi r_+} \left(1 + \frac{2r_+^2}{l^2} \right), \quad (9.26)$$

y

$$S = \frac{A_H}{4} = \frac{\pi^2}{2} r_+^3. \quad (9.27)$$

Utilizando (9.24), la energía puede expresarse como

$$E_{\text{BH}} = \frac{3\pi}{8} r_+^2 \left(1 + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (9.28)$$

Estas cantidades satisfacen la primera ley

$$dE_{\text{BH}} = T dS, \quad (9.29)$$

manteniendo fijo el radio de AdS.

9.2.2 Energía holográfica y energía de vacío

Para obtener la energía desde el punto de vista holográfico, consideramos la acción gravitacional renormalizada

$$I_{\text{ren}} = I_{\text{bulk}} + I_{\text{GH}} + I_{\text{ct}}, \quad (9.30)$$

con

$$I_{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \left(R + \frac{12}{l^2} \right), \quad (9.31)$$

$$I_{\text{GH}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-h} K, \quad (9.32)$$

y

$$I_{\text{ct}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-h} \left(\frac{3}{l} + \frac{l}{4} \mathcal{R}[h] \right). \quad (9.33)$$

El tensor de energía-momento cuasilocal de Brown–York renormalizado es

$$\tau_{ab} = \frac{1}{8\pi} \left[K_{ab} - K h_{ab} - \frac{3}{l} h_{ab} + \frac{l}{2} G_{ab}[h] \right]. \quad (9.34)$$

La energía asociada a las traslaciones temporales se obtiene integrando la densidad de energía cuasilocal sobre las secciones espaciales de la frontera,

$$E = \int_{S^3} d^3x \sqrt{\sigma} u^a u^b \tau_{ab}, \quad (9.35)$$

donde

$$\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2. \quad (9.36)$$

Al evaluar (9.34) y tomar el límite hacia la frontera se obtiene

$$E_{\text{bulk}}^{\text{tot}} = \frac{3\pi}{8}\mu + \frac{3\pi l^2}{32}. \quad (9.37)$$

El primer término corresponde a la energía del agujero negro,

$$E_{\text{BH}} = \frac{3\pi}{8}\mu, \quad (9.38)$$

mientras que el segundo permanece incluso cuando

$$\mu = 0. \quad (9.39)$$

Por tanto, podemos escribir

$$E_{\text{bulk}}^{\text{tot}} = E_{\text{BH}} + E_{\text{vac}}^{\text{bulk}}, \quad (9.40)$$

donde

$$E_{\text{vac}}^{\text{bulk}} = \frac{3\pi l^2}{32}. \quad (9.41)$$

Esta contribución corresponde a la energía de vacío de AdS_5 . Desde el punto de vista de la correspondencia AdS/CFT , representa la energía del estado fundamental de la teoría conforme dual.

9.2.3 Marco conforme y cantidades termodinámicas

Para interpretar estas cantidades como observables de la teoría conforme dual, debemos elegir un representante de la clase conforme de la métrica de frontera. En el límite asintótico,

$$ds_{\partial}^2 \sim -\frac{r^2}{l^2} dt^2 + r^2 d\Omega_3^2. \quad (9.42)$$

Elegimos como métrica de la CFT

$$ds_{\text{CFT}}^2 = -d\tau^2 + R^2 d\Omega_3^2, \quad (9.43)$$

donde R es el radio de la esfera espacial y

$$\tau = \frac{R}{l} t. \quad (9.44)$$

La energía y la temperatura se transforman entonces como

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} E_{\text{bulk}}, \quad T_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} T_{\text{bulk}}, \quad (9.45)$$

mientras que la entropía permanece invariante,

$$S_{\text{CFT}} = S_{\text{bulk}}. \quad (9.46)$$

El volumen espacial de la CFT es

$$V = 2\pi^2 R^3. \quad (9.47)$$

En particular, la energía total obtenida mediante Brown–York se transforma en

$$E_{\text{CFT}}^{\text{tot}} = \frac{3\pi l}{8R} \mu + \frac{3\pi l^3}{32R}. \quad (9.48)$$

Por tanto, la energía de vacío en el marco conforme es

$$\boxed{E_{\text{vac}}^{\text{CFT}} = \frac{3\pi l^3}{32R}}. \quad (9.49)$$

Por otro lado, la energía correspondiente al agujero negro sobre este marco conforme es

$$\boxed{E = E_{\text{BH}}^{\text{CFT}} = \frac{3\pi l}{8R} \mu}. \quad (9.50)$$

En lo que sigue utilizaremos esta energía del estado excitado para construir la relación termodinámica de Cardy–Verlinde, manteniendo separada la contribución correspondiente al vacío.

9.2.4 Extensividad y energía de Casimir

La teoría dual es una CFT_4 , por lo que posee $n = 3$ dimensiones espaciales. Utilizando (9.50), junto con

$$S = \frac{\pi^2}{2} r_+^3, \quad V = 2\pi^2 R^3, \quad (9.51)$$

podemos expresar la energía como función de S y V :

$$E(S, V) = \frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4\pi l} \frac{S^{4/3}}{V^{1/3}} + \frac{3 \cdot 2^{2/3} \pi^{1/3} l}{4} \frac{S^{2/3}}{V^{1/3}}. \quad (9.52)$$

Esta expresión permite identificar directamente las contribuciones extensiva y subextensiva,

$$E = E_E + E_{\text{sub}}, \quad (9.53)$$

con

$$E_E = \frac{3 \cdot 2^{2/3}}{4\pi l} \frac{S^{4/3}}{V^{1/3}}, \quad (9.54)$$

y

$$E_{\text{sub}} = \frac{3 \cdot 2^{2/3} \pi^{1/3} l}{4} \frac{S^{2/3}}{V^{1/3}}. \quad (9.55)$$

Bajo la transformación

$$S \rightarrow \lambda S, \quad V \rightarrow \lambda V, \quad (9.56)$$

se obtiene

$$E_E \rightarrow \lambda E_E, \quad (9.57)$$

mientras que

$$E_{\text{sub}} \rightarrow \lambda^{1/3} E_{\text{sub}}. \quad (9.58)$$

La primera contribución es, por tanto, extensiva, mientras que la segunda es subextensiva.

Para una CFT_4 , la invariancia conforme implica

$$T^a_a = 0, \quad (9.59)$$

y para un estado homogéneo e isótropo esto conduce a

$$P = \frac{E}{3V}. \quad (9.60)$$

La energía de Casimir de Verlinde se define entonces mediante

$$E_C = 3(E + PV - TS). \quad (9.61)$$

Al sustituir las cantidades termodinámicas de Schwarzschild–AdS₅ se obtiene

$$\boxed{E_C = \frac{3\pi l}{4R} r_+^2}. \quad (9.62)$$

Comparando con la contribución subextensiva encontramos

$$\boxed{E_C = 2E_{\text{sub}}}, \quad (9.63)$$

de modo que

$$\boxed{E = E_E + \frac{1}{2}E_C}. \quad (9.64)$$

Esto muestra explícitamente cómo la energía de Casimir de Verlinde aparece como la contribución subextensiva de la energía del estado térmico.

9.2.5 Energía de vacío versus energía de Casimir

El ejemplo anterior permite distinguir claramente las dos cantidades.

La energía de vacío de la teoría conforme,

$$E_{\text{vac}}^{\text{CFT}} = \frac{3\pi l^3}{32R}, \quad (9.65)$$

corresponde al estado fundamental dual al espacio global AdS₅. No depende del radio del horizonte y, por tanto, no depende del estado térmico del agujero negro.

En cambio, la energía de Casimir de Verlinde,

$$E_C = \frac{3\pi l}{4R} r_+^2, \quad (9.66)$$

depende explícitamente de r_+ . Por tanto, es una propiedad del estado termodinámico considerado y mide su contribución subextensiva.

En particular,

$$\boxed{E_{\text{vac}}^{\text{CFT}} \neq E_C} \quad (9.67)$$

en general.

Podemos resumir esta diferencia mediante

	$E_{\text{vac}}^{\text{CFT}}$	E_C
Interpretación	energía del estado fundamental	contribución subextensiva
Origen	Brown–York renormalizado	relación termodinámica
r_+ -dependencia	no	sí
Uso en Cardy–Verlinde	no directamente	sí

(9.68)

La denominación de ambas cantidades como energías de Casimir puede resultar confusa. En el contexto holográfico, la energía de vacío está asociada al estado fundamental de la CFT sobre un espacio compacto, mientras que E_C es la cantidad termodinámica que caracteriza la desviación de la extensividad del estado considerado.

9.2.6 Verificación de la fórmula de Cardy–Verlinde

Para $n = 3$, la fórmula de Cardy–Verlinde obtenida anteriormente adopta la forma

$$S = \frac{2\pi R}{3} \sqrt{E_C(2E - E_C)}. \quad (9.69)$$

Utilizando

$$E = \frac{3\pi l}{8R} r_+^2 \left(1 + \frac{r_+^2}{l^2} \right) \quad (9.70)$$

y

$$E_C = \frac{3\pi l}{4R} r_+^2, \quad (9.71)$$

obtenemos

$$2E - E_C = \frac{3\pi}{4lR} r_+^4. \quad (9.72)$$

Por tanto,

$$S = \frac{2\pi R}{3} \sqrt{\frac{3\pi l}{4R} r_+^2 \frac{3\pi}{4lR} r_+^4} \quad (9.73)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} r_+^3. \quad (9.74)$$

Finalmente,

$$\boxed{S = \frac{\pi^2}{2} r_+^3 = S_{\text{BH}}}. \quad (9.75)$$

La fórmula de Cardy–Verlinde reproduce así exactamente la entropía de Bekenstein–Hawking.

Este resultado proporciona un ejemplo explícito de la construcción presentada en la sección anterior: la energía contiene una parte extensiva y una parte subextensiva, esta última se identifica mediante E_C , y ambas permiten reconstruir la entropía gravitacional a través de la fórmula de Cardy–Verlinde.

Es importante destacar que la energía de vacío obtenida mediante renormalización holográfica no debe confundirse con E_C . La primera es una propiedad del estado fundamental de la teoría dual, mientras que la segunda es una cantidad termodinámica asociada al estado excitado descrito por el agujero negro.

Este ejemplo servirá como referencia para el análisis de agujeros negros cargados desarrollado a continuación. En presencia de carga eléctrica, la primera ley y la relación de Euler se modifican, y será necesario determinar qué contribución de la energía debe sustraerse para obtener la forma apropiada de la fórmula de Cardy–Verlinde.

9.3 Fórmula de Cardy–Verlinde con carga eléctrica

La derivación presentada en la sección anterior supone que el sistema termodinámico está caracterizado únicamente por la entropía y el volumen. Sin embargo, los agujeros negros cargados poseen además cargas eléctricas conservadas, por lo que la energía debe entenderse como una función de las variables extensivas

$$E = E(S, V, Q). \quad (9.76)$$

En este caso, la primera ley de la termodinámica adopta la forma

$$dE = TdS - PdV + \Phi dQ, \quad (9.77)$$

donde Φ representa el potencial eléctrico conjugado a la carga Q .

La propiedad de homogeneidad de la energía conduce a la relación de Euler

$$E = TS - PV + \Phi Q. \quad (9.78)$$

Al igual que en el caso neutro, una teoría conforme definida sobre un volumen finito presenta una contribución subextensiva asociada a la energía de Casimir. En consecuencia, la energía total puede descomponerse como

$$E(S, V, Q) = E_E(S, V, Q) + \frac{1}{2}E_C(S, V, Q). \quad (9.79)$$

Repetiendo la derivación realizada en la sección anterior se obtiene

$$E_C = n(E + PV - TS - \Phi Q). \quad (9.80)$$

Para las soluciones consideradas en este capítulo, $n = 2$, por lo que

$$E_C = 2(E + PV - TS - \Phi Q). \quad (9.81)$$

La presencia de una carga eléctrica modifica además la identificación de la energía extensiva que participa en la fórmula de Cardy–Verlinde. En particular, para los agujeros negros cargados resulta conveniente separar de la energía total la contribución asociada al campo electromagnético exterior al horizonte. Esta contribución será denotada por E_Q , de modo que la energía efectiva que participa en la relación de Cardy–Verlinde queda definida por

$$E_{\text{eff}} = E - E_Q. \quad (9.82)$$

La forma modificada de la relación de Cardy–Verlinde que utilizaremos para $n = 2$ es entonces

$$S = \pi R \sqrt{E_C [2(E - E_Q) - E_C]}. \quad (9.83)$$

Antes de estudiar las soluciones con pelo escalar analizadas en esta tesis, resulta conveniente considerar el agujero negro de Reissner–Nordström Anti–de Sitter, que constituye el ejemplo más sencillo donde esta modificación puede analizarse explícitamente.

9.3.1 Aplicación al agujero negro de Reissner–Nordström AdS

Antes de estudiar la influencia de los campos escalares sobre la fórmula de Cardy–Verlinde, resulta conveniente analizar el agujero negro de Reissner–Nordström Anti–de Sitter. Como fue mostrado originalmente por Cai [76], la presencia del campo electromagnético modifica la identificación de la energía extensiva que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde.

La solución de Reissner–Nordström Anti–de Sitter en cuatro dimensiones está descrita por la métrica [80]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad (9.84)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (9.85)$$

El potencial electromagnético y el tensor de Maxwell vienen dados por

$$A = -\frac{Q}{r}dt, \quad F = \frac{Q}{r^2}dr \wedge dt. \quad (9.86)$$

Las cantidades termodinámicas asociadas al agujero negro satisfacen la primera ley

$$dE = TdS + \Phi dQ,$$

y pueden escribirse como

$$E = \frac{1}{2} \left(r_+ + \frac{r_+^3}{l^2} + \frac{Q^2}{r_+} \right), \quad \Phi = \frac{Q}{r_+}, \quad S = \pi r_+^2, \quad (9.87)$$

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3r_+}{l^2} + \frac{1}{r_+} - \frac{Q^2}{r_+^3} \right), \quad (9.88)$$

donde r_+ corresponde al radio del horizonte de eventos determinado por la condición

$$f(r_+) = 0. \quad (9.89)$$

Para aplicar la fórmula de Cardy–Verlinde es necesario reinterpretar estas cantidades desde el punto de vista de la teoría conforme dual. El tensor de estrés holográfico se construye inicialmente sobre la frontera conforme del espacio Anti–de Sitter, cuya métrica puede escribirse asintóticamente como

$$h_{ab}dx^a dx^b = \frac{\rho^2}{l^2} (-dt^2 + l^2 d\Omega_2^2). \quad (9.90)$$

La teoría conforme que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde se define sobre una esfera de radio arbitrario R . Introduciendo la coordenada temporal

$$\tau = \frac{R}{l}t, \quad (9.91)$$

la métrica de frontera adopta la forma

$$\gamma_{ab}dx^a dx^b = -d\tau^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (9.92)$$

El tensor de energía-momento de la teoría conforme se obtiene mediante la transformación conforme correspondiente. Para las cantidades termodinámicas asociadas al vector de Killing temporal, esta transformación implica

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} E_{\text{bulk}}, \quad T_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} T_{\text{bulk}}, \quad \Phi_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} \Phi_{\text{bulk}}. \quad (9.93)$$

Por tanto,

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{2R} \left(r_+ + \frac{r_+^3}{l^2} + \frac{Q^2}{r_+} \right), \quad (9.94)$$

$$\Phi_{\text{CFT}} = \frac{Ql}{Rr_+}, \quad (9.95)$$

$$T_{\text{CFT}} = \frac{l}{4\pi R} \left(\frac{3r_+}{l^2} + \frac{1}{r_+} - \frac{Q^2}{r_+^3} \right). \quad (9.96)$$

La entropía y la carga permanecen invariantes bajo esta transformación,

$$S_{\text{CFT}} = S_{\text{bulk}}, \quad Q_{\text{CFT}} = Q_{\text{bulk}}. \quad (9.97)$$

Estas cantidades satisfacen la primera ley de la teoría conforme

$$dE_{\text{CFT}} = T_{\text{CFT}} dS - P dV + \Phi_{\text{CFT}} dQ, \quad (9.98)$$

donde el volumen espacial de la teoría conforme viene dado por

$$V = 4\pi R^2. \quad (9.99)$$

La presión puede obtenerse a partir del tensor de energía-momento holográfico. Para una teoría conforme de dimensión espacial $n = 2$, la ecuación de estado es

$$P = \frac{E_{\text{CFT}}}{2V}. \quad (9.100)$$

La energía de Casimir resulta entonces

$$E_C = 2 (E_{\text{CFT}} + PV - T_{\text{CFT}} S - \Phi_{\text{CFT}} Q), \quad (9.101)$$

y, utilizando las expresiones termodinámicas anteriores,

$$E_C = \frac{lr_+}{R}. \quad (9.102)$$

La aplicación directa de la fórmula de Cardy–Verlinde a la energía total conduce a

$$S = \pi R \sqrt{E_C(2E_{\text{CFT}} - E_C)}. \quad (9.103)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene

$$S = \pi \sqrt{Q^2 l^2 + r_+^4}, \quad (9.104)$$

que no reproduce la entropía de Bekenstein–Hawking,

$$S = \pi r_+^2. \quad (9.105)$$

La contribución que debe separarse de la energía total puede identificarse directamente a partir del campo electromagnético. Siguiendo [66], definimos

$$E_Q = \frac{l}{8\pi R} \int_{\Sigma_t} \xi_t^\mu T_{\mu\nu}^{EM} d\Sigma^\nu, \quad (9.106)$$

donde Σ_t representa una hipersuperficie espacial de tiempo constante, ξ_t^μ es el vector de Killing asociado a las traslaciones temporales y $T_{\mu\nu}^{EM}$ es el tensor energía–momento del campo electromagnético.

Equivalentemente,

$$E_Q = \frac{l}{8\pi R} \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\Sigma} \xi_t^\mu n_t^\nu T_{\mu\nu}^{EM}. \quad (9.107)$$

Al evaluar esta cantidad para la solución de Reissner–Nordström Anti-de Sitter se obtiene

$$E_Q = \frac{\Phi_{\text{CFT}} Q}{2}. \quad (9.108)$$

Esta contribución corresponde a la energía electromagnética asociada a la región exterior al horizonte y coincide con la energía máxima extraíble del agujero negro cargado [81, 66]. En consecuencia, definimos la energía efectiva mediante

$$E_{\text{eff}} = E_{\text{CFT}} - E_Q. \quad (9.109)$$

La fórmula de Cardy–Verlinde adopta entonces la forma

$$S = \pi R \sqrt{E_C [2(E_{\text{CFT}} - E_Q) - E_C]}. \quad (9.110)$$

Utilizando

$$E_Q = \frac{\Phi_{\text{CFT}} Q}{2} = \frac{Q^2 l}{2Rr_+}, \quad (9.111)$$

junto con

$$E_C = \frac{lr_+}{R}, \quad (9.112)$$

se obtiene

$$2(E_{\text{CFT}} - E_Q) - E_C = \frac{r_+^3}{lR}. \quad (9.113)$$

Por tanto,

$$S = \pi R \sqrt{\frac{lr_+ r_+^3}{R lR}} = \pi r_+^2, \quad (9.114)$$

recuperando exactamente la entropía de Bekenstein–Hawking.

La presencia de carga eléctrica modifica así la identificación de la energía extensiva que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde. La contribución electromagnética exterior al horizonte queda contenida en E_Q , mientras que la energía efectiva

$$E_{\text{eff}} = E_{\text{CFT}} - E_Q \quad (9.115)$$

es la que participa en la relación de Cardy–Verlinde. Esta cantidad coincide con la energía restante después de separar la contribución electromagnética extraíble del agujero negro [66, 81].

9.4 Interpretación holográfica de la presión

Hasta este punto, la presión que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde se ha introducido mediante la primera ley de la termodinámica de la teoría conforme dual,

$$dE = TdS - PdV + \Phi dQ, \quad (9.116)$$

junto con la ecuación de estado característica de una teoría conforme,

$$P = \frac{E}{nV}. \quad (9.117)$$

Esta relación permite escribir la energía de Casimir como

$$E_C = n(E + PV - TS - \Phi Q). \quad (9.118)$$

Dentro del marco de la correspondencia AdS/CFT, la presión puede obtenerse directamente a partir del tensor energía-momento holográfico construido mediante el procedimiento de Brown–York. Como se mostró en [66], este tensor puede interpretarse como el tensor energía-momento de la teoría conforme dual.

El tensor de Brown–York renormalizado puede escribirse en términos de un fluido perfecto,

$$\tau_{ab}^{CV} = (\epsilon + P)u_a u_b + P\gamma_{ab}, \quad (9.119)$$

donde ϵ representa la densidad de energía, P la presión, u_a el cuadrivector velocidad y γ_{ab} la métrica inducida sobre el borde.

Para el agujero negro de Reissner–Nordström Anti-de Sitter, la componente temporal permite identificar

$$\epsilon = \frac{E_{\text{CFT}}}{V}, \quad (9.120)$$

mientras que las componentes espaciales conducen a

$$P = \frac{E_{\text{CFT}}}{2V}. \quad (9.121)$$

Este resultado coincide con la ecuación de estado conforme

$$P = \frac{E_{\text{CFT}}}{nV}, \quad n = 2. \quad (9.122)$$

La presión que aparece en la fórmula de Cardy–Verlinde queda así determinada directamente por las componentes espaciales del tensor energía-momento holográfico. Esta identificación será utilizada posteriormente para estudiar las soluciones del modelo STU.

9.4.1 La construcción original de Cai

En las secciones anteriores mostramos que la modificación de la fórmula de Cardy–Verlinde puede implementarse separando de la energía total la contribución electromagnética exterior al horizonte. Esta cantidad coincide con la energía máxima extraíble introducida por Ruffini y colaboradores [81, 66].

La primera generalización de la fórmula de Cardy–Verlinde a agujeros negros cargados fue propuesta por Cai [76]. En su construcción, la energía total se separa en una contribución asociada al estado base y una contribución térmica,

$$E = E_q + E_{\text{th}}, \quad (9.123)$$

donde E_q representa la energía del estado base y E_{th} la energía asociada a las excitaciones térmicas.

La presión se construye a partir de la energía térmica,

$$\tilde{P} = \frac{E - E_q}{nV}, \quad (9.124)$$

y la energía de Casimir queda determinada por

$$\tilde{E}_C = n \left(E + \tilde{P}V - TS - \Phi Q \right). \quad (9.125)$$

La relación modificada de Cardy–Verlinde adopta entonces la forma

$$S = \frac{2\pi R}{n} \sqrt{\tilde{E}_C \left[2(E - E_q) - \tilde{E}_C \right]}. \quad (9.126)$$

Para $n = 2$,

$$S = \pi R \sqrt{\tilde{E}_C \left[2(E - E_q) - \tilde{E}_C \right]}. \quad (9.127)$$

Esta formulación proporciona una parametrización particularmente conveniente para las soluciones con múltiples cargas, ya que permite identificar una contribución de la energía que permanece independiente de las excitaciones térmicas.

9.4.2 Formulación de Cai en coordenadas adaptadas

En la formulación propuesta por Cai resulta conveniente introducir una coordenada radial adaptada a la solución, ya que esta parametrización permite generalizar directamente la estructura de la solución a los agujeros negros STU. A lo largo de esta tesis utilizaremos la notación ρ para esta coordenada y ρ_+ para la posición del horizonte expresada en ella.

La métrica del agujero negro de Reissner–Nordström en un espacio Anti–de Sitter de dimensión $(n + 2)$ puede escribirse como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_n^2, \quad (9.128)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{n-1}} + \frac{\tilde{q}^2}{r^{2n-2}} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (9.129)$$

Se introduce la parametrización

$$m = \mu + 2q, \quad \tilde{q}^2 = q(\mu + q), \quad r^{n-1} = \rho^{n-1} + q. \quad (9.130)$$

Esta transformación permite separar de manera natural una contribución a la energía que depende del parámetro de carga. En la formulación de Cai, esta contribución corresponde a la energía del estado base de la teoría conforme dual,

$$E_q = \frac{nl \text{Vol}(S^n)}{16\pi GR}(2q). \quad (9.131)$$

Esta contribución depende únicamente del parámetro q y permanece independiente de la posición del horizonte. La energía térmica queda entonces determinada por

$$E_{\text{th}} = E - E_q. \quad (9.132)$$

La presión correspondiente se define mediante

$$\tilde{P} = \frac{E - E_q}{nV}, \quad (9.133)$$

y permite construir la energía de Casimir que interviene en la fórmula modificada de Cardy–Verlinde.

La estructura introducida por Cai resulta particularmente útil para las soluciones STU, donde los parámetros asociados a las funciones armónicas permiten identificar directamente contribuciones análogas a E_q .

9.5 Cardy–Verlinde para agujeros negros STU con una carga

Una vez establecida la construcción de Cai para el agujero negro de Reissner–Nordström Anti–de Sitter, podemos extender el análisis al caso de agujeros negros STU con una carga. En este escenario aparece un campo escalar no trivial, cuya presencia modifica la estructura de la energía del estado base y de las cantidades termodinámicas holográficas.

Como se mostró en el Capítulo 7.2.2, el modelo STU admite una truncación consistente en la cual únicamente una de las cuatro cargas permanece distinta de cero,

$$q_1 = q, \quad q_2 = q_3 = q_4 = 0, \quad (9.134)$$

reduciendo la teoría a un sistema formado por la métrica, un campo gauge y un único campo escalar. La acción correspondiente está dada por

$$I[g_{\mu\nu}, \phi, A] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}F^2 + \frac{6}{l^2} \cosh\left(\frac{\phi}{\sqrt{3}}\right) \right]. \quad (9.135)$$

Las ecuaciones de movimiento admiten una solución correspondiente a un agujero negro cargado con cabello escalar, cuya métrica puede escribirse como

$$ds^2 = -\frac{f(\rho)}{\sqrt{H(\rho)}} dt^2 + \sqrt{H(\rho)} \left[\frac{d\rho^2}{f(\rho)} + \rho^2 d\Omega_2^2 \right], \quad (9.136)$$

donde

$$H(\rho) = 1 + \frac{q}{\rho}, \quad f(\rho) = 1 - \frac{\eta}{\rho} + \frac{\rho^2}{l^2} H(\rho), \quad (9.137)$$

mientras que el campo escalar y el potencial gauge vienen dados por

$$\phi(\rho) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln H(\rho), \quad (9.138)$$

$$A = \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{\rho+q} dt. \quad (9.139)$$

Las propiedades geométricas y termodinámicas de esta solución fueron estudiadas en detalle en el Capítulo 7.2.2. En particular,

$$T_{\text{bulk}} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\rho_+^2 + 2q\rho_+ + l^2}{l^2 \sqrt{\rho_+(\rho_+ + q)}}, \quad (9.140)$$

$$S = \pi \rho_+^2 \sqrt{1 + \frac{q}{\rho_+}}, \quad (9.141)$$

$$E_{\text{bulk}} = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{q}{2} \right), \quad (9.142)$$

$$Q = \frac{\sqrt{q(q+\eta)}}{4}, \quad \Psi_{\text{bulk}} = \frac{4Q}{\rho_+ + q}, \quad (9.143)$$

donde

$$\eta = \rho_+ + \frac{\rho_+^2(\rho_+ + q)}{l^2}. \quad (9.144)$$

Después del reescalamiento holográfico,

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} E_{\text{bulk}}, \quad T_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} T_{\text{bulk}}, \quad \Psi_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} \Psi_{\text{bulk}}. \quad (9.145)$$

Por tanto,

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{2R} \left(\eta + \frac{q}{2} \right), \quad (9.146)$$

$$T_{\text{CFT}} = \frac{l}{4\pi R} \frac{3\rho_+^2 + 2q\rho_+ + l^2}{l^2 \sqrt{\rho_+(\rho_+ + q)}}, \quad (9.147)$$

$$\Psi_{\text{CFT}} = \frac{4Ql}{R(\rho_+ + q)}. \quad (9.148)$$

9.5.1 Energía del estado base y fórmula de Cardy–Verlinde

Como se discutió para el agujero negro de Reissner–Nordström Anti-de Sitter, la energía que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde se construye a partir de la parte térmica de la energía total. En la parametrización utilizada para la solución STU con una carga, la energía del estado base se obtiene tomando el límite

$$\eta \rightarrow 0, \quad (9.149)$$

manteniendo fijo el parámetro q . De esta manera,

$$E_q = \lim_{\eta \rightarrow 0} E_{\text{CFT}} = \frac{ql}{4R}. \quad (9.150)$$

La energía térmica queda dada por

$$E_{\text{th}} = E_{\text{CFT}} - E_q = \frac{\eta l}{2R}. \quad (9.151)$$

En consecuencia, la presión correspondiente a la parte extensiva de la energía es

$$\bar{P} = \frac{E_{\text{CFT}} - E_q}{2V} = \frac{\eta l}{4RV}. \quad (9.152)$$

Para

$$V = 4\pi R^2,$$

se obtiene

$$\bar{P} = \frac{\eta l}{16\pi R^3}. \quad (9.153)$$

La energía de Casimir se calcula mediante

$$\bar{E}_C = 2 \left(E_{\text{CFT}} + \bar{P}V - T_{\text{CFT}}S - \Psi_{\text{CFT}}Q \right). \quad (9.154)$$

Utilizando

$$\eta = \rho_+ + \frac{\rho_+^2(\rho_+ + q)}{l^2}, \quad (9.155)$$

se obtiene

$$\bar{E}_C = \frac{l\rho_+}{R}. \quad (9.156)$$

La fórmula modificada de Cardy–Verlinde adopta entonces la forma

$$S = \pi R \sqrt{\bar{E}_C \left[2(E_{\text{CFT}} - E_q) - \bar{E}_C \right]}. \quad (9.157)$$

Sustituyendo

$$\bar{E}_C = \frac{l\rho_+}{R}, \quad (9.158)$$

junto con las expresiones anteriores para E_{CFT} y E_q , se obtiene

$$2(E_{\text{CFT}} - E_q) - \bar{E}_C = \frac{\rho_+^2(\rho_+ + q)}{Rl}, \quad (9.159)$$

y, por tanto,

$$S = \pi \rho_+^2 \sqrt{1 + \frac{q}{\rho_+}}. \quad (9.160)$$

La relación de Cardy–Verlinde reproduce así exactamente la entropía de Bekenstein–Hawking de la solución STU con una carga.

9.6 Cardy–Verlinde para agujeros negros STU con cuatro cargas

En la sección anterior se verificó que la construcción de Cai permite recuperar la fórmula de Cardy–Verlinde para la truncación del modelo STU con una única carga eléctrica. Consideremos ahora la solución más general del modelo, caracterizada por cuatro cargas eléctricas independientes.

Como se mostró en el Capítulo 7, la solución general del modelo STU está descrita por cuatro funciones armónicas

$$H_i(\rho) = 1 + \frac{q_i}{\rho}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (9.161)$$

las cuales determinan simultáneamente la geometría del espacio-tiempo, los campos gauge y los campos escalares.

Después del reescalamiento holográfico,

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} E_{\text{bulk}}, \quad T_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} T_{\text{bulk}}, \quad \Phi_{i,\text{CFT}} = \frac{l}{R} \Phi_{i,\text{bulk}}. \quad (9.162)$$

Las cargas eléctricas y los potenciales vienen dados por

$$Q_i = \frac{\sqrt{q_i(q_i + \eta)}}{4}, \quad \Phi_{i,\text{CFT}} = \frac{4Q_i l}{(\rho_+ + q_i)R}. \quad (9.163)$$

La temperatura en el marco bulk se obtiene a partir de la regularidad del horizonte,

$$T_{\text{bulk}} = \frac{2f'(\rho_+) - f(\rho_+) \sum_{i=1}^4 \frac{H'_i(\rho_+)}{H_i(\rho_+)}}{8\pi \sqrt{\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}}. \quad (9.164)$$

Puesto que

$$f(\rho_+) = 0, \quad (9.165)$$

esta expresión se reduce a

$$T_{\text{bulk}} = \frac{f'(\rho_+)}{4\pi \sqrt{\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}}. \quad (9.166)$$

En el marco de la teoría conforme,

$$T_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} \frac{2f'(\rho_+) - f(\rho_+) \sum_{i=1}^4 \frac{H'_i(\rho_+)}{H_i(\rho_+)}}{8\pi \sqrt{\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}}. \quad (9.167)$$

La energía total es

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{2R} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (9.168)$$

Siguiendo la construcción de Cai, la energía correspondiente al estado base se obtiene tomando el límite en que el parámetro asociado a la excitación térmica desaparece, manteniendo fijos los parámetros q_i . Se obtiene

$$E_q = \frac{l}{4R} \sum_{i=1}^4 q_i. \quad (9.169)$$

Por tanto,

$$E_{\text{th}} = E_{\text{CFT}} - E_q = \frac{l\eta}{2R}. \quad (9.170)$$

La presión asociada a la parte extensiva de la energía es

$$\bar{P} = \frac{E_{\text{CFT}} - E_q}{2V}, \quad (9.171)$$

con

$$V = 4\pi R^2. \quad (9.172)$$

La energía de Casimir queda determinada por

$$\bar{E}_C = 2 \left(E_{\text{CFT}} + \bar{P}V - T_{\text{CFT}}S - \sum_{i=1}^4 \Phi_{i,\text{CFT}} Q_i \right). \quad (9.173)$$

La entropía de la solución está dada por

$$S = \pi \rho_+^2 \left[\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+) \right]^{1/2}. \quad (9.174)$$

Utilizando la condición de horizonte

$$f(\rho_+) = 0, \quad (9.175)$$

junto con las expresiones anteriores para E_{CFT} , E_q , $\bar{P}$, T_{CFT} , S , Q_i y $\Phi_{i,\text{CFT}}$, la energía de Casimir se reduce a

$$\bar{E}_C = \frac{l\rho_+}{R}. \quad (9.176)$$

Por otra parte,

$$2(E_{\text{CFT}} - E_q) - \bar{E}_C = \frac{\rho_+^3}{Rl} \prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+). \quad (9.177)$$

La fórmula modificada de Cardy–Verlinde proporciona entonces

$$S = \pi R \sqrt{\bar{E}_C [2(E_{\text{CFT}} - E_q) - \bar{E}_C]}. \quad (9.178)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$S = \pi R \sqrt{\frac{l\rho_+}{R} \frac{\rho_+^3}{Rl} \prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+)}, \quad (9.179)$$

y, utilizando la normalización de las cantidades de frontera, se recupera

$$S = \pi \rho_+^2 \left[\prod_{i=1}^4 H_i(\rho_+) \right]^{1/2}. \quad (9.180)$$

La construcción de Cai reproduce, por tanto, la entropía de Bekenstein–Hawking de la solución STU con cuatro cargas.

La interpretación holográfica de este resultado puede analizarse mediante el tensor de Brown–York renormalizado. Para la solución STU con cuatro cargas, sus componentes en la frontera conforme vienen dadas por

$$\tau_{\tau\tau}^{CV} = \frac{l}{4\pi R^3} \left[\frac{\eta}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 q_i + \frac{1}{4l^2} \sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right) \right], \quad (9.181)$$

$$\tau_{\theta\theta}^{CV} = \frac{l}{8\pi R} \left[\frac{\eta}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 q_i - \frac{1}{4l^2} \sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right) \right], \quad (9.182)$$

$$\tau_{\phi\phi}^{CV} = \sin^2 \theta \tau_{\theta\theta}^{CV}. \quad (9.183)$$

El tensor puede escribirse en la forma de un fluido perfecto,

$$\tau_{ab}^{CV} = (\epsilon + P) u_a u_b + P \gamma_{ab}, \quad (9.184)$$

de modo que

$$\epsilon = \frac{E_{\text{CFT}}}{V} = \frac{1}{V} \frac{l}{R} \left[\frac{\eta}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 q_i + \frac{1}{4l^2} \sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right) \right], \quad (9.185)$$

mientras que

$$P = \frac{1}{2V} \frac{l}{R} \left[\frac{\eta}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 q_i - \frac{1}{4l^2} \sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right) \right]. \quad (9.186)$$

La energía obtenida a partir de la carga cuasilocal es

$$E_{\text{CFT}} = \frac{l}{R} \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (9.187)$$

Comparando las componentes temporales y espaciales del tensor holográfico se obtiene

$$P - \frac{E_{\text{CFT}}}{2V} = -\frac{1}{8VlR} \sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right). \quad (9.188)$$

Por tanto, la ecuación de estado

$$P = \frac{E_{\text{CFT}}}{2V} \quad (9.189)$$

se obtiene cuando

$$\sum_{i=1}^3 \left(W_i - \frac{A_i B_i}{3} \right) = 0. \quad (9.190)$$

La misma combinación aparece en la traza del tensor de energía–momento holográfico. En consecuencia, para las condiciones de borde consideradas, la ecuación de estado conforme queda asociada a la anulación de la traza holográfica. Cuando dicha combinación se anula, el tensor de Brown–York adopta la forma conforme y se recupera

$$P = \frac{E_{\text{CFT}}}{2V}. \quad (9.191)$$

La construcción anterior establece la relación entre la fórmula de Cardy–Verlinde y las propiedades holográficas del tensor de energía–momento para la solución STU con cuatro cargas.

9.7 Cardy–Verlinde para el agujero negro diónico

En las secciones anteriores se verificó la construcción de Cardy–Verlinde para las soluciones del modelo STU con una y cuatro cargas. Consideremos ahora el agujero negro diónico, cuya estructura termodinámica incluye simultáneamente una carga eléctrica y una carga magnética. Las condiciones de borde mixtas del campo escalar modifican la estructura del tensor de energía–momento holográfico y, en consecuencia, la ecuación de estado de la teoría dual.

Después del reescalamiento holográfico por el factor l/R , las cantidades termodinámicas de la teoría dual vienen dadas por

$$Q = \frac{\mu\sqrt{\beta_1\gamma_2}}{\gamma_1\sqrt{2}}, \quad \mathcal{P} = \frac{\mu\sqrt{\beta_2\gamma_1}}{\gamma_2\sqrt{2}}, \quad (9.192)$$

donde Q representa la carga eléctrica y $\mathcal{P}$ la carga magnética.

Los potenciales conjugados correspondientes son

$$\Psi = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{2}{\beta_1\gamma_2}} \left[1 - \beta_1 - \frac{\beta_1 f_0(\rho_+)}{H_1(\rho_+)} \right], \quad (9.193)$$

$$\Upsilon = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{2}{\beta_2\gamma_1}} \left[1 - \beta_2 - \frac{\beta_2 f_0(\rho_+)}{H_2(\rho_+)} \right]. \quad (9.194)$$

La energía holográfica está dada por

$$E = \frac{l}{R} \left[M + \frac{1}{4l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right) \right], \quad (9.195)$$

donde

$$M = \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2)\mu}{\gamma_1\gamma_2}. \quad (9.196)$$

Los parámetros γ_1 y γ_2 son los definidos mediante la parametrización de la solución introducida en el capítulo correspondiente.

La contribución escalar a la energía está controlada por la combinación

$$W - \frac{AB}{3}. \quad (9.197)$$

El análisis holográfico se realiza a partir del tensor de Brown–York renormalizado, cuyas componentes vienen dadas por

$$\tau_{\tau\tau}^{CV} = \frac{l}{4\pi R^3} \left[M + \frac{1}{4l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right) \right], \quad (9.198)$$

$$\tau_{\theta\theta}^{CV} = \frac{l}{8\pi R} \left[M - \frac{1}{2l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right) \right], \quad (9.199)$$

$$\tau_{\phi\phi}^{CV} = \sin^2 \theta \tau_{\theta\theta}^{CV}. \quad (9.200)$$

Identificando este tensor con el tensor energía–momento de la teoría dual,

$$\tau_{ab}^{CV} = (\epsilon + P)u_a u_b + P\gamma_{ab}, \quad (9.201)$$

se obtiene

$$\epsilon = \frac{1}{V} \frac{l}{R} \left[M + \frac{1}{4l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right) \right], \quad (9.202)$$

y

$$P = \frac{1}{2V} \frac{l}{R} \left[M - \frac{1}{2l^2} \left(W - \frac{AB}{3} \right) \right], \quad (9.203)$$

con

$$V = 4\pi R^2. \quad (9.204)$$

Comparando la presión con la energía se obtiene

$$P = \frac{E}{2V} - \frac{3}{8VlR} \left(W - \frac{AB}{3} \right). \quad (9.205)$$

Por tanto, la relación

$$P = \frac{E}{2V} \quad (9.206)$$

se recupera cuando

$$W - \frac{AB}{3} = 0. \quad (9.207)$$

La combinación

$$W - \frac{AB}{3} \quad (9.208)$$

aparece asimismo en la traza del tensor de energía-momento holográfico. Para las condiciones de borde mixtas consideradas, una contribución no nula de esta combinación produce una traza finita,

$$\tau_a^a \neq 0, \quad (9.209)$$

y modifica la ecuación de estado de la teoría dual.

La energía de Casimir asociada a la estructura termodinámica conforme se define mediante

$$E_C = 2(E + PV - TS - \Psi Q - \Upsilon \mathcal{P}). \quad (9.210)$$

Cuando

$$W - \frac{AB}{3} \neq 0, \quad (9.211)$$

la presión no satisface la ecuación de estado conforme

$$P = \frac{E}{2V}. \quad (9.212)$$

En consecuencia, la identificación de E_C como energía de Casimir conforme deja de aplicarse y la construcción de Cardy-Verlinde utilizada para las soluciones anteriores no reproduce la entropía de la solución diónica bajo estas condiciones de borde.

Para las condiciones de borde que restauran la simetría conforme, como ocurre para

$$\beta_1 = 0 \quad (9.213)$$

o

$$\beta_2 = 0, \quad (9.214)$$

se recupera

$$W - \frac{AB}{3} = 0, \quad (9.215)$$

la traza del tensor de Brown–York se anula y se obtiene nuevamente

$$P = \frac{E}{2V}. \tag{9.216}$$

El agujero negro diónico permite así establecer, dentro de las familias de soluciones consideradas en esta tesis, la relación entre la estructura de las condiciones de borde, la traza del tensor de energía–momento holográfico y la ecuación de estado utilizada en la construcción de Cardy–Verlinde. La fórmula se recupera cuando las condiciones de borde preservan la estructura conforme requerida por la construcción termodinámica.

Capítulo 10

Conclusiones

La correspondencia AdS/CFT ha proporcionado un marco conceptual que permite establecer una conexión profunda entre la gravedad en espacios asintóticamente Anti-de Sitter y las teorías conformes de campos definidas sobre su frontera. Dentro de este contexto, el estudio de agujeros negros con pelo escalar ha adquirido un interés creciente, ya que la presencia de campos escalares modifica el comportamiento asintótico de las soluciones, introduce nuevas sutilezas en la definición de cantidades conservadas y plantea desafíos adicionales para la formulación de una descripción holográfica consistente. En consecuencia, comprender el papel que desempeñan estos campos resulta fundamental para extender las herramientas de la renormalización holográfica y profundizar en la relación entre la geometría del espacio-tiempo, la termodinámica de agujeros negros y la teoría de campos dual.

El objetivo principal de esta tesis fue estudiar las propiedades holográficas y termodinámicas de agujeros negros cargados con pelo escalar en espacios asintóticamente Anti-de Sitter mediante el formalismo de la renormalización holográfica. Para ello, se empleó el tensor cuasilocal de Brown–York como herramienta para definir las cantidades conservadas de la teoría gravitacional y se analizaron distintas familias de soluciones pertenecientes al modelo STU de supergravedad. Este enfoque permitió construir una descripción consistente de la energía, la acción euclidiana y las variables termodinámicas del sistema, así como investigar la interpretación holográfica de la fórmula de Cardy–Verlinde en presencia de campos escalares.

A lo largo de la tesis se estudiaron sucesivamente el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti-de Sitter y distintas soluciones con pelo escalar pertenecientes al modelo STU, incluyendo configuraciones con una carga eléctrica, cuatro cargas independientes y el agujero

negro diónico. Estas soluciones permitieron analizar el efecto de los campos escalares y de las condiciones de borde sobre la acción renormalizada, el tensor de Brown–York, las cantidades conservadas y la estructura termodinámica. Asimismo, el análisis de la fórmula de Cardy–Verlinde permitió estudiar la relación entre la ecuación de estado de la teoría dual y la traza del tensor de estrés holográfico.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la renormalización holográfica constituye un marco unificado para estudiar la relación entre la geometría de agujeros negros con pelo escalar, sus propiedades termodinámicas y la teoría dual definida en la frontera. El tensor de Brown–York emerge como un objeto central de esta construcción, ya que permite definir las cantidades conservadas del espacio–tiempo y, mediante la correspondencia holográfica, interpretar la densidad de energía, la presión y la ecuación de estado de la teoría dual. Asimismo, el análisis de las condiciones de borde escalares permite determinar cuándo la estructura termodinámica necesaria para la construcción de Cardy–Verlinde es compatible con la simetría conforme de la teoría dual.

Principales aportes de esta tesis

Los resultados obtenidos a lo largo de esta investigación permiten identificar cuatro contribuciones principales al estudio holográfico de agujeros negros cargados con pelo escalar en espacios asintóticamente Anti–de Sitter. Estas contribuciones abarcan la interpretación física de la energía que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde para agujeros negros cargados, la construcción de un contratérmino mixto para la solución general del modelo STU, la interpretación holográfica de la presión mediante el tensor de Brown–York y el estudio de las condiciones bajo las cuales la fórmula de Cardy–Verlinde reproduce la entropía de las soluciones analizadas.

La primera contribución consiste en establecer una interpretación física de la energía que interviene en la fórmula de Cardy–Verlinde para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter. En la construcción original propuesta por Cai, la energía efectiva se obtiene mediante la sustracción de una contribución asociada al estado base supersimétrico de la teoría conforme dual [76]. En esta tesis se mostró que dicha contribución puede identificarse, para el agujero negro cargado considerado, con

$$E_Q = \frac{\Phi Q}{2}, \quad (10.1)$$

que corresponde a la energía electromagnética asociada al campo exterior al horizonte. Esta cantidad coincide con la energía máxima extraíble del agujero negro introducida por Ruffini y colaboradores [81].

En consecuencia, la cantidad que interviene en la parte extensiva de la fórmula de Cardy–Verlinde es la energía efectiva restante,

$$E_{\text{eff}} = E_{\text{CFT}} - E_Q, \quad (10.2)$$

mientras que E_Q representa la contribución extraíble asociada al campo electromagnético exterior al horizonte. Con esta identificación, la fórmula de Cardy–Verlinde adopta la forma

$$S = \pi R \sqrt{E_C [2(E_{\text{CFT}} - E_Q) - E_C]}, \quad (10.3)$$

y reproduce la entropía de Bekenstein–Hawking,

$$S = \pi r_+^2. \quad (10.4)$$

Esta identificación proporciona una interpretación física para la modificación de la energía introducida originalmente en la construcción de Cai. Hasta donde alcanza la revisión bibliográfica realizada para esta tesis, la conexión explícita entre la contribución $E_Q = \Phi Q/2$, la energía máxima extraíble y la estructura de Cardy–Verlinde constituye un resultado relevante de este análisis.

La segunda contribución corresponde a la construcción de un contratérmino mixto para la solución general de cuatro cargas del modelo STU. El análisis de los desarrollos asintóticos de los tres campos escalares mostró que los coeficientes subdominantes están relacionados mediante

$$B_1 = -\frac{A_2 A_3}{2}, \quad B_2 = -\frac{A_1 A_3}{2}, \quad B_3 = -\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (10.5)$$

Estas relaciones satisfacen las condiciones de integrabilidad cruzada y pueden integrarse mediante el funcional conjunto

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}, \quad (10.6)$$

que satisface

$$B_i = \frac{\partial W_{\text{tot}}}{\partial A_i}. \quad (10.7)$$

Este resultado conduce naturalmente a una formulación mixta de las condiciones de borde escalares. En lugar de asociar a cada campo una función independiente $W_i(A_i)$, la construcción empleada en esta tesis se expresa mediante un funcional que depende

simultáneamente de los tres modos dominantes. Su realización local en la superficie de corte está asociada a una interacción cúbica entre los campos escalares,

$$\phi_1\phi_2\phi_3, \quad (10.8)$$

cuya expansión asintótica reproduce la estructura del funcional conjunto W_{tot} .

La construcción fue evaluada para la familia de soluciones STU de cuatro cargas y permitió verificar la cancelación de las divergencias de la acción gravitacional, así como la finitud de la acción euclidiana. Asimismo, la energía obtenida a partir de la acción renormalizada coincide con la obtenida mediante el tensor de Brown–York y con la expresión termodinámica de la solución. Al utilizar

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2}, \quad (10.9)$$

las contribuciones finitas provenientes de los modos escalares se cancelan en la expresión de la energía, recuperándose

$$E = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \right). \quad (10.10)$$

La descomposición

$$W_{\text{tot}} = W_1 + W_2 + W_3, \quad W_1 = W_2 = W_3 = -\frac{A_1 A_2 A_3}{6}, \quad (10.11)$$

puede utilizarse para mantener la notación empleada en las expresiones del tensor de Brown–York, pero la condición de borde está gobernada por el funcional conjunto W_{tot} . La información física relevante reside, por tanto, en la estructura conjunta de los tres campos escalares y no en tres condiciones de borde independientes.

El resultado proporciona una construcción explícita de un contratérmino mixto para la familia general de cuatro cargas del modelo STU y muestra cómo los acoplamientos entre los modos asintóticos pueden incorporarse de manera consistente en la descripción holográfica. La verificación realizada en esta tesis se refiere a esta familia de soluciones y a las condiciones de borde consideradas. La extensión de esta construcción a configuraciones más generales requiere estudiar adicionalmente su formulación fuera de la capa de soluciones, la localidad y covariancia del funcional, así como su comportamiento bajo variaciones independientes de los campos.

La tercera contribución consiste en proporcionar una interpretación holográfica de la presión y de la densidad de energía de la teoría dual a partir del tensor de estrés de

Brown–York [66]. Se mostró que, cuando las condiciones de borde consideradas preservan la simetría conforme, el tensor de Brown–York puede identificarse con el tensor energía–momento de un fluido perfecto conforme,

$$\tau_{ab}^{CV} = (\epsilon + P)u_a u_b + P\gamma_{ab}, \quad (10.12)$$

permitiendo obtener directamente las expresiones para la densidad de energía y la presión del sistema.

Para las soluciones estudiadas, la condición de simetría conforme conduce a la ecuación de estado

$$P = \frac{E}{2V}, \quad (10.13)$$

correspondiente a una teoría dual definida en un espacio–tiempo de $(2 + 1)$ dimensiones. De esta manera, la relación utilizada en la construcción de la energía de Casimir,

$$E_C = 2 \left(E + PV - TS - \sum_i \Phi_i Q_i \right), \quad (10.14)$$

puede relacionarse directamente con la estructura del tensor de estrés holográfico.

Esta interpretación resulta especialmente relevante para las soluciones con pelo escalar, ya que permite establecer una conexión directa entre las condiciones de borde del campo escalar y la ecuación de estado de la teoría dual. Cuando la traza del tensor de estrés holográfico se anula, la presión satisface la relación conforme y la construcción termodinámica de Cardy–Verlinde resulta compatible con las propiedades holográficas de las soluciones analizadas.

La cuarta contribución consiste en estudiar el papel de la simetría conforme en la construcción de la fórmula de Cardy–Verlinde para las familias de soluciones consideradas en esta tesis. El análisis incluyó soluciones STU con una carga eléctrica, la solución general de cuatro cargas y el agujero negro diónico. Para las primeras familias, las condiciones de borde empleadas permiten obtener un tensor de estrés compatible con la ecuación de estado conforme,

$$P = \frac{E}{2V}, \quad (10.15)$$

y la construcción modificada de Cardy–Verlinde reproduce la entropía de Bekenstein–Hawking.

En el caso del agujero negro diónico, las condiciones de borde mixtas consideradas generan una contribución finita a la traza del tensor de estrés holográfico. Esta contribución

puede expresarse mediante la combinación

$$W - \frac{AB}{3}, \quad (10.16)$$

que aparece simultáneamente en la energía y en las componentes espaciales del tensor de Brown–York. Cuando esta combinación es distinta de cero, la ecuación de estado

$$P = \frac{E}{2V} \quad (10.17)$$

deja de satisfacerse. En consecuencia, la cantidad

$$E_C = 2(E + PV - TS - \Psi Q - \Upsilon P) \quad (10.18)$$

deja de poseer la interpretación de energía de Casimir propia de una teoría conforme y la construcción de Cardy–Verlinde deja de reproducir la entropía de la solución.

Por el contrario, cuando las condiciones de borde restauran la simetría conforme, como ocurre para los casos particulares considerados en los que $\beta_1 = 0$ o $\beta_2 = 0$, se recupera

$$W - \frac{AB}{3} = 0, \quad (10.19)$$

la traza del tensor de estrés vuelve a anularse y se obtiene nuevamente

$$P = \frac{E}{2V}. \quad (10.20)$$

Estos resultados muestran que, para las familias y condiciones de borde analizadas en esta tesis, la preservación de la simetría conforme es consistente con la ecuación de estado requerida en la construcción de Cardy–Verlinde, mientras que las condiciones mixtas estudiadas que producen una traza no nula impiden dicha construcción. El agujero negro diónico proporciona así un contraejemplo concreto dentro de la familia de soluciones considerada y permite delimitar el alcance de la relación de Cardy–Verlinde en presencia de condiciones de borde escalares no conformes.

En conjunto, los resultados obtenidos en esta tesis muestran que la renormalización holográfica constituye una herramienta que permite relacionar de manera consistente la geometría del espacio–tiempo, la termodinámica de agujeros negros y las propiedades de la teoría dual. El tensor de Brown–York ocupa un lugar central en esta descripción, ya que permite definir las cantidades conservadas del sistema y proporciona, mediante la

correspondencia holográfica, una descripción de la densidad de energía y la presión de la teoría dual.

Asimismo, el análisis de la fórmula de Cardy–Verlinde permitió establecer conexiones entre diferentes aspectos de la física de los agujeros negros cargados. En particular, la identificación de

$$E_Q = \frac{\Phi Q}{2} \quad (10.21)$$

con la energía extraíble proporciona una interpretación física de la modificación introducida en la construcción de Cardy–Verlinde para el agujero negro de Reissner–Nordström–Anti–de Sitter. Por otra parte, el estudio de las soluciones con pelo escalar mostró cómo las condiciones de borde pueden modificar la traza del tensor de estrés holográfico y, con ello, la estructura termodinámica necesaria para una descripción de tipo Cardy–Verlinde.

La construcción del contratérmino mixto para la solución general del modelo STU constituye asimismo un resultado relevante de esta tesis. La aparición del funcional conjunto

$$W_{\text{tot}} = -\frac{A_1 A_2 A_3}{2} \quad (10.22)$$

muestra que los modos asintóticos de los distintos campos escalares pueden combinarse en una estructura común y que esta estructura puede asociarse, en la familia estudiada, a una interacción cúbica local entre los campos escalares. La comparación entre la acción euclidiana y el tensor de Brown–York proporciona verificaciones independientes de la energía obtenida mediante esta construcción.

Limitaciones y trabajo futuro

Los resultados presentados en esta tesis deben entenderse dentro del conjunto de soluciones, condiciones de borde y ensambles termodinámicos considerados. En particular, la construcción del contratérmino mixto fue desarrollada y verificada para la familia de soluciones STU de cuatro cargas estudiada en esta tesis. Su extensión a configuraciones multiescalares más generales requiere demostrar de manera independiente la localidad y covariancia del funcional, su definición fuera de la capa de soluciones y la consistencia de las variaciones independientes de los campos.

Asimismo, aunque la finitud de la acción renormalizada, la coincidencia de las energías obtenidas mediante la acción euclidiana y el tensor de Brown–York y la reproducción de las relaciones termodinámicas constituyen verificaciones importantes de la construcción, el

análisis desarrollado en esta tesis no proporciona por sí solo una demostración completa de un principio variacional fuera de la capa de soluciones. Una formulación completa de este problema requeriría obtener explícitamente la variación renormalizada de la acción para configuraciones generales y determinar las condiciones de borde bajo las cuales todos los términos de frontera se anulan.

La interpretación de Cardy–Verlinde también queda restringida a las dimensiones, topologías, familias de soluciones y condiciones de borde estudiadas. En particular, la relación entre la simetría conforme, la ecuación de estado y la fórmula de Cardy–Verlinde se estableció aquí mediante el análisis de soluciones concretas del modelo STU y del agujero negro diónico. La extensión de estas conclusiones a otras teorías gravitacionales, dimensiones, topologías de horizonte o deformaciones de la teoría dual requiere un análisis independiente.

Por otra parte, la elección de términos finitos en la acción renormalizada puede depender del esquema de renormalización y de las condiciones de borde adoptadas. En este sentido, resulta de interés estudiar de manera sistemática cómo diferentes elecciones de términos finitos modifican las cantidades holográficas y qué combinaciones permanecen invariantes bajo cambios de esquema.

Finalmente, los resultados obtenidos abren varias líneas de investigación. Una primera dirección consiste en completar el análisis fuera de la capa de soluciones del contratérmino mixto y establecer sus propiedades variacionales de manera general. Una segunda posibilidad consiste en extender la construcción a otras familias de agujeros negros con múltiples campos escalares, incluyendo soluciones con rotación, dimensiones superiores o teorías gravitacionales con contenido de materia más complejo. También resulta de interés estudiar otras clases de condiciones de borde mixtas y analizar su interpretación en términos de deformaciones de la teoría conforme dual.

En el contexto de la fórmula de Cardy–Verlinde, sería asimismo interesante determinar hasta qué punto las relaciones encontradas para las soluciones STU se mantienen en otras familias de agujeros negros con pelo escalar. En particular, el estudio sistemático de la relación entre la traza del tensor de estrés holográfico, la ecuación de estado y la estructura de la entropía podría permitir establecer condiciones más precisas para la existencia de relaciones de tipo Cardy–Verlinde en teorías holográficas deformadas.

En conjunto, estos problemas constituyen extensiones naturales del análisis desarrollado en esta tesis y permitirán profundizar en la relación entre renormalización holográfica, condiciones de borde escalares, termodinámica de agujeros negros y estructura conforme de las teorías duales.

Referencias

- [1] Edward Grant. *A History of Natural Philosophy: From the Ancient World to the Nineteenth Century*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [2] John Michell. On the means of discovering the distance, magnitude, etc., of the fixed stars. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 74:35–57, 1784. DOI: 10.1098/rstl.1784.0008.
- [3] Pierre-Simon Laplace. *Exposition du système du monde*. De l’Imprimerie du Cercle-Social, Paris, 1796.
- [4] Albert Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1915.
- [5] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, 1916.
- [6] J. Robert Oppenheimer and Hartland Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455–459, 1939. DOI: 10.1103/PhysRev.56.455.
- [7] J. Bekenstein. Black Holes and Entropy. *Physical Review D*, 7:2333, 1973.
- [8] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, 1975. DOI: 10.1007/BF02345020.
- [9] Gerard ’t Hooft. Dimensional Reduction in Quantum Gravity. In *Salamfestschrift: A Collection of Talks*, 1993.
- [10] Leonard Susskind. The World as a Hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6377–6396, 1995. DOI: 10.1063/1.531249; arXiv:hep-th/9409089 [hep-th].

- [11] Juan Maldacena. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2(2):231–252, 1998. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1; arXiv:hep-th/9711200 [hep-th].
- [12] Thomas Hertog and Stefan Hollands. Stability in Designer Gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 22:5323–5342, 2005.
- [13] Thomas Hertog and Gary T. Horowitz. Designer Gravity and Field Theory Effective Potentials. *Physical Review Letters*, 94:221301, 2005.
- [14] Tomohiro Harada, Takaaki Ishii, Takuya Katagiri, and Norihiro Tanahashi. Hairy Black Holes in AdS with Robin Boundary Conditions. *Journal of High Energy Physics*, 06:106, 2023.
- [15] Ioannis Papadimitriou. Holographic Renormalization as a Canonical Transformation. *Journal of High Energy Physics*, 11:014, 2010.
- [16] Geoffrey Compère and Donald Marolf. Setting the Boundary Free in AdS/CFT. *Classical and Quantum Gravity*, 25:195014, 2008.
- [17] David Choque and Raúl Rojas. Holographic Renormalization and the Variational Problem for Mixed Boundary Conditions via a Solution-Dependent Superpotential-like Function, 2023. Preprint, arXiv:2311.00550 [hep-th].
- [18] Giorgos Anastasiou, Ignacio J. Araya, Daniel Ávila, Alberto Güijosa, and Sergio Patiño-López. Extrinsic Holographic Renormalization for a Scalar Field. *Nuclear Physics B*, 1010:116758, 2025. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2024.116758; arXiv:2405.15186 [hep-th].
- [19] Ioannis Papadimitriou. Holographic Renormalization of General Dilaton-Axion Gravity. *Journal of High Energy Physics*, 08:119, 2011.
- [20] Jiliang Jing. Cardy-Verlinde Formula and Entropy Bounds in Kerr–Newman-AdS₄/dS₄ Black Hole Backgrounds. *Physical Review D*, 66:024002, 2002.
- [21] Jiliang Jing. Cardy-Verlinde Formula and Asymptotically Flat Rotating Charged Black Holes, 2002. Preprint, arXiv:hep-th/0202052.
- [22] Donam Youm. The Cardy-Verlinde Formula and Charged Topological AdS Black Holes. *Modern Physics Letters A*, 16:1327–1334, 2001.

- [23] Stefan Hollands, Akihiro Ishibashi, and Donald Marolf. Comparison between Various Notions of Conserved Charges in Asymptotically AdS Spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22:2881–2920, 2005.
- [24] Abhay Ashtekar and Saurya Das. Asymptotically Anti-de Sitter Spacetimes: Conserved Quantities. *Classical and Quantum Gravity*, 17:L17–L30, 2000.
- [25] Robert M. Wald. Black Hole Entropy is the Noether Charge. *Physical Review D*, 48:R3427–R3431, 1993.
- [26] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [27] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, 2004.
- [28] J. W. York. Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation. *Physical Review Letters*, 28:1082, 1972.
- [29] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. *Physical Review D*, 15:2752, 1977.
- [30] Robert B. Mann and Donald Marolf. Holographic Renormalization of Asymptotically Flat Spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 23:2927–2950, 2006.
- [31] Hans Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, 1916.
- [32] Gunnar Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings*, 20:1238–1245, 1918.
- [33] Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, 11:237–238, 1963.
- [34] Ezra T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and Robert Torrence. Metric of a Rotating, Charged Mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):918–919, 1965.
- [35] Roger Penrose and R. M. Floyd. Extraction of Rotational Energy from a Black Hole. *Nature Physical Science*, 229:177–179, 1971. DOI: 10.1038/physci229177a0.
- [36] Edward Witten. Anti-de Sitter Space and Holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2(2):253–290, 1998. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2; arXiv:hep-th/9802150 [hep-th].

- [37] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality*. Cambridge University Press, 2015.
- [38] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N Field Theories, String Theory and Gravity. *Physics Reports*, 323:183–386, 2000.
- [39] Thomas Hertog and Kiyoshi Maeda. Black Holes with Scalar Hair and Asymptotics in N=8 Supergravity. *Journal of High Energy Physics*, 07:051, 2004. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/07/051; arXiv:hep-th/0404261 [hep-th].
- [40] Steven S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory. *Physics Letters B*, 428(1–2):105–114, 1998. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3.
- [41] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman. Positive Energy in Anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity. *Physics Letters B*, 115(3):197–201, 1982. DOI: 10.1016/0370-2693(82)90643-8.
- [42] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman. Stability in Gauged Extended Supergravity. *Annals of Physics*, 144:249–281, 1982.
- [43] Igor R. Klebanov and Edward Witten. AdS/CFT Correspondence and Symmetry Breaking. *Nuclear Physics B*, 556:89–114, 1999. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00387-9; arXiv:hep-th/9905104 [hep-th].
- [44] Edward Witten. Multi-Trace Operators, Boundary Conditions, and AdS/CFT correspondence, 2001. Preprint, arXiv:hep-th/0112258.
- [45] Ioannis Papadimitriou. Multi-Trace Deformations in AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics*, 05:075, 2007.
- [46] Juan Maldacena. The Gauge/Gravity Duality, 2011. arXiv:1106.6073 [hep-th]. Lecture/school introduction.
- [47] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A Stress Tensor for Anti-de Sitter Gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208:413–428, 1999. DOI: 10.1007/s002200050764; arXiv:hep-th/9902121 [hep-th].
- [48] Robert C. Myers. Stress Tensors and Casimir Energies in the AdS/CFT Correspondence. *Physical Review D*, 60:046002, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.046002; arXiv:hep-th/9903203 [hep-th].

- [49] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic Reconstruction of Spacetime and Renormalization in the AdS/CFT Correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):595–622, 2001. DOI: 10.1007/s002200100381; arXiv:hep-th/0002230 [hep-th].
- [50] Kostas Skenderis. Lecture Notes on Holographic Renormalization. *Classical and Quantum Gravity*, 19:5849–5876, 2002.
- [51] Massimo Bianchi, Daniel Z. Freedman, and Kostas Skenderis. Holographic Renormalization. *Nuclear Physics B*, 631:159–194, 2002. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00180-9; arXiv:hep-th/0112119 [hep-th].
- [52] Mans Henningson and Kostas Skenderis. The Holographic Weyl Anomaly. *Journal of High Energy Physics*, 07:023, 1998. DOI: 10.1088/1126-6708/1998/07/023; arXiv:hep-th/9806087 [hep-th].
- [53] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. AdS/CFT Correspondence and Geometry. *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, 8:73–101, 2005. arXiv:hep-th/0404176 [hep-th].
- [54] J. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking. The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31:161–170, 1973. DOI: 10.1007/BF01645742.
- [55] S. Hawking. Gravitational Radiation from Colliding Black Holes. *Physical Review Letters*, 26:1344, 1971.
- [56] W. Israel. Third Law of Black Hole Mechanics. *Physical Review Letters*, 57:397, 1986.
- [57] S. W. Hawking and Don N. Page. Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space. *Communications in Mathematical Physics*, 87:577–588, 1983.
- [58] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of General Relativity. In Louis Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, pages 227–265. Wiley, 1962.
- [59] Arthur Komar. Covariant Conservation Laws in General Relativity. *Physical Review*, 113(3):934–936, 1959.

- [60] J. David Brown and James W. York. Quasilocal Energy and Conserved Charges Derived from the Gravitational Action. *Physical Review D*, 47:1407–1419, 1993. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1407.
- [61] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. Thermodynamics of Asymptotically Locally AdS Spacetimes. *Journal of High Energy Physics*, 08:004, 2005.
- [62] Michael J. Duff, James T. Liu, and Jens Rahmfeld. Four-Dimensional String/String/String Triality. *Nuclear Physics B*, 459(1-2):125–159, 1996. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00520-1; arXiv:hep-th/9508094 [hep-th].
- [63] M. Cvetič, H. Lü, and C. N. Pope. Embedding AdS Black Holes in Ten and Eleven Dimensions. *Nuclear Physics B*, 558:96–126, 1999. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00463-7; arXiv:hep-th/9903214 [hep-th].
- [64] G. W. Gibbons, M. J. Perry, and C. N. Pope. Bulk/Boundary Thermodynamic Equivalence and the Cardy-Verlinde Formula. *Physical Review D*, 72:084028, 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.084028.
- [65] M. J. Duff and J. T. Liu. Anti-de Sitter black holes in gauged N=8 supergravity. *Nuclear Physics B*, 554:237–253, 1999. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00299-0; arXiv:hep-th/9901149 [hep-th].
- [66] Dumitru Astefanesei, David Choque, Jorge Maggiolo, and Raúl Rojas. Holography of AdS hairy black holes and cardy-verlinde formula. *Physical Review D*, 106:044032, 2022. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.044032; arXiv:2111.01337 [hep-th].
- [67] Andrés Anabalón, Dumitru Astefanesei, David Choque, and Cristian Martinez. Trace Anomaly and Counterterms in Designer Gravity. *Journal of High Energy Physics*, 03:117, 2016. DOI: 10.1007/JHEP03(2016)117; arXiv:1511.08759 [hep-th].
- [68] H. Lü, Y. Pang, and C. N. Pope. AdS Dyonic Black Hole and its Thermodynamics. *Journal of High Energy Physics*, 11:033, 2013. DOI: 10.1007/JHEP11(2013)033; arXiv:1307.6243 [hep-th].
- [69] M. Bianchi, D. Z. Freedman, and K. Skenderis. How to Go with an RG Flow. *Journal of High Energy Physics*, 08:041, 2001. DOI: 10.1088/1126-6708/2001/08/041; arXiv:hep-th/0105276 [hep-th].
- [70] Elias Kiritsis, Wenliang Li, and Francesco Nitti. Holographic RG Flow and the Quantum Effective Action. *Journal of High Energy Physics*, 04:029, 2014.

- [71] D. Z. Freedman, S. S. Gubser, K. Pilch, and N. P. Warner. Renormalization Group Flows from Holography Supersymmetry and a c -Theorem. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 3:363–417, 1999.
- [72] A. Batrachenko, James T. Liu, R. McNees, W. A. Sabra, and W. Y. Wen. Black Hole Mass and Hamilton–Jacobi Counterterms. *Journal of High Energy Physics*, 05:034, 2005. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/05/034; arXiv:hep-th/0408205 [hep-th].
- [73] James T. Liu and Wafic A. Sabra. Mass in Anti-de Sitter Spaces. *Physical Review D*, 72:064021, 2005.
- [74] John Cardy. Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories. *Nuclear Physics B*, 270:186–204, 1986.
- [75] Erik Verlinde. On the Holographic Principle in a Radiation Dominated Universe. *Journal of High Energy Physics*, 04:029, 2001. DOI: 10.1088/1126-6708/2001/04/029; arXiv:hep-th/0008140 [hep-th].
- [76] Rong-Gen Cai. The Cardy-Verlinde Formula and AdS Black Holes. *Physical Review D*, 63:124018, 2001.
- [77] Dietmar Klemm, Anastasios C. Petkou, and George Siopsis. Entropy Bounds, Holographic Principle and Uncertainty Relation. *Nuclear Physics B*, 601:380–396, 2001.
- [78] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. AdS/CFT Correspondence, Conformal Anomaly and Quantum Corrected Entropy Bounds. *International Journal of Modern Physics A*, 16:5085–5096, 2001.
- [79] Bin Wang, Elcio Abdalla, and Ru-Keng Su. Relating Friedmann Equation to Cardy Formula in Universes with Cosmological Constant. *Physics Letters B*, 503:215–220, 2001.
- [80] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography. *Physical Review D*, 60:064018, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.064018; arXiv:hep-th/9902170 [hep-th].
- [81] R. Ruffini and L. Vitagliano. Irreducible Mass and Energetics of an Electromagnetic Black Hole. *Physics Letters B*, 545(3–4):233–237, 2002.
- [82] Roger Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57–59, 1965. DOI: 10.1103/PhysRevLett.14.57.

- [83] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [84] Pierre Sikivie. Axion Cosmology. *Lecture Notes in Physics*, 741:19–50, 2008.
- [85] Marcello Ortaggio. New Look at AdS Black Holes with Conformal Scalar Hair. *Physical Review D*, 110:044019, 2024.
- [86] Cristian Erices, Pantelis Filis, and Eleftherios Papantonopoulos. Hairy Black Holes in Disformal Scalar-Tensor Gravity Theories. *Physical Review D*, 104:024031, 2021.
- [87] Gerard 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nuclear Physics B*, 72:461–473, 1974.
- [88] Tullio Regge and Claudio Teitelboim. Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Annals of Physics*, 88:286–318, 1974.
- [89] Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Surface Terms as Counterterms in the AdS/CFT Correspondence. *Physical Review D*, 60:104001, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.104001; arXiv:hep-th/9903238 [hep-th].
- [90] B. Carter. Black Hole Equilibrium States. In C. DeWitt and B. DeWitt, editors, *Black Holes*. Gordon and Breach, 1973.
- [91] W. Unruh. Notes on Black-Hole Evaporation. *Physical Review D*, 14:870, 1976.
- [92] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [93] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Holography, Thermodynamics and Fluctuations of Charged AdS Black Holes. *Physical Review D*, 60:104026, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.104026; arXiv:hep-th/9904197 [hep-th].
- [94] Marc Henneaux, Cristian Martinez, Ricardo Troncoso, and Jorge Zanelli. Asymptotic Behavior and Hamiltonian Analysis of Anti-de Sitter Gravity Coupled to Scalar Fields. *Annals of Physics*, 322(4):824–848, 2007. DOI: 10.1016/j.aop.2006.05.002; arXiv:hep-th/0603185 [hep-th].
- [95] Dumitru Astefanesei, Romina Ballesteros, David Choque, and Raúl Rojas. Scalar Charges and the First Law of Black Hole Thermodynamics. *Physics Letters B*, 782:47–54, 2018. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.05.005; arXiv:1803.11317 [hep-th].

- [96] B. Goutéraux, J. Smolic, M. Smolic, K. Skenderis, and M. Taylor. Holography for Einstein-Maxwell-Dilaton Theories. *Journal of High Energy Physics*, 01:089, 2012. DOI: 10.1007/JHEP01(2012)089; arXiv:1110.2320 [hep-th].
- [97] C. Charmousis, B. Goutéraux, B. S. Kim, E. Kiritsis, and R. Meyer. Effective Holographic Theories for Low-Temperature Condensed Matter Systems. *Journal of High Energy Physics*, 11:151, 2010. DOI: 10.1007/JHEP11(2010)151; arXiv:1005.4690 [hep-th].
- [98] D. Astefanesei, D. Choque, and J. Maggiolo. Conformal Symmetry at the AdS Boundary and Integrability Conditions for Hairy Black Holes, 2026. Manuscript in preparation.
- [99] Gaston Giribet, Matías Leoni, Julio Oliva, and Sourya Ray. Hairy Black Holes Sourced by a Conformally Coupled Scalar Field in D Dimensions. *Physical Review D*, 89:085040, 2014.
- [100] P. A. González, E. Papantonopoulos, J. Saavedra, and Y. Vásquez. Four-Dimensional Asymptotically AdS Black Holes with Scalar Hair. *Journal of High Energy Physics*, 12:021, 2013.
- [101] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Gravitational Stability and Renormalization-Group Flow. *Physics Letters B*, 468:46–51, 1999.
- [102] L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati, and A. Zaffaroni. Novel Local CFT and Exact Results on Perturbations of $N = 4$ Super Yang–Mills from AdS Dynamics. *Journal of High Energy Physics*, 12:022, 1998.
- [103] Pallab Basu, Chethan Krishnan, and P. N. Bala Subramanian. Phases of Global AdS Black Holes. *Journal of High Energy Physics*, 06:139, 2016.
- [104] Rong-Gen Cai, Yun Soo Myung, and Nobuyoshi Ohta. Bekenstein Bound, Holography and Brane Cosmology in Charged Black Hole Backgrounds. *Classical and Quantum Gravity*, 18:5429–5440, 2001.