

UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA
Departamento de Matemática

PERÍODOS DE CURVAS GENERALIZADAS DE FERMAT

Tesis de grado presentada por:
Yerko Alejandro Torres Nova

como requisito parcial para optar al grado de
Magíster en Ciencias mención Matemática

Directora de Tesis:
Mariela Carvacho

Co-director de Tesis:
Pablo Aguirre

Valparaiso, Chile
2018

TÍTULO DE LA TESIS: **Períodos de curvas generalizadas de Fermat.**

AUTOR: **Yerko Alejandro Torres Nova**

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes	Firma
Mariela Carvacho Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.	_____
Pablo Aguirre Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____
Alberto Mercado Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.	_____
Rubén Hidalgo Universidad de la Frontera, Chile.	_____

Valparaíso, Julio, 2018.

*A mis padres,
Julia & Bladimiro*

Agradecimientos

No puedo empezar agradeciendo a otra persona que no sea mi profesora guía Mariela Carvacho. En particular, por su disposición a querer guiarme en este proceso, por su motivación y paciencia. Siempre estuvo para atender mis dudas, ver mis avances, aconsejarme y darme ideas para este trabajo. De verdad, agradezco su gran preocupación.

Agradezco a mis padres, Julia y Bladimiro, que desde siempre me han motivado y apoyado en todas las decisiones que he tomado, incluso cuando les dije que quería estudiar matemática. A mi hermano Bladi y su familia, que siempre estuvieron preocupados por mí. También a Camila por acompañarme en este camino, que sin ella no hubiese sido lo mismo.

Les agradezco a mis amigos quienes siempre me han apoyado en seguir adelante con la ciencia: Los de la infancia con quienes aún se siguen formando recuerdos. Los 42°, a quienes conocí en el colegio Los Reyes y que hasta el día de hoy somos un grupo de amigos. Finalmente a los amigos matemáticos de la universidad, en especial al grupito de Quilpué, con quienes no hay asado si no hablabamos de matemática o cosas ñoñas.

Finalmente le agradezco a la comisión por el tiempo dedicado a revisar esta tesis.

Agradecimientos al proyecto ANILLO CONICYT PIA ACT 1415.

Resumen

Sean $k, n \geq 2$ enteros. Una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) es una superficie de Riemann compacta S que admite un subgrupo de automorfismos conformales $H \leq \text{Aut}(S)$ isomorfo a \mathbb{Z}_k^n , tal que la superficie cociente S/H tiene $n + 1$ puntos ramas y cada uno de orden k . Se conoce un modelo algebraico para estos objetos, el cual los hace más sencillo de estudiar. Ocupando herramientas de la topología algebraica e integración sobre superficies de Riemann, encontramos un conjunto generador para el primer grupo de homología de una curva generalizada de Fermat. Finalmente, con esta información, encontramos un conjunto generador para el reticulado de períodos de la variedad Jacobiana asociada.

Palabras clave: Geometría Compleja, Superficies de Riemann, Variedad Jacobiana, Curvas Generalizadas de Fermat.

Abstract

Let $k, n \geq 2$ be integers. A generalized Fermat curve of type (k, n) is a compact Riemann surface S that admits a subgroup of conformal automorphisms $H \leq \text{Aut}(S)$ isomorphic to \mathbb{Z}_k^n , such that the quotient surface S/H has $n + 1$ branch points and each one of order k . It is known an algebraic model for these objects, which make them easier to study. Using tools from algebraic topology and integration theory on Riemann surfaces, we find a generating set for the first homology group of a generalized Fermat curve. Finally, with this information, we find a generating set of the period lattice for the associated Jacobian variety.

Keywords: Complex Geometry, Riemann Surfaces, Jacobian Variety, Generalized Fermat Curve.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Superficies de Riemann	3
1.2. Mapeos entre superficies de Riemann	7
1.3. Acciones de grupos en superficies de Riemann.	11
1.4. Topología algebraica en superficies	13
1.4.1. El grupo fundamental	13
1.4.2. Cubrimientos de espacios topológicos	16
1.4.3. El grupo de homología	18
1.5. Uniformización y grupos Fuchsianos	19
1.6. Integración	22
1.6.1. 1-formas holomorfas	22
1.6.2. Integración	25
1.6.3. 1-formas suaves	27
1.6.4. Teoría de la intersección.	29
1.6.5. Logaritmos en el plano pinchado.	31
1.7. Períodos y variedad Jacobiana	33
2. Curvas generalizadas de Fermat	37
2.1. Definiciones	37
2.2. Modelo algebraico	38
2.3. Períodos	39
2.3.1. Generadores para $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$	40
2.3.2. Cálculo de períodos	42
2.3.3. Convergencia de integrales	47
3. Observaciones y posibles trabajos futuros.	49
Bibliografía	52

Introducción

Es un hecho que toda superficie de Riemann compacta de género 1 es biholomorfa a un toro complejo \mathbb{C}/Λ , donde $\Lambda \subset \mathbb{C}$ es un reticulado, el cual determina a la superficie. A cada superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, le es posible asociar un toro complejo g -dimensional de la forma \mathbb{C}^g/Λ llamado su **variedad Jacobiana** y donde el reticulado $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$, depende tanto de la estructura analítica como de la estructura topológica-algebraica de la superficie.

La variedad Jacobiana puede ser estudiada como una variedad Abelianas principalmente polarizada. Uno de los grandes avances se debe a Ruggiero Torelli, quien probó, desde este punto de vista, que la Jacobiana determina a la superficie, es decir, el reticulado de períodos que describe al toro complejo g -dimensional. Lo que es de gran interés para diferenciar entre superficies de mismo género, pero con estructura analítica distinta, es decir, para el estudio de los espacios de Móduli. Por otra parte tenemos el **problema de Schottky**, el cual trata de buscar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuándo una variedad Abelianas principalmente polarizada determina a una superficie de Riemann compacta?.

Sin embargo, encontrar de forma explícita el reticulado de períodos asociado a la variedad Jacobiana de una superficie de Riemann compacta en particular, es una tarea algo complicada y no existe un método estándar para determinarlo. Cabe mencionar que existen pocos trabajos al respecto y son para superficies (curvas) específicas.

Por otro lado, para $k, n \geq 2$ enteros una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) es una superficie de Riemann compacta que admite un subgrupo de automorfismos isomorfo a \mathbb{Z}_k^n cuya firma es $[0; k, n+1, k]$. En esta tesis encontraremos un conjunto generador para el reticulado de períodos asociado a la variedad Jacobiana de una curva generalizada de Fermat, basandonos en los trabajos de David Rohrlich [GR] quien encontró un conjunto generador para las curvas de Fermat clásicas $x^k + y^k = z^k$.

En el Capítulo 1 recordamos la estructura analítica y topológica-algebraica de las superficies de Riemann, para entender el concepto de variedad Jacobiana, orientando los ejemplos a lo hecho en el siguiente capítulo. En el Capítulo 2 recordamos un modelo algebraico para las curvas de Fermat generalizadas. Luego, generalizando las ideas de Rohrlich para el caso particular de curvas de Fermat clásicas, encontramos un conjunto generador para el primer grupo de homología. Con lo anterior se da un conjunto generador para el reticulado de períodos. Finalmente en el Capítulo 3 dejo algunas observaciones para posibles trabajos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

A través de este capítulo veremos los conceptos y proposiciones necesarias para el desarrollo de los resultados finales obtenidos en esta tesis. En las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 desarrollaremos la idea de superficie de Riemann, los morfismos entre ellas y como construir ejemplos clásicos de estas. En la sección 1.4 revisaremos resultados clásicos de la topología algebraica aplicada a las superficies de Riemann, mientras que en la sección 1.5 veremos como los anteriores resultados pueden ser aplicados para clasificar a todas las superficies de Riemann compactas. Finalmente en la sección 1.6 definimos el concepto de integral sobre una superficie de Riemann y a partir de esto, en 1.7 construimos el invariante Jacobiana asociado cada superficie de Riemann compacta, el cual es de especial interés para obtener otra clasificación a partir de las diferentes estructuras analíticas que se pueden construir.

1.1. Superficies de Riemann

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico conexo y Hausdorff.

1. Un atlas analítico para X es una colección $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de modo que:
 - a) U_α es abierto de X para todo $\alpha \in I$.
 - b) La colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de X .
 - c) Para cada $\alpha \in I$, $\phi_\alpha : U_\alpha \subset X \rightarrow \phi(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ es un homeomorfismo.
 - d) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \in I$, entonces los cambios de coordenadas $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{C}$ es un mapeo analítico.

Cada par $(\phi_\alpha, U_\alpha) \in \mathcal{A}$ se llama una **carta o coordenada local (analítica)** de X y, si además $\phi(p) = 0$, entonces tal carta se dirá **centrada** en $p \in X$.

2. Una estructura de **superficie de Riemann** en X es un atlas analítico maximal. En este caso, las restricciones de cartas analíticas siguen siendo cartas analíticas y, por ejemplo, para cada $p \in X$, existe una carta centrada en tal punto.
3. Diremos que una superficie de Riemann es **compacta** si esta como espacio topológico es compacto.

Observación 1.1.2. Dado una atlas analítico para X , siempre existe (y es único) un atlas analítico maximal que le contiene. Luego, para dotar a un espacio topológico de una estructura de superficie de Riemann, basta con encontrar un atlas analítico cualquiera. De

ahora en adelante hablaremos de atlas y cartas sin el apellido analítico, salvo sea necesario explicitarlo.

Ejemplo 1.1.3. Para la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, consideremos la colección $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I = \{1,2\}}$, donde $U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$,

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z,$$

$$\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} - \{0\} \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

Las cambios de coordenadas en este ejemplo son la misma función analítica

$$z \in \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

De esta manera, obtenemos un atlas analítico, dotando a $\hat{\mathbb{C}}$ con estructura de superficie de Riemann compacta.

Definición 1.1.4. Una curva plana afín C_f es el conjunto de ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Un polinomio $f(x, y)$ se dice **no singular** si el conjunto $\{p \in \mathbb{C}^2 : \partial f / \partial x(p) = \partial f / \partial y(p) = f(p) = 0\}$ es vacío. Decimos también que f es **irreducible** si no existen polinomios $g, h \in \mathbb{C}[x, y]$ no constantes de modo que $f = gh$.

De esta definición es posible construir una gran cantidad de superficies de Riemann no triviales.

Ejemplo 1.1.5. Sea C_f una curva plana afín con $f \in \mathbb{C}[x, y]$ no singular e irreducible. Es sabido que si dotamos a C_f de la topología subespacio en \mathbb{C}^2 entonces f al ser irreducible se tiene C_f conexo, lo cual no es algo fácil de probar [SHAF, pág 77]. Aprovechando este resultado, f al ser no singular es posible dotar a C_f con estructura de superficie de Riemann construyendo cartas sobre cada punto $p = (x_0, y_0) \in C_f$:

1. Si $\frac{\partial f}{\partial y}|_p \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe un mapeo holomorfo $g(x)$ definido en una vecindad no vacía V_{x_0} de x_0 en \mathbb{C} de modo que

- a) $g(x_0) = y_0$

- b) $f(x, g(x)) = 0$ y $g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}$ para todo $x \in V_{x_0}$.

Por lo tanto existe una vecindad no vacía $V_p^1 = \{(x, g(x)) : x \in V_{x_0}\} \subset C_f$ de p tal que (pr_x, V_p^1) es una carta, donde pr_x es la proyección en la primera coordenada.

2. Si $\frac{\partial f}{\partial x}|_p \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe un mapeo holomorfo $h(y)$ definido en una vecindad no vacía V_{y_0} de y_0 en \mathbb{C} de modo que

- a) $h(y_0) = x_0$

- b) $f(h(y), y) = 0$ y $h'(y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}$ para todo $y \in V_{y_0}$.

Por lo tanto existe una vecindad no vacía $V_p^2 = \{(h(y), y) : y \in V_{y_0}\} \subset C_f$ de p tal que (pr_y, V_p^2) es una carta, donde pr_y es la proyección en la segunda coordenada.

Notamos que requerimos compatibilidad de cartas cuando $\frac{\partial f}{\partial x}|_p \neq 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}|_p \neq 0$. De lo anterior existen (pr_x, V_p^1) , (pr_y, V_p^2) y suponiendo que $V_p := V_p^1 \cap V_p^2$ es no vacío como vecindad de p tenemos que

$$pr_y \circ pr_x^{-1} = g(x), \quad pr_x \circ pr_y^{-1} = h(x)$$

que son holomorfas.

Ejemplo 1.1.6. Notamos que la curva plana afín C_{F_k} dada por el polinomio $F_k(x, y) = x^k + y^k + 1$ para $k \geq 3$ define una superficie de Riemann, pues al observar que

$$\partial_x F_k = kx^{k-1} = \partial_y F_k = ky^{k-1} = 0$$

sólo cuando $(x, y) = (0, 0)$, el cual no es un punto de C_{F_k} .

Las superficies de Riemann obtenidas a partir de curvas afines planas son necesariamente no compactas (una consecuencia del Teorema de Liouville). Ahora veremos como modificar esto para obtener superficies de Riemann compactas. Primero necesitamos recordar una compactificación natural del espacio \mathbb{C}^n .

Definición 1.1.7. Sea $n \geq 0$ entero y consideremos la siguiente relación de equivalencia en \mathbb{C}^{n+1} : Diremos que dos vectores no nulos son equivalente $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1})$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda(y_1, \dots, y_{n+1})$. El conjunto de clases de equivalencias de puntos $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, denotadas por el símbolo $[x_1, \dots, x_{n+1}]$, es conocido como el **espacio proyectivo complejo de dimensión n** y lo denotamos por $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$

Dado que el espacio $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ es Hausdorff y conexo, entonces mediante la aplicación cociente se puede probar que $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ es también Hausdorff y conexo. Es posible probar que la restricción del mapeo cociente a la esfera

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2 = 1\}$$

es una sobreyección a $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Por el teorema de Heine-Borel \mathbb{S}^{2n+1} es compacto y luego $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ es compacto.

Ejemplo 1.1.8. En particular la línea proyectiva $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ es una superficie de Riemann compacta. Como $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ cumple con los requisitos topológicos de una superficie de Riemann, se tiene que la colección $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I = \{1, 2\}}$, donde

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 = \{[x_1, x_2] : x_1 \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} : [x_1, x_2] \mapsto \frac{x_2}{x_1}, \\ \phi_2 : U_2 = \{[x_1, x_2] : x_2 \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{C} : [x_1, x_2] \mapsto \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

es un atlas analítico, que dota a $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ con estructura de una superficie de Riemann compacta.

Definición 1.1.9. Un polinomio $f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de grado d es **homogéneo** si $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_{n+1})$ para cada $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$

De la definición anterior no es difícil ver que si $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ es homogéneo entonces el conjunto

$$X_f = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mathbb{C} : f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$$

está bien definido y es llamado una hipersuperficie de grado d de $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$. Si $n = 2$, entonces cada X_f será llamado una **curva proyectiva plana**. Si denotamos ahora $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$ entonces

$$X_i := X_f \cap U_i =$$

$$\{[x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mathbb{C} : f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = 0\}$$

Nos restringimos ahora a $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Definición 1.1.10. *Un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es **no singular** si el sistema de ecuaciones*

$$f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

no tiene soluciones en X_f .

Lema 1.1.11. *Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo es no singular si y sólo si cada X_i asociado a X_f es una curva plana afín no singular.*

Demostración. Ver en [MIR, pág 15] \square .

No es difícil probar que si $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es homogéneo e irreducible, entonces su deshomogenización en cada coordenada (hacer tal coordenada igual a la unidad) también es un polinomio irreducible. Un hecho más profundo nos dice que todo polinomio homogéneo no singular es irreducible [SHAF].

Ejemplo 1.1.12. *De lo dicho anteriormente podemos probar que toda curva proyectiva plana no singular X_f con $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo, puede ser dotada de estructura de superficie de Riemann compacta construyendo cartas sobre cada punto $p \in X_f$: Cada $X_i = X_f \cap \{x_i \neq 0\}$ es una curva plana afín no singular dada por la deshomogenización de f en la coordenada i -ésima, llamémosle f_i . Como f es no singular, entonces es irreducible lo que implica f_i irreducible y por ello cada X_i es conexo con $\bigcap_i X_i$ no vacío, luego $X_f = \bigcup X_i$ es conexo. Como X_f es cerrado en $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ entonces es compacto.*

Para cada $p = [1, y_0, z_0] \in X_1$ se tiene:

1. X_1 es abierto de X_f y es homeomorfo a una curva plana afín no singular irreducible dada por C_{f_1} mediante un mapeo ϕ_1 .
2. Sea $\phi_1(p) = (y_0, z_0)$.
3. Si $\partial_z f_1|_{\phi_1(p)} \neq 0$, entonces existe una función holomorfa $g(y)$ definida en una vecindad V_{y_0} de y_0 en \mathbb{C} tal que $g(y_0) = z_0$ y $f_1(y, g(y)) = 0$ para todo $y \in V_{y_0}$. Definimos una vecindad de $\phi_1(p)$ en C_{f_1} dada por $V_p^1 = \{(y, g(y)), y \in V_{y_0}\}$. Luego $(\varphi_1, \phi_1^{-1}(V_p^1))$ es una carta en p , donde $\varphi_1 = pr_y \circ \phi_1$.
4. Si $\partial_y f_1|_{\phi_1(p)} \neq 0$, entonces existe una función holomorfa $h(z)$ definida en una vecindad V_{z_0} de z_0 en \mathbb{C} tal que $g(z_0) = y_0$ y $f_1(h(z), z) = 0$ para todo $z \in V_{z_0}$. Definimos una vecindad de $\phi_1(p)$ en C_{f_1} dada por $V_p^2 = \{(h(z), z), z \in V_{z_0}\}$. Luego $(\varphi_2, \phi_1^{-1}(V_p^2))$ es una carta en p , donde $\varphi_2 = pr_z \circ \phi_1$.

Haciendo lo mismo para los X_i restantes, obtenemos que X_f es una superficie de Riemann compacta. En general a las de este tipo les llamamos **curvas proyectivas plana suaves o no singulares**.

Ejemplo 1.1.13. *(Curvas de Fermat clásicas) Consideremos la curva de Fermat de grado $k \geq 3$ dada por el polinomio homogéneo $F_k(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$. Se tiene que la única solución al sistema*

$$F_k = \partial_x F_k = \partial_y F_k = \partial_z F_k = 0$$

es cuando $x = y = z = 0$ lo cual no está definido en $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Por lo tanto X_{F_k} es una curva proyectiva plana no singular y por ello una superficie de Riemann compacta.

Hasta ahora hemos construido ejemplos de superficies de Riemann en espacios de dimensiones bajas, podríamos pensar en superficies de Riemann dentro de \mathbb{C}^n o en $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ dado que también cuentan con cierta estructura analítica. Un ejemplo nace al tratar de ver superficies de Riemann como una *intersección* de hipersuperficies.

Definición 1.1.14. Sean $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ polinomios homogéneos y consideremos el conjunto de ceros

$$X := \{f_1 = \dots = f_{n-1} = 0\} \subset \mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

Si X es no vacío, diremos que X es una **intersección completa**. Si además la matriz de orden $(n-1) \times (n+1)$ con entradas $\partial_{x_j} f_i$ es de rango maximal $n-1$ en todo punto de X , entonces diremos que X es **suave**.

Análogo a lo hecho con las curvas proyectivas suaves, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.15. Una intersección completa suave X es una superficie de Riemann compacta. Además, en cada punto de X uno puede tomar la razón x_i/x_j como una carta en coordenadas homogéneas.

Demostración. Ver en [MIR, pág 17]

Ejemplo 1.1.16. (Curvas de Fermat generalizadas [GHL]) Para $k, n \geq 2$ enteros, consideremos la intersección completa definida por el siguiente sistema

$$C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) := \begin{cases} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = 0 \\ \lambda_2 x_1^k + x_2^k + x_5^k & = 0 \\ \dots & \dots \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Notamos que su matriz de derivadas parciales está dada por

$$\begin{pmatrix} kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & kx_3^{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & kx_4^{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & 0 & kx_5^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-2} kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & kx_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix}$$

Con las hipótesis hechas sobre los λ_i s tenemos que esta matriz es de rango maximal $n-1$ y por ello una intersección completa suave, es decir $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ es una superficie de Riemann compacta.

1.2. Mapeos entre superficies de Riemann

Definición 1.2.1. Sean X e Y dos superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo.

1. Diremos que $F : X \rightarrow Y$ es **holomorfo** si para cualquier par de cartas (ϕ, U) para X y (ψ, W) para Y , con $F(U) \subset W$, se tiene que la **forma local** de F dada por $f := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(W)$ es holomorfa.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & W \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{f} & \psi(W) \end{array}$$

2. Si F es holomorfa y biyectiva, entonces diremos que es un **isomorfismo** (o **biholomorfismo**), y que X e Y son superficies de Riemann isomorfas (o biholomorfas), lo cual denotaremos por el símbolo $X \cong Y$.
3. Si $F : X \rightarrow X$ un isomorfismo, entonces diremos que F es un **automorfismo** de X .
4. Si $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfa, entonces diremos que F es **meromorfa** y cada $z \in X$ que cumpla $F(z) = 0$ (respectivamente, $F(z) = \infty$) se le llamará un **cero** (respectivamente, un **polo**) de F .

Ejemplo 1.2.2. Consideremos el mapeo $F : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dado por $F([x, y]) = x/y$ con $F([1, 0]) = \infty$, entonces de 1.1.3 y 1.1.8 se tiene:

1. Para $p \in U_1 = \{[x, y] : x \neq 0\}$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} - \{0\} \\ \phi_1=y/x \downarrow & & \downarrow 1/z \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

dado que $\phi_1^{-1}(w) = [1, w]$, se tiene que $f(w) = w$ holomorfa.

2. Para $p \in U_2 = \{[x, y] : y \neq 0\}$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} - \{0\} \\ \phi_2=x/y \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

dado que $\phi_2^{-1}(w) = [w, 1]$, se tiene que $f(w) = w$ holomorfa.

Luego F es holomorfa. No es difícil ver que también es biyectiva, por lo tanto se tiene el biholomorfismo $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong \hat{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 1.2.3. Si el mapeo $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es localmente la restricción de una carta de X , entonces F es holomorfa. A partir de esto notamos que sobre una intersección completa $X \subset \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ los mapeos coordenadas $x_i/x_j : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ son holomorfos. Lo mismo ocurre para los mapeos coordenadas pr_{x_i} en las curvas planas afines de 1.1.5.

Teorema 1.2.4. (Forma local normal) Si $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo no constante, entonces para todo $p \in X$ existe un entero $m_p F \geq 1$ único de modo que existen cartas de X e Y centradas en p y $F(p)$ respectivamente tal que la forma local de F cumple con $f(z) = z^{m_p F}$. Al entero $m_p F$ se le llamará la **multiplicidad** de F en p .

Demostración. Ver [MIR, pág. 44] \square .

Definición 1.2.5. ' ,

1. Si $m_p F \geq 2$ entonces a p se le llamará un **punto de ramificación** o **punto crítico**. A cada $q \in F(X)$ cuya preimagen sea un punto de ramificación, se le dirá un punto **rama** o **valor crítico**.
2. Si $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es meromorfa y p es un cero o polo, diremos que el **orden** de F en p es $\text{ord}_p(F) = m_p F$ o $\text{ord}_p(F) = -m_p F$ respectivamente.

Proposición 1.2.6. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann, entonces:

1. F es una aplicación abierta.
2. Cada preimagen $F^{-1}(y)$ de $y \in Y$ es un conjunto discreto en X .
3. El conjunto de puntos de ramificación de F es discreto.

Demostración. Sea $W \subset X$ abierto. Podemos asumir que W y $F(W)$ son parte de cartas (φ, W) y $(\psi, F(W))$ de X e Y respectivamente. Entonces, como la representación local de F , $f : \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa no-constante y $\varphi(W)$ es un abierto de \mathbb{C} , tenemos que $f(\varphi(W)) = \psi(F(W))$ es abierto en \mathbb{C} . Luego $F(W) = \psi^{-1}(f(\varphi(W)))$ es abierto en Y probando (1).

Sea $x \in F^{-1}(y)$, localmente en x la forma local f es holomorfa en el sentido clásico por lo tanto tenemos que todas sus fibras son discretas de donde se sigue el resultado para (2).

Si x es un punto de ramificación de multiplicidad $m \geq 2$, del teorema 1.2.4 localmente F se ve como $f(w) = w^m$ en una carta centrada en x . No es difícil ver que todo punto distinto de cero en esta vecindad no es la imagen de un punto de ramificación. Por lo tanto podemos aislar a x por una vecindad, probando (3). \square

Como corolarios directos de la proposición anterior se tiene que, si F es biyectiva, entonces es un biholomorfismo. Por otro lado si X es compacto, entonces el conjunto de puntos de ramificación de X es finito.

Teorema 1.2.7. Si $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas, entonces el mapeo

$$\text{deg}_F : Y \rightarrow \mathbb{Z} : y \mapsto d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} m_p F$$

es constante. Llamemos a esta constante el **grado** de F y denotaremos por $\text{deg } F$.

Demostración. Ver [MIR, pág. 47]. \square

Un corolario directo de este resultado a partir de la definición 1.2.5 es:

Corolario 1.2.8. Si $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa (meromorfa), no constante y con X compacta, entonces el número de ceros de F es igual a su número de polos contando multiplicidades, es decir

$$\sum_{p \in F^{-1}(0)} \text{ord}_p F = - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} \text{ord}_p F$$

Definición 1.2.9. Sea S una variedad real diferenciable 2-dimensional. Una **triangulación** de S es una descomposición de S en subconjuntos cerrados, cada uno homeomorfo a un triángulo, de modo que cada par de triángulos puede ocurrir que sean disjuntos, se intersectan en un vértice o en una arista. Si S puede ser triangularizada, denotemos por

V, A y C al número de vértices, aristas y caras de esta triangulación respectivamente, entonces el **número de Euler** de S es definido por $\chi(S) = V - A + C$.

Es un hecho que el número de Euler es un invariante topológico cuando S es compacta, es decir, no depende de la elección de la triangulación (ver primeros capítulos de [MASS]). No es difícil ver que toda superficie de Riemann tiene una estructura natural de variedad real diferenciable 2-dimensional y por ello podemos definir este invariante topológico χ en cada superficie de Riemann compacta. Otro hecho importante es que toda variedad real diferenciable y compacta es homeomorfa a la suma conexa de g -toros con $g \geq 0$, donde $\chi(S) = 2 - 2g$. Este invariante g es llamado el **género** de S y nuevamente toda superficie de Riemann compacta está dotada con este invariante.

Teorema 1.2.10. (Fórmula de Hurwitz) Si $F : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas de género g_X y g_Y respectivamente, entonces se cumple la relación

$$2g_X - 2 = \deg F(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} (m_p F - 1)$$

Demostración. Ver en [MIR, pág. 52]

Ejemplo 1.2.11. Del ejemplo 1.1.16, consideremos el mapeo holomorfo

$$\pi : C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad [x_1, \dots, x_{n+1}] \rightarrow -\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k$$

Sea $p \in C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ de modo que todas sus coordenadas sean no nulas. Dado que la matriz Jacobiana de la curva es

$$\begin{pmatrix} kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & kx_3^{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & kx_4^{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & 0 & kx_5^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-2} kx_1^{k-1} & kx_2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & kx_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix}$$

entonces todas sus entradas son no nulas en p . Lo que implica que el mapeo $w = x_2/x_1$ es localmente una carta con inversa $w \rightarrow [1, w, g_3(w), \dots, g_{n+1}(w)]$ con g_i holomorfas. Consideremos la carta centrada $z \rightarrow z - \pi(p)$ en $\hat{\mathbb{C}}$ y notamos que la forma local de π en estas cartas es

$$w \rightarrow -\pi(p) + w^k$$

Dado que $\pi(p)$ es no nulo, entonces p **no** es un punto de ramificación. Luego los puntos de ramificación deben tener coordenadas nulas, pero dada la estructura del sistema se tiene que para cada $p \in C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$, sólo una coordenada de este elemento puede ser nula.

Sea entonces $p = [p_1, \dots, p_i, \dots, p_{n+1}]$, con $p_i = 0$ para $i \geq 4$. Es claro desde las ecuaciones que

$$\pi(p) = \lambda_i$$

Dado que las demás coordenadas son no nulas, entonces (x_i/x_1) será una carta con inversa $w \rightarrow [1, g_2, \dots, g_{i-1}, w, g_{i+1}, \dots, g_{n+1}]$ y considerando una carta centrada en $\pi(p)$ dada por $z \rightarrow z - \lambda_i$, obtenemos que la forma local de π es

$$w \rightarrow -g_2(w)^k - \lambda_i$$

sin embargo de las ecuaciones notamos que

$$\lambda_i + g_2(w)^k + w^k = 0$$

obteniendo que π localmente se ve como w^k . Para los casos $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ se sigue de forma casi similar, obteniendo finalmente que los puntos ramas de π son el conjunto de $n + 1$ elementos $\{\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$ y cada uno de orden k .

No es difícil ver que el grado de π es k^n y que hay $(n + 1)k^{n-1}$ puntos de ramificación cada uno de orden k . Usando el hecho de que $g_{\hat{C}} = 0$, aplicamos la formula de Hurwitz obteniendo

$$\begin{aligned} 2g_{C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})} - 2 &= -2k^n + k^{n-1}(n + 1)(k - 1) \\ &= k^{n-1}(-2k + (n + 1)(k - 1)) \\ &= k^{n-1}((n - 1)(k - 1) - 2) \end{aligned}$$

luego se tiene

$$g_{C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})} = \frac{2 + k^{n-1}((n - 1)(k - 1) - 2)}{2}$$

para $k, n \geq 2$.

Ejemplo 1.2.12. Notamos que los ejemplos anteriores recaen sobre el caso de las curvas de Fermat $F_k : x^k + y^k + z^k = 0$ del ejemplo 1.1.13 obteniendo

$$g_{F_k} = g_{k,2} = \frac{(k - 1)(k - 2)}{2}$$

1.3. Acciones de grupos en superficies de Riemann.

Definición 1.3.1. Sea G un grupo abstracto. Una **acción** de G como un grupo de automorfismos holomorfos de una superficie de Riemann X , es un mapeo

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, p) \rightarrow g(p)$$

con las siguientes propiedades

1. Para cada $g \in G$, $g : X \rightarrow X : p \mapsto g(p)$ es un automorfismo holomorfo de X .
2. $(gh)(p) = g(h(p))$, para todo $g, h \in G$ y $p \in X$.
3. $e(p) = p$, para todo $p \in X$ donde e es la identidad de G .

Si para cada $g \in G - \{e\}$ tenemos que el automorfismo holomorfo inducido por g no es la identidad, entonces diremos que la acción anterior es **fiel o efectiva**.

Sea G un grupo actuando como grupo de automorfismos holomorfos de una superficie de Riemann X . Para cada $p \in X$ tenemos dos conjuntos importantes, la **órbita** de p definido por $Gp = \{g(p) : \forall g \in G\}$ y el **estabilizador** de p dado por $G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$. Consideremos el conjunto de orbitas $X/G = \{Gp : p \in X\}$ y el mapeo sobreyectivo

$$Q : X \rightarrow X/G, \quad p \rightarrow Gp$$

Dado que X es un espacio topológico, dotamos a X/G de la topología cociente inducida por Q .

Definición 1.3.2. Sea G un grupo actuando efectivamente como un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann X . Diremos que G **actúa propiamente discontinua** en X si las siguientes propiedades valen.

1. Para cada $p \in X$, G_p es finito;
2. Para cada $p \in X$ existe un abierto U , $p \in U$, tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para $g \in G - G_p$.

Notemos que si G es un grupo finito de automorfismos holomorfos de una superficie de Riemann, entonces esta actúa propiamente discontinua en ella.

Teorema 1.3.3. Sea G un grupo actuando efectivamente como un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann X .

1. Si G actúa propiamente discontinua sobre X , entonces X/G es una superficie de Riemann. Además el mapeo $Q : X \rightarrow X/G$ es holomorfo y $m_p Q = |G_p|$ para todo $p \in X$
2. En particular, si G es un grupo finito de automorfismos de una superficie de Riemann X , entonces X/G es una superficie de Riemann y $Q : X \rightarrow X/G$ es una función holomorfa de grado $|G|$.

Demostración. Ver [MIR, pág. 76-79]. \square

Ejemplo 1.3.4. Consideremos los automorfismos de la curva generalizada de Fermat $X = C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ del ejemplo 1.1.16 dados por

$$a_j[x_1, \dots, x_{n+1}] = [x_1, \dots, \zeta x_i, \dots, x_{n+1}], \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

con $\zeta = e^{2\pi i/k}$. Entonces es fácil ver que $a_{n+1} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$ y que

$$H := \langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z}_k^n$$

Consideremos el mapeo $Q : X \rightarrow X/H$ dado por $Q(p) = Hp$. Entonces los puntos de ramificación de Q son aquellos cuyo estabilizador tiene orden mayor a 1, es decir si p es de ramificación entonces

$$m_p Q = |H_p| \geq 2.$$

Luego, por definición $H_p = \{a \in H : a(p) = p\}$ no trivial. Cada $a \in H$ distinto de la identidad es de la forma $a[x_1, \dots, x_{n+1}] = [\zeta^{j_1} x_1, \dots, \zeta^{j_{n+1}} x_{n+1}]$ con j_i enteros y no todos nulos, por ello si $a(p) = p$ para $p = [x_1, \dots, x_{n+1}]$, entonces desde las ecuaciones de $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ se deduce que $x_i = 0$ para algún i y $x_j \neq 0$ para $j \neq i$. Por lo tanto los puntos de ramificación son la unión de los conjuntos

$$\text{Fix}(a_i) := \{x_i = 0\} \cap C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

donde $\text{Fix}(a_i)$ es el conjunto de puntos fijos de a_i .

Si ahora X es compacto (como resulta ser en el ejemplo anterior), se tiene desde el mapeo cociente que X/G es compacto. Podemos decir un poco más respecto al género de un cociente usando el hecho de que los puntos ramas de Q , son aquellos cuyas preimágenes tienen estabilizador no trivial. Aplicando la fórmula de Hurwitz obtenemos el siguiente hecho.

Teorema 1.3.5. *Sea G un grupo finito actuando como grupo de automorfismos holomorfos y de manera efectiva (fiel) sobre una superficie de Riemann compacta X . Sean $y_1, \dots, y_k \in X/G$ los puntos ramas del mapeo Q . Si r_i es la multiplicidad de cada elemento de $Q^{-1}(y_i)$, entonces se cumple*

$$2g_X - 2 = |G| \left(2g_{X/G} - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right)$$

Demostración. Ver [MIR, pág. 80]

Ejemplo 1.3.6. *Recordemos el mapeo π del ejemplo 1.2.11 el cual induce un mapeo holomorfo*

$$\Pi : X/H \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \Pi(H[x_1, \dots, x_{n+1}]) \rightarrow - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k = \pi[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Notamos que $\pi \circ a_i = \pi$ para todo $1 \leq i \leq n$, lo que implica la biyectividad de Π y por lo tanto tenemos el biholomorfismo

$$C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})/H \cong \hat{\mathbb{C}}$$

1.4. Topología algebraica en superficies

La topología algebraica es una teoría que nos permite estudiar desde un punto de vista algebraico un espacio topológico, es decir, a cada espacio topológico se le puede asociar un objeto con estructura algebraica (grupo, anillo, módulo, etc...) y que se preserve bajo homeomorfismos. Utilizando las propiedades algebraicas de estos invariantes, podemos extraer información sobre el espacio en cuestión. En particular veremos como se aplica esta teoría a las superficies suaves o variedades diferenciables de dimensión 2, pues toda superficie de Riemann tiene una estructura diferenciable inducida por la estructura analítica.

1.4.1. El grupo fundamental

Definición 1.4.1. *Sean W, X espacios topológicos y sea $S \subset W$ (tal subconjunto puede ser el subconjunto vacío).*

1. *Dos mapeos continuos $\gamma_{1,2} : W \rightarrow X$, que coinciden sobre el conjunto S , se dicen que son **homotópicos relativos a S** si existe un mapeo continuo*

$$\Gamma : W \times [0, 1] \rightarrow X$$

de modo que $\Gamma(w, 0) = \gamma_1(w)$, $\Gamma(w, 1) = \gamma_2(w)$ y $\Gamma(s, t) = \gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ para cada $s \in S$.

2. *Consideremos ahora $W = [0, 1]$, $S = \{0, 1\}$ y fijemos un punto $x_0 \in X$. Sea $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de todos los caminos (mapeos continuos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$) de inicio y final en x_0 (loops) módulo homotopía relativo a $\{0, 1\}$, es decir, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ en $\pi_1(X, x_0)$ si y sólo si γ_1 y γ_2 son homotopías relativos al conjunto $\{0, 1\}$. El producto*

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

induce una estructura de grupo a $\pi_1(X, x_0)$, llamado el **grupo fundamental** de X . Notamos que si $\gamma(t) \in \pi_1(X, x_0)$, entonces $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Además la identidad en $\pi_1(X, x_0)$ viene dado por la clase de equivalencia del loop constante $e_{x_0}(t) = x_0$.

Si la superficie es conexa por caminos se tiene que $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$, para todo $x_0, x_1 \in X$. En nuestro caso asumiremos siempre que las superficies son conexas por caminos (toda superficie de Riemann lo es) por ello simplemente denotaremos al grupo fundamental de X por $\pi(X)$.

Sea ahora $f : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo entre superficies, entonces existe un homomorfismo inducido entre grupos fundamentales dado por

$$f_* : \pi(X) \rightarrow \pi(Y), \quad [\gamma] \rightarrow [f \circ \gamma]$$

se tiene entonces que el grupo fundamental es un invariante topológico.

Proposición 1.4.2. .

1. Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entre superficies conexas por caminos, entonces $\pi(X) \cong \pi(Y)$.
2. Respecto a la topología producto, se tiene

$$\pi(X \times Y) = \pi(X) \times \pi(Y)$$

Demostración. Ver en [MASS, pág. 52]. \square

Ejemplo 1.4.3. Para el círculo unitario \mathbb{S}^1 es posible probar (ver [MASS, pág. 47]) que su grupo fundamental es cíclico y generado por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, por lo tanto $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Esto nos permite probar que el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tiene grupo fundamental

$$\pi(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^2$$

Notamos que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y $\pi_1(\mathbb{T})$ son abelianos. De lo comentado al final de la sección 1.2, toda superficie de Riemann compacta es homeomorfo a la suma conexa de $g \geq 0$ toros, sin embargo para $g \geq 2$ el grupo fundamental del g -toro no es abeliano, de hecho es isomorfo (ver [MASS, pág. 99]) al grupo libre de rango $2g$

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$$

donde tenemos el conmutador definido por $[\alpha_i, \beta_i] = \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}$.

Definición 1.4.4. Un subconjunto $A \subset X$ es un **retracto de deformación** de X si existe un mapeo continuo $r : X \rightarrow A$ (**retracción**) y una homotopía $f : X \times I \rightarrow X$ entre la identidad id_X y el retracto $r(x)$, de modo que

$$\left. \begin{aligned} f(x, 0) &= x \\ f(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\} x \in X$$

$$f(a, t) = a, \quad a \in A, t \in I$$

Teorema 1.4.5. Si A es un retracto de deformación de X , entonces para $a \in A$ el mapeo inclusion $i : A \rightarrow X$ induce un isomorfismo entre $\pi_1(A, a)$ y $\pi_1(X, a)$.

Demostración. Del hecho que $r \circ i : A \rightarrow A$ es la identidad, obtenemos que $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ es inyectivo. Del hecho que $i \circ r : X \rightarrow X$ es homotópico a la identidad de X , relativo a cualquier punto $a \in A$, obtenemos la sobreyectividad de la anterior. \square

Ejemplo 1.4.6. Sea $r_0 \in \mathbb{C}$ fijo y definamos el espacio topológico $X = \mathbb{C} - \{r_0\}$. Sea $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $c(t) = r_0 + e^{2\pi i t}$ y denotemos $A = c([0, 1]) \cap X$. Definimos una retracción $r : X \rightarrow A$ mediante

$$x \rightarrow r(x) = r_0 + e^{2\pi i \theta_{x-r_0}}$$

donde θ_{x-r_0} es el argumento principal de $x - r_0$. Definimos $f : X \times I \rightarrow X$ mediante

$$f(x, t) = r_0 + \left((1-t) + \frac{1}{|x-r_0|} t \right) |x-r_0| e^{2\pi i \theta_{x-r_0}}$$

entonces podemos observar que A es un retracto de deformación de X . Dado que A es homeomorfo a \mathbb{S}^1 se tiene que

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{r_0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1.4.7. De forma más general, podemos considerar el **plano pinchado** $X = \mathbb{C} - R$, donde $R = \{r_1, \dots, r_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_i \neq r_j$. Se puede probar que si $(A_i, a_i)_{i=1, \dots, n}$ son las circunferencias (de radio pequeño) rodeando a cada r_i con un punto base a_i , entonces al identificar $a_i \sim a_j$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ y mediante un retracto de deformación se tiene el isomorfismo

$$\pi_1(X) \cong \pi \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i \right) / \sim \right)$$

Definición 1.4.8. Si X es una superficie, diremos que es **simplemente conexa** si $\pi_1(X) \cong \{e\}$.

Recordamos que si G y H son grupos, entonces su **producto libre** $G * H$ es el grupo formado por las cadenas finitas de la forma

$$g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_n h_n$$

con $g_i \in G$ y $h_i \in H$. Un corolario del teorema de Seifert-van Kampen (ver [MASS, pág. 87]) nos dice:

Corolario 1.4.9. (Seifert-van Kampen) Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos conexos por caminos. Si $U \cap V$ es simplemente conexo y no vacío, entonces se tiene el isomorfismo de grupos

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$$

con $x_0 \in U \cap V$.

Ejemplo 1.4.10. Continuando el ejemplo 1.4.7, notamos que en $(\prod_{i=1}^n A_i) / \sim$ los subconjuntos A_i son abiertos y además de la identificación se tiene $\bigcap_i A_i = \{a\}$. Aplicando el corolario anterior obtenemos que el grupo fundamental de $X = \mathbb{C} - R$ es el producto libre

$$\pi_1(X, a) \cong \pi_1(A_1, a) * \cdots * \pi_1(A_n, a) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}$$

en otras palabras $\pi_1(\mathbb{C} - R)$ es un grupo libre de rango n .

1.4.2. Cubrimientos de espacios topológicos

Definición 1.4.11. *Un mapeo continuo $p : \tilde{X} \rightarrow X$ entre espacios topológicos conexos por caminos es un **cubrimiento** si para todo $x \in X$, existe una vecindad $V_x \subset X$ de x tal que $p^{-1}(V_x)$ es la unión disjunta de abiertos $U_i \subset \tilde{X}$ y $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_x$ es un homeomorfismo.*

Si X es una superficie de Riemann entonces a \tilde{X} se le puede dotar de una única estructura analítica heredada de X y de modo que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sea holomorfa. La estructura analítica de \tilde{X} está dada por el atlas conformado por las cartas $(U_i, \psi_j \circ p)$ donde (V_j, ψ_j) es carta de X y $V_j = p(U_i)$.

Ejemplo 1.4.12. *Consideremos el mapeo desde la espiral a la circunferencia*

$$p : X = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t) \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

es un cubrimiento de \mathbb{S}^1 . Además el mapeo $p \times p : X \times X \rightarrow \mathbb{T}$ nos da un cubrimiento del toro.

Proposición 1.4.13. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas y sea R el conjunto de puntos ramas de f . Entonces la restricción*

$$f : X - f^{-1}(R) \rightarrow Y - R$$

es un cubrimiento.

Demostración. De la proposición 1.2.6 se tiene que X es compacto, luego $f(X)$ es compacto, sin embargo $f(X)$ es abierto y como Y es conexo se tiene $f(X) = Y$. Para cada $y \in Y - R$, al no haber ramificación se tiene $|f^{-1}(y)| = \deg(f)$ finito e independiente de y . Como $f^{-1}(y)$ es discreto, entonces existen $\deg(f)$ vecindades U_i que aíslan a cada $x_i \in f^{-1}(y)$ y las cuales podemos asumir de modo que cada $f|_{U_i}$ sea un homeomorfismo. \square

Ejemplo 1.4.14. *Del ejemplo 1.2.11, recordemos que el mapeo $\pi : C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es holomorfo con puntos ramas dados por $R = \{r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = \lambda_1, \dots, r_{n+1} = \lambda_{n-2}\} \cup \{\infty\}$ y se tiene además*

$$\pi^{-1}(r_i) = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) : x_i = 0\}$$

Ya que $\hat{\mathbb{C}} - R \cong \mathbb{C} - \{0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$. Junto a la proposición anterior la restricción

$$\pi : C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) - \bigcup_{i=1}^{n+1} \pi^{-1}(r_i) \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$$

es un cubrimiento.

Definición 1.4.15. *Sea $f : Z \rightarrow X$ continua. Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento, entonces una función continua $\tilde{f} : Z \rightarrow \tilde{X}$ es un **levantamiento** de f , si se cumple $p \circ \tilde{f} = f$.*

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 Z & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

Proposición 1.4.16. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubrimiento, $\gamma : I \rightarrow X$ un camino con $\gamma(0) = x_0$ y $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces existe un único camino $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$ el cual es un levantamiento de γ con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

Demostración. Ver [MASS, pág. 123]. \square

Definición 1.4.17. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ cubrimiento. Una **transformación recubridora** de p es un homeomorfismo $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ que cumple con $p \circ \phi = p$.

El **grupo recubridor** o **grupo Deck** del cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es el grupo de todas sus transformaciones recubridoras y lo denotamos por $Deck(p)$. En otras palabras, $\phi \in Deck(p)$ si y sólo si el siguiente diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xleftrightarrow{\phi} & \tilde{X} \\
 \searrow p & & \swarrow p \circ \phi \\
 & X &
 \end{array}$$

Si X es una superficie de Riemann, entonces todo $\phi \in Deck(p)$ es un mapeo holomorfo, de hecho, en forma local para cartas compatibles $\psi_{i,j} \circ p$ de \tilde{X} se tiene

$$(\psi_i \circ p) \circ \phi \circ (\psi_j \circ p)^{-1} = \psi_i \circ (p \circ \phi) \circ (\psi_j \circ p)^{-1} = (\psi_i \circ p) \circ (\psi_j \circ p)^{-1}$$

lo cual es holomorfo.

Definición 1.4.18. A un cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, de modo que \tilde{X} es simplemente conexo le diremos que es un **cubrimiento universal** de X .

Teorema 1.4.19. Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento universal, entonces

$$Deck(p) \cong \pi_1(X)$$

Demostración. Sea $u \in \tilde{X}$ y consideremos l_ϕ como el camino que conecta u con $\phi(u)$. Como \tilde{X} es simplemente conexo, entonces cualquier otro camino entre u y $\phi(u)$ es homotópico a l_ϕ . Consideremos entonces la proyección de l_ϕ mediante p , es decir $p \circ l_\phi$, y notamos que es cerrada y simple. Si escogemos $u = p^{-1}(x_0)$, entonces $p \circ l_\phi \in \pi_1(X, x_0)$. Definimos entonces el homomorfismo

$$\Psi : Deck(p) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \phi \mapsto \Psi(\phi) = p \circ l_\phi$$

De la proposición 1.4.16, la curva l_ϕ es el único levantamiento de la curva $p \circ l_\phi$ y por esto Ψ es inyectivo. Sea $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ y consideremos su único levantamiento $\tilde{\gamma}$ en \tilde{X} con $\tilde{\gamma}(0) = u$ y $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Es posible probar que $Deck(p)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$ (ver [MASS, pág. 136]), por ello existe $\phi \in Deck(p)$ de modo que $\phi(u) = \tilde{\gamma}(1)$ y luego $l_\phi = \tilde{\gamma}$. Por lo tanto Ψ es un isomorfismo. \square

Teorema 1.4.20. *Si X es una superficie conexa, entonces existe un cubrimiento universal $p: \tilde{X} \rightarrow X$ único salvo transformaciones recubridoras.*

Demostración. Ver [MASS, pág 142]. \square

Definición 1.4.21. *Sea G un subgrupo de homeomorfismos de X y consideremos la acción $(g, x) \in G \times X \rightarrow g(x) \in X$. Diremos que G actúa en X*

1. **Libremente** si ningún elemento de G fija puntos a excepción de la identidad.
2. **Propiamente discontinua** si para cada $x \in X$ existe una cantidad finita de transformaciones $g_1, \dots, g_r \in G$ que fijan a x y un abierto U_x de x tal que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $g \in G - \{g_1, \dots, g_r\}$.

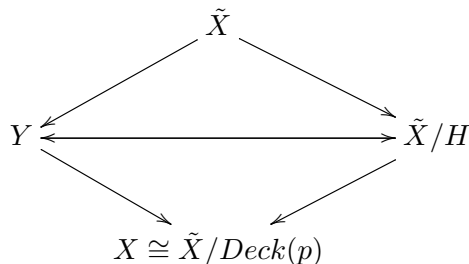
Ejemplo 1.4.22. *El subgrupo de homeomorfismos $G = \langle z \rightarrow z + m + in : m, n \in \mathbb{Z} \rangle$ de \mathbb{C} actúa de forma libre y propiamente discontinua. Luego \mathbb{C}/G es homeomorfo al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Teorema 1.4.23. *Sea X una superficie y $p: \tilde{X} \rightarrow X$ su cubridor universal.*

1. *La acción de $Deck(p)$ en \tilde{X} es libre y propiamente discontinua, además es transitiva. Luego el espacio de orbitas $\tilde{X}/Deck(p)$ es una superficie homeomorfa a X mediante*

$$Q: \tilde{X}/Deck(p) \rightarrow X, \quad [\tilde{x}] \mapsto p(\tilde{x})$$

2. *Todo cubrimiento (Y, q) de X con $q: Y \rightarrow X$, es homeomorfo a un cociente \tilde{X}/H con $H \leq Deck(p)$ y de modo que el siguiente diagrama commute*



3. *Si X es una superficie de Riemann, entonces todo elemento de $Deck(p)$ es un mapeo holomorfo. Además se tiene que $\tilde{X}/Deck(p)$ y X son biholomorfas.*

Demostración. Ver [GG, pág 65 -69]

Al considerar el producto de dos caminos en $\pi_1(X)$, este puede ser no abeliano, sin embargo geoméricamente el producto independiente del orden sigue describiendo la misma *figura*. Por ello para mirar desde un punto de vista más geométrico a X junto con su grupo fundamental hacemos equivalentes los productos no abelianos en $\pi_1(X)$.

1.4.3. El grupo de homología

Definición 1.4.24. *El primer grupo de **homología** de una superficie X es la **abelianización** de $\pi_1(X)$, es decir*

$$H_1(X, \mathbb{Z}) := \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

donde $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$.

Ejemplo 1.4.25. Dado que $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}) = 0$, entonces $H_1(\hat{\mathbb{C}}) = 0$. Ya que $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$, notamos que este ya es abeliano y por ello $H_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$. Si X es una superficie (de Riemann) compacta de género $g \geq 2$, entonces esta es homeomorfa a un g -toro y por lo tanto

$$\pi_1(X) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle = F/N$$

donde F es el grupo libre generado por $2g$ elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ y N el menor grupo normal conteniendo a $[\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g]$. Luego no es difícil probar el siguiente isomorfismo

$$\frac{F/N}{[F/N, F/N]} \cong \frac{F}{[F, F]}$$

por lo tanto

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Proposición 1.4.26. Sea X una superficie compacta de género $g \geq 0$ y $S \subset X$ conjunto finito. Entonces la inclusión $i : X - S \rightarrow X$ induce un mapeo sobreyectivo $i^* : H_1(X - S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$.

Demostración. Dado que el grupo fundamental de X es $\pi_1(X) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$ donde los α_i, β_i son los bordes del polígono fundamental de X , entonces los puntos S están en el interior del polígono. Desde un vertice el polígono tomemos las curvas que rodean los puntos de S sin intersectarse, llamemosle a estas c_1, \dots, c_m . Se sabe entonces que

$$\pi_1(X - S) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, c_1, \dots, c_m : [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] c_1 \dots c_m = 1 \rangle$$

y por lo tanto el mapeo inducido por la inclusión es sobreyectivo.

1.5. Uniformización y grupos Fuchsianos

Comenzamos con uno de los resultados más importantes de la teoría de superficies de Riemann, el cual nos clasifica todas las que son simplemente conexas.

Teorema 1.5.1. (*Uniformización de Klein-Koebe-Poincaré*) Toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa a una de los siguientes espacios

1. La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.
2. El plano complejo \mathbb{C} .
3. El semiplano superior \mathbb{H} .

Demostración. Ver [DON, cap. 10]. \square

Si X es una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces nos podemos preguntar por su grupo de automorfismos holomorfos $Aut(X)$. Del teorema anterior existe un biholomorfismo $F : X \rightarrow U$ donde $U \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ y por lo tanto tenemos un isomorfismo de grupos

$$Aut(X) \rightarrow Aut(U), \quad g \in Aut(X) \mapsto F \circ g \circ F^{-1} \in Aut(U)$$

Por lo tanto para estudiar el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann simplemente conexa, sólo necesitamos asumir que $X \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Teorema 1.5.2. *Se tienen los siguiente grupos de automorfismos.*

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) &= \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \cong \mathbb{P}GL(2, \mathbb{C}) \\ \text{Aut}(\mathbb{C}) &= \{ z \rightarrow az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\ \text{Aut}(\mathbb{H}) &= \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \cong \mathbb{P}GL(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Demostración. Ver [GG, pág. 14]

Sea X superficie de Riemann y consideremos su cubridor universal $p : U \rightarrow X$ con $U \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Como U es simplemente conexo, entonces del teorema 1.4.23 se tiene que X es isomorfo a $U/Deck(p)$ donde $Deck(p) \leq Aut(U)$. A partir de esta observación podemos dar un teorema de clasificación para superficies de Riemann compactas. Primero hagamos la siguiente observación.

Lema 1.5.3. *No existen subgrupos de $Aut(\mathbb{H})$ actuando libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{H} isomorfos a \mathbb{Z}^2 .*

Demostración. Ver en [GG, pág. 82]. \square

Teorema 1.5.4. *(Uniformización de superficies de Riemann compactas) Sea X superficie de Riemann compacta y consideremos su cubrimiento universal $p : U \rightarrow X$, con $U \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \hat{\mathbb{C}}\}$. Si g_X denota al género de X , se tiene:*

1. Si $g_X = 0$, entonces X es biholomorfa a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.
2. Si $g_X = 1$, entonces X es biholomorfa a un toro \mathbb{C}/Λ con Λ un reticulado en \mathbb{C} , es decir $\Lambda = w_1\mathbb{Z} \oplus w_2\mathbb{Z}$ con $w_1, w_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ y actuando sobre \mathbb{C} como un subgrupo de traslaciones por w_1 y w_2 .
3. Si $g_X \geq 2$, entonces X es biholomorfa a un cociente de la forma \mathbb{H}/K , donde $K \leq Aut(\mathbb{H})$ actuando libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{H} . En este caso diremos que X es **hiperbólica**.

Demostración. La demostración la haremos en los siguientes pasos:

1. Si $g_X = 0$, entonces se tiene un homeomorfismo $X \cong \hat{\mathbb{C}}$ y luego X es simplemente conexo. Del teorema de uniformización la única superficie de Riemann compacta simplemente conexa es $\hat{\mathbb{C}}$ y por lo tanto se tiene el biholomorfismo $X \cong \hat{\mathbb{C}}$.
2. Si $g_X \geq 1$ y tuviese como cubridor universal a $U = \hat{\mathbb{C}}$, entonces $Deck(p) \leq Aut(\hat{\mathbb{C}})$. No es difícil ver que todo elemento diferente de la identidad de $Aut(\hat{\mathbb{C}})$, tiene uno o dos puntos fijos y por lo tanto no hay una acción libre, sin embargo $Deck(p)$ actúa libremente en X . Contradicción.
3. Si $g_X = 1$, entonces se tiene un homeomorfismo al toro $X \cong \mathbb{T}$. Como $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^2$ abeliano, entonces $\pi_1(X)$ es abeliano. Si $\mathbb{Z}^2 \cong Deck(p) \leq Aut(\mathbb{H})$, entonces del lema 1.5.3 se tiene una contradicción. Luego $U \cong \mathbb{C}$. Como $Aut(\mathbb{C})$ consiste de traslaciones y $Deck(p) \cong \mathbb{Z}^2$, entonces $Deck(p)$ está definido por un reticulado Λ .
4. Si $g_X \geq 2$ y tuvieramos $U \cong \mathbb{C}$, entonces $\pi_1(X) \cong Deck(p)$ sería abeliano, pues los elementos de $Aut(\mathbb{C})$ que no tienen puntos fijos son traslaciones. Sin embargo de lo visto en el ejemplo 1.4.3, $\pi_1(X)$ es no abeliano para $g_X \geq 2$ y por lo tanto se tiene $U \cong \mathbb{H}$. Finalmente $\Gamma = Deck(p) \leq Aut(\mathbb{H})$.

□

En el Teorema 1.4.23, se muestra que si $p : U \rightarrow X$ es el cubrimiento universal de una superficie de Riemann X , entonces $U/Deck(p)$ es isomorfo a X . Para obtener el isomorfismo se hace uso de que la acción es libre y propiamente discontinua. Sin embargo si la acción no es libre, $U/Deck(p)$ sigue siendo una superficie de Riemann, pero no biholomorfa a X . Entonces es interesante construir más superficies de Riemann a partir de subgrupos $\Gamma \leq Aut(\mathbb{H})$ tal que actúen de forma propiamente discontinua en \mathbb{H} .

Definición 1.5.5. *Un grupo **Fuchsiano** es un subgrupo $\Gamma \leq Aut(\mathbb{H})$ que actúa de forma propiamente discontinua en \mathbb{H} .*

Si Γ es un grupo Fuchsiano, podemos establecer un análogo al teorema 1.3.3 considerando el mapeo cociente $Q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ definido por $Q(p) = \Gamma p = \{\gamma(p) : \gamma \in \Gamma\}$.

Proposición 1.5.6. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, entonces:*

1. \mathbb{H}/Γ es una superficie de Riemann
2. El mapeo cociente $Q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ es holomorfo y $m_p Q = |\Gamma_p|$, donde Γ_p denota el estabilizador de p .

Demostración. Ver [GG, pág. 110]. □

Proposición 1.5.7. *Un grupo Fuchsiano Γ actúa libremente en \mathbb{H} si y sólo si Γ es libre de torsión.*

Demostración. Ver [GG, pág. 110]. □

Proposición 1.5.8. *Sean $S_1 = \mathbb{H}/\Gamma_1$ y $S_2 = \mathbb{H}/\Gamma_2$ superficies de Riemann uniformizadas por grupos Fuchsianos Γ_1 y Γ_2 actuando libremente. Entonces S_1 y S_2 son isomorfas si y sólo si existe $T \in Aut(\mathbb{H})$ de modo que $T \circ \Gamma_1 \circ T^{-1} = \Gamma_2$.*

Demostración. Sea $T \in Aut(\mathbb{H})$ de modo que $T \circ \Gamma_1 \circ T^{-1} = \Gamma_2$. Notamos que si $\gamma(p) \in \Gamma_1 p$, entonces $T(\gamma(p)) \in \Gamma_2 T(p)$, pues $T \circ \gamma \circ T^{-1} \in \Gamma_2$. Luego definimos un mapeo inducido por T

$$\bar{T} : \mathbb{H}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_2, \quad \Gamma_1 p \rightarrow T(\Gamma_1 p) = \Gamma_2 T(p)$$

Como T es holomorfo, entonces \bar{T} es holomorfo. Además inyectivo, pues $\Gamma_2 T(p) = \Gamma_2 T(q)$ implica la existencia de algún $\gamma \in \Gamma_2$ tal que $T(p) = \gamma(T(q))$ y por esto $p = T^{-1}\gamma T(q)$, obteniendo $\Gamma_1 p = \Gamma_1 q$. Sea $\Gamma_2 h \in \mathbb{H}/\Gamma_2$ y consideremos $p = T^{-1}(h)$, luego $\bar{T}(p) = \Gamma_2 T(p) = \Gamma_2 h$. Por lo tanto se tiene el isomorfismo.

Si tenemos un isomorfismo $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, dado que los mapeos cocientes $Q_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_i$ son cubrimientos universales, existe un levantamiento $\bar{\phi}$ de $\phi \circ Q_1$ e modo que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{H} \\ Q_1 \downarrow & & \downarrow Q_2 \\ \mathbb{H}/\Gamma_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{H}/\Gamma_2 \end{array}$$

si definimos $T = \bar{\phi}$, se completa la demostración. □

Definición 1.5.9. Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g_X \geq 2$ y G un subgrupo de automorfismos holomorfos de X . Si el mapeo cociente $Q : X \rightarrow X/G$ tiene r puntos ramas, cada uno con multiplicidad m_i para $1 \leq i \leq r$ y X/G tiene género $g \geq 0$, entonces diremos que la **firma** de la acción de G es $[g; m_1, \dots, m_r]$.

Teorema 1.5.10. Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g_X \geq 2$ y sea G un subgrupo de automorfismos holomorfos de X . Entonces existen grupos Fuchsianos $\Lambda \triangleright \Gamma \leq \text{Aut}(\mathbb{H})$, Λ actuando libremente en \mathbb{H} , de modo que $G \cong \Gamma/\Lambda$, $X \cong \mathbb{H}/\Lambda$ y $X/G \cong \mathbb{H}/\Gamma$. Además si G tiene firma $[g; m_1, \dots, m_r]$, entonces Γ tiene presentación

$$\left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, c_1, \dots, c_n : c_1^{m_1} = \dots = c_r^{m_r} = 1 = \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^r c_j \right\rangle$$

Demostración. Ver [BRE, Teorema 3.2]. \square

1.6. Integración

1.6.1. 1-formas holomorfas

Definición 1.6.1. Sea X superficie de Riemann.

1. Una **1-forma holomorfa (meromorfa)** sobre un abierto no vacío $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

donde f es holomorfa (meromorfa) en V . Decimos que ω es una 1-forma holomorfa (meromorfa) en la coordenada z .

2. Sean $\omega_1 = f(z)dz, \omega_2 = g(w)dw$ dos 1-formas holomorfas (meromorfas) sobre abiertos V_1, V_2 , respectivamente. Decimos que ω_1 se **transforma** en ω_2 bajo un mapeo holomorfo $T : V_2 \rightarrow V_1$ si $g(w) = f(T(w))T'(w)$ (también se dice que ω_2 es pull-back de ω_1 por T).
3. Sea X superficie de Riemann. Una **1-forma holomorfa (meromorfa) sobre X** es la asignación a cada carta analítica (U, ϕ) de una 1-forma holomorfa (meromorfa) $\omega_{(U, \phi)}$ en el abierto $\phi(U) \subset \mathbb{C}$ con la condición de **compatibilidad** que si $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ son dos cartas tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces $\omega_{(U_1, \phi_1)}$ se transforma en $\omega_{(U_2, \phi_2)}$ bajo el cambio de coordenadas $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. (También se pueden mirar como secciones globales de ciertos fibrados lineales de X)
4. Al conjunto de 1-formas holomorfas (meromorfas) sobre X lo denotaremos por $H^1(X)$ ($\mathcal{M}^1(X)$).

El siguiente resultado nos dice que si queremos definir una 1-forma holomorfa (meromorfa) sobre una superficie de Riemann X , es suficiente dar una 1-forma holomorfa (meromorfa) sobre las cartas de algún atlas, en vez de hacerlo sobre el atlas maximal de X .

Proposición 1.6.2. Sea X superficie de Riemann y \mathcal{A} un atlas (estructura analítica) de X . Supongamos que para un subatlas de \mathcal{A} existe una 1-forma holomorfa (meromorfa) de modo que haya compatibilidad en las intersecciones de dominio. Entonces existe una única 1-forma holomorfa (meromorfa) sobre X extendiendo a todas las 1-formas en cada carta de \mathcal{A} .

Demostración. Ver en [MIR, pág. 106-107]. \square

De forma natural podemos dar estructura de espacio vectorial complejo a $H^1(X)$ y $\mathcal{M}^1(X)$. Si ω_1 y ω_2 son 1-formas de modo que en una coordenada z de X se vean como $f(z)dz$ y $g(z)dz$ respectivamente, entonces para $c \in \mathbb{C}$ definimos $c\omega_1 + \omega_2$ tal que en la coordenada z se vea como $(cf(z) + g(z))dz$. Del mismo modo es posible para $F : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa podemos definir el producto $F\omega$, de modo que localmente se ve $F(z_i)f_i(z_i)dz_i$ para cada coordenada z_i .

Ejemplo 1.6.3. Consideremos la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ y sea $\omega \in H^1(\hat{\mathbb{C}})$. Supongamos que ω se ve como $f(z)dz$ en la carta (\mathbb{C}, id) . Si consideramos la carta en el infinito $(\hat{\mathbb{C}} - \{0\}, 1/z)$ de modo que ω se vea como $g(w)dw$ en esta, entonces $T(w) = 1/w$ y de la definición se debe cumplir que

$$g(w) = f(T(w))T'(w) = -\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2} \quad w \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Análogamente se tiene

$$f(z) = -\frac{g(1/z)}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Notamos que $f(z)$ está definida en \mathbb{C} y que cerca de $z = 0$ se tiene $g(1/z)$ es holomorfa. Por lo tanto $f(z)$ tiene un polo en $z = 0$ y no es holomorfa en todo \mathbb{C} . Luego $H^1(\hat{\mathbb{C}}) = \{0\}$.

Ejemplo 1.6.4. Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticulado. Consideremos la 1-forma ω sobre el toro \mathbb{C}/Λ de modo que para cada coordenadas locales z y w , ω se ve como $f(z)dz$ y $g(w)dw$ respectivamente. Supongamos que los dominios de estas coordenadas tienen intersección no vacía y dado que los mapeos transición entre cartas son traslaciones por un elemento de Λ , entonces por compatibilidad sobre dicha intersección se tiene

$$g(w) = f(w + \lambda) \quad , \lambda \in \Lambda$$

con λ fijo. Luego como la intersección de los dominios es un abierto, por el teorema de la identidad se tiene $g(w) = f(w + \lambda)$ en todo el dominio de la coordenada w . Por la periodicidad respecto a Λ , se tiene que $g(w) = f(w)$. Luego $\omega = f(z)dz$ en toda coordenada z y f es una función holomorfa sobre todo el toro, por teorema de Liouville para superficies de Riemann se tiene f constante. Y por lo tanto

$$H^1(\mathbb{C}/\Lambda) = \langle dz \rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}$$

De los ejemplos anteriores observamos que $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\hat{\mathbb{C}}) = g_{\hat{\mathbb{C}}} = 0$ y que $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{C}/\Lambda) = g_{\mathbb{C}/\Lambda} = 1$. De hecho, en el caso de superficies de Riemann compactas la dimensión (sobre \mathbb{C}) del espacio de formas holomorfas coincide con el género de esta, sin embargo este resultado no es fácil de probar y se debe hacer en varios pasos.

Teorema 1.6.5. Sea X superficie de Riemann compacta y de género $g_X \geq 0$, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X) = g_X$$

Demostración. Ver en [DON, pág. 114]. \square

Definición 1.6.6. Sea $f : U \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa (meromorfa) de modo que en la coordenada local $z = x + iy$ se vea de forma $f(z) = f(x, y)$. Entonces podemos definir el **operador** desde las funciones holomorfas en un abierto $U \subset X$ a $H^1(X)$, definido como

$$df := \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) dz$$

Este operador cumple con la siguiente propiedad que lo caracteriza

$$d(fg) = gdf + fdg$$

para f, g funciones holomorfas (meromorfas).

Definición 1.6.7. Sea $F : X \rightarrow Y$ mapeo holomorfo entre superficies de Riemann. Sea $\omega \in H^1(Y)$ y w coordenada local en una vecindad $U' \subset Y$ de modo que $\omega = g(w)dw$. Sea también z carta local para una vecindad $U \subset X$ con $F(U) \subset U'$, entonces si en estas coordenadas $f(z)$ es la forma local de F definimos una 1-forma holomorfa

$$F^*(\omega) = g(f(z))f'(z)dz$$

al operador $F^* : H^1(Y) \rightarrow H^1(X)$ lo llamamos el **pull-back** inducido por F .

Ejemplo 1.6.8. Para $k \geq 3$ entero positivo sea $F_k = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^2 : x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0\}$ la curva de Fermat de orden k . Se tiene que las proyecciones $x_1, x_2, x_3 : F_k \rightarrow \mathbb{C}$ satisfacen

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0$$

entonces sea U un abierto de F_k al rededor de un punto $p = [1, p_2, p_3]$, de modo que las funciones $y_i = x_i/x_1$ para $i = 2, 3$ sean holomorfas. Luego podemos aplicar el operador d a la identidad

$$1 + y_2^k + y_3^k = 0$$

de donde se obtiene

$$\frac{dy_2}{y_3^{k-1}} = -\frac{dy_3}{y_2^{k-1}}$$

Si $y_2 = 0$, entonces $y_3 \neq 0$ y por esto tiene que

$$\frac{dy_2}{y_3^{k-1}}$$

es una 1-forma holomorfa en U . Si $p = [0, p_2, p_3]$, entonces al aplicar un cambio de cartas $t = 1/y_2$ se tiene

$$\frac{dy_2}{y_3^{k-1}} = -\frac{dt}{t^2 y_3^{k-1}}$$

En $t = 0$ tenemos que y_3 tiene un polo de orden 1, lo que implica que $t^2 y_3^{k-1}$ tiene un polo de orden $k - 3$ y dado que $k \geq 3$, se tiene que la 1-forma

$$\frac{dy_2}{y_3^{k-1}}$$

define una 1-forma holomorfa sobre todo F_k . Se puede probar que siguen siendo holomorfas las siguientes 1-formas

$$\theta_{r,\alpha} := \frac{y_2^r dy_2}{y_3^\alpha}$$

con $0 \leq r \leq \alpha - 2$ y $0 \leq \alpha \leq k - 1$ enteros. Además consideremos el conjunto

$$I_k = \{(r, \alpha) : 0 \leq r \leq \alpha - 2, 0 \leq \alpha \leq k - 1\}$$

el cual tiene cardinalidad

$$\#I_k = \frac{(k-1)(k-2)}{2} = g_{F_k}$$

Además no es difícil ver que el conjunto

$$\{\theta_{r,\alpha} : (r, \alpha) \in I_k\}$$

es \mathbb{C} -linealmente independiente, obteniendo una base para $H^1(F_k)$.

Ejemplo 1.6.9. Recordemos la curva proyectiva no singular $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ para $k, n \geq 2$ enteros definida en el ejemplo 1,1,16 definida por la intersección completa

$$C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) := \begin{cases} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = 0 \\ \lambda_2 x_1^k + x_2^k + x_5^k & = 0 \\ \dots & \dots \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^n \mathbb{C}$$

para $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ y distintos entre si. En [RH, pág. 8] se encuentra una base para el espacio de 1-formas holomorfas de $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.6.10. Sean $y_i = x_i/x_1$ para $i = 2, \dots, n+1$, los mapeos coordenadas localmente holomorfas sobre $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ y consideremos el conjunto

$$I_{k,n} = \{(r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) : 0 \leq \alpha_j \leq k - 1, 0 \leq r \leq \sum_{j=3}^{n+1} \alpha_j - 2, r \in \mathbb{Z}\}$$

1. Si $(r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in I_{k,n}$, entonces

$$\theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = \frac{y_2^r dy_2}{y_3^{\alpha_3} \dots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}$$

es una 1-forma holomorfa sobre $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$

2. $\#I_{k,n} = g_{k,n}$

3. La familia

$$\{\theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}\}_{(r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}) \in I_{k,n}}$$

es una base para el espacio $H^1(C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}))$ de 1-formas holomorfas de $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$

1.6.2. Integración

Definición 1.6.11. Sea X superficie de Riemann. Una **curva suave a trozos** en X es un mapeo continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de modo que para toda carta (U, ϕ) con $U \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset$, se tiene que $\phi \circ \gamma(t)$, donde $t \in \gamma^{-1}(U \cap \gamma([0, 1]))$, es suave a trozos en el sentido clásico.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ & \searrow & \downarrow \phi \\ & \phi \circ \gamma(t) & \mathbb{C} \end{array}$$

Como $[0, 1]$ es compacto y γ es continua, se tiene $\gamma([0, 1])$ compacto en X . Luego si consideramos una familia de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ cubriendo a $\gamma([0, 1])$, entonces por compacidad existe una colección finita $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^n$ de estas cartas cubriendo a $\gamma([0, 1])$. Entonces es posible encontrar una partición finita de $[0, 1]$ dada por $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ de modo que cada $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ esté contenido en su respectivo U_i . A partir de esta observación tenemos

Definición 1.6.12. Sea $\omega \in H^1(X)$ de modo que para cada $1 \leq i \leq n$, ω se ve localmente como $f_i(z_i)dz_i$ sobre cada carta (U_i, ϕ_i) , entonces la **integral** de ω sobre la curva γ es definida por

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t))(\phi_i \circ \gamma)'(t) dt$$

Supongamos que existe otra colección finita de cartas $\{(V_j, \psi_j)\}$ cubriendo a $\gamma[0, 1]$ y sea $0 = s_1 < \dots < s_m = 1$ la partición de $[0, 1]$ asociada. Supongamos que para cada i se tiene $[t_i, t_{i+1}] \subset [s_j, s_{j+1}] \cup \dots \cup [s_{j+k-1}, s_{j+k}]$ con $s_j \leq t_i \leq s_{j+1}$ y $s_{j+k-1} \leq t_{i+1} \leq s_{j+k}$. Si $\omega \in H^1(X)$ se ve localmente como $f_i dz_i$ en $\gamma([t_i, t_{i+1}])$, por compatibilidad en intersección de dominios se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma[t_i, t_{i+1}]} \omega &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t)) \gamma'(t) dz_i \\ &= \int_{t_i}^{s_{j+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t)) (\phi_i \circ \gamma)'(t) dt + \sum_{l=2}^{k-2} \int_{s_{j+l}}^{s_{j+l+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t)) (\phi_i \circ \gamma)'(t) dt \\ &\quad + \int_{s_{j+k-1}}^{t_{i+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t)) (\phi_i \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_{\gamma[t_i, s_{j+1}]} \omega + \int_{\gamma[s_{j+2}, s_{j+k-1}]} \omega + \int_{\gamma[s_{j+k-1}, t_{i+1}]} \omega \end{aligned}$$

A partir de esto ultimo, concantenando todas las integrales sobre los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ se tiene que la definición anterior es independiente de la elección de la partición de $\gamma([0, 1])$ por cartas, por lo tanto el operador integración sobre una superficie de Riemann está bien definido.

Recordemos de la sección 1.4 que el grupo fundamental $\pi_1(X)$ está constituido por caminos cerrados módulo homotopía. Localmente en una superficie de Riemann X un camino cerrado $\gamma \in \pi_1(X)$ se ve como un camino continuo compacto en \mathbb{C} , el cual es homotópico a una línea (suave). Al considerar el camino poligonal formado por estas deformaciones, se puede probar que γ es homotópico a un camino suave a trozos y por lo tanto podemos integrar sobre $\pi_1(X)$ al notar (ver teorema siguiente) que la integral es invariante por deformaciones homotópicas.

Resumimos en el siguiente teorema las propiedades de la integral.

Teorema 1.6.13. Sean $\omega \in H^1(X)$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ curva suave a trozos en X .

1. El operador $\int_{\gamma} \cdot : H^1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal.

2. Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un dominio conteniendo a γ , entonces

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

3. Si γ^{-1} es la curva obtenida al invertir la orientación de γ se tiene

$$\int_{\gamma^{-1}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

4. Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann, entonces se tiene que $F \circ \gamma$ sigue siendo una curva suave a trozos en Y y además si $\theta \in \mathcal{H}^1(Y)$ entonces

$$\int_{F \circ \gamma} \theta = \int_{\gamma} F^* \theta$$

5. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ curvas suaves a trozos con iguales punto de inicio y de fin. Si son homotópicos sobre X , entonces

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

6. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ curvas suaves a trozos en X tal que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, entonces

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Demostración. Ver en [MIR, pág. 120]. \square

Como $H_1(X, \mathbb{Z})$ es la abelianización de $\pi_1(X)$, entonces para cada par $[\gamma_1], [\gamma_2] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ podemos definir sin problemas para $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{m[\gamma_1] + n[\gamma_2]} \omega := m \int_{\gamma_1} \omega + n \int_{\gamma_2} \omega$$

A partir de esto, es posible probar (se ve de forma implícita en lo que sigue del capítulo) que el mapeo \mathbb{Z} -bilineal

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\gamma, \omega) \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

es no degenerado.

1.6.3. 1-formas suaves

Todo número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tiene también una representación como un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Luego todo mapeo holomorfo $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser pensado como un mapeo suave desde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ de modo que

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Luego si X es una superficie de Riemann y $z = x + iy$ una coordenada local, podemos definir su **coordenada conjugada** por $\bar{z} = x - iy$.

Definición 1.6.14. Sea X superficie de Riemann. Una **1-forma suave** es un objeto ω de modo que para cada carta (U_i, z_i) , ω se ve como

$$f_i(z_i, \bar{z}_i)dz + g_i(z_i, \bar{z}_i)d\bar{z}_i$$

donde $f_i, g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ son mapeos suaves, junto con la condición de compatibilidad:

$$f_i(T(z_j), \overline{T(z_j)}) \frac{dT(z_j)}{dz_j} = f_j(z_j, \bar{z}_j)$$

$$g_i(T(z_j), \overline{T(z_j)}) \frac{d\overline{T(z_j)}}{d\bar{z}_j} = g_j(z_j, \bar{z}_j)$$

donde $T(z_j) = z_i$ es el mapeo transición entre las cartas. Al espacio de 1-formas suaves lo denotaremos por $\Omega^1(X)$.

Notamos además que si $\omega \in \Omega^1(X)$, podemos definir su conjugado $\bar{\omega}$ al definirlo localmente como

$$\bar{f}_i d\bar{z}_i + \bar{g}_i dz_i$$

En particular tenemos un análogo de la proposición 1.6.2, es decir, si defino una 1-forma suave sobre un abierto $U \subset X$, entonces la puedo extender a una forma suave sobre todo X .

Definición 1.6.15. Si denotamos por $C^\infty(U)$ a las funciones suaves sobre un abierto $U \subset X$, entonces definimos un operador $d : C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(X)$ mediante la extensión de

$$d(f) = df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Observación 1.6.16. Notamos que si f es holomorfa, entonces

$$\partial f / \partial \bar{z} = 0$$

por lo tanto podemos ver a d como una extensión del anterior operador d definido sobre $H^1(X)$ en 1.6.6.

Definición 1.6.17. Sea X superficie de Riemann. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva suave a trozos con un partición $0 = t_1 < \dots < t_n = 1$ dada por cartas (U_i, z_i) para $i \in 1, \dots, n$ de X , entonces la **integral** de $\omega \in \Omega^1(X)$ está definida por

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i(\phi_i \circ \gamma(t), \overline{\phi_i \circ \gamma(t)}) (\phi_i \circ \gamma)'(t) + g_i(\phi_i \circ \gamma(t), \overline{\phi_i \circ \gamma(t)}) (\overline{\phi_i \circ \gamma})'(t) dt$$

Proposición 1.6.18. Sea X superficie de Riemann compacta y $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ una base de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

1. Sea $\omega \in \Omega^1(X)$. Si se cumple

$$\int_{a_i} \omega = \int_{b_i} \omega = 0$$

para cada i , entonces existe una función $f \in C^\infty(X)$ de modo que $\omega = df$.

2. Sean $\omega_1, \omega_2 \in H^1(X)$. Si existe $f \in C^\infty(X)$ de modo que

$$\omega_1 + \overline{\omega_2} = df$$

entonces, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Demostración. Ver en [GRIFF, pág. 107-108]. \square

Proposición 1.6.19. Sea X superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$. Sea $\omega_1, \dots, \omega_g \in H^1(X)$ es una base para el espacio de 1-formas holomorfas. Si para $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ se tiene

$$\int_\gamma \omega_i = 0$$

para cada $i \in \{1, \dots, g\}$, entonces $\gamma = 0$ en homología.

Demostración. Si c_1, \dots, c_{2g} es una base para $H_1(X, \mathbb{Z})$, entonces $\gamma = m_1 c_1 + \dots + m_{2g} c_{2g}$ para algunos $m_i \in \mathbb{Z}$. Se tiene

$$\int_\gamma \omega_i = m_1 \int_{c_1} \omega_i + \dots + m_{2g} \int_{c_{2g}} \omega_i = 0 \quad \forall i$$

y si consideramos el conjugado

$$\int_\gamma \overline{\omega_i} = m_1 \int_{c_1} \overline{\omega_i} + \dots + m_{2g} \int_{c_{2g}} \overline{\omega_i} = 0 \quad \forall i$$

entonces la matriz

$$P_{2g \times 2g} = \left(\int_{c_j} \omega_1, \dots, \int_{c_j} \omega_g, \int_{c_j} \overline{\omega_1}, \dots, \int_{c_j} \overline{\omega_g} \right)_{1 \leq j \leq 2g}$$

tiene kernel no nulo. En la sección 1.7 (proposición 1.7.3) probaremos que P es no singular ocupando la proposición anterior, lo que implica $m_1 = \dots = m_{2g} = 0$ y luego $\gamma = 0$ en homología. \square

1.6.4. Teoría de la intersección.

Sea L una curva cerrada suave a trozos no homotópica a un punto en X superficie de Riemann compacta. Dado que L es compacta, entonces tenemos un cubrimiento finito que define una region anular G . Escogiendo orientación, L divide a G en dos regiones G^- y G^+ . Consideremos una región anular $G_0 \subset \text{Int}(G)$ conteniendo a L y denotemos $G_0^- = G_0 \cap G^-$, elegimos un mapeo suave sobre $X - L$ de modo que

$$f_L := \begin{cases} 1 & \text{en } G_0^- \\ 0 & \text{en } X - G^- \end{cases} \quad f_L \in C^\infty(X)$$

Teorema 1.6.23. Si X es una superficie de Riemann compacta de género g y $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ es una base canónica de $H_1(M, \mathbb{Z})$, entonces existe una única base dual $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de $H^1(X)$ tal que

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker y además la matriz

$$\mathbf{Z} = \left(\int_{b_j} \omega_k \right)$$

es simétrica con parte imaginaria positiva definida.

Demostración. Ver en [FK, pág. 61]. \square

1.6.5. Logaritmos en el plano pinchado.

Consideremos $R \subset \hat{\mathbb{C}}$ un subconjunto finito con $0, \infty \in R$. Podemos considerar el cubridor universal de $\mathbb{C} - R$ dado por

$$p : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - R$$

con U simplemente conexo (para $|R| = 2$ se tiene $U = \mathbb{C}$ y en general $U = \mathbb{H}$). Para cada $r_i \in R - \{\infty\}$ consideremos los mapeos $p_i = p - r_i$ que no se anulan en U , por esto último existe una función $\log p_i$ holomorfa en todo U de modo que

$$\exp(\log p_i) = p_i$$

Sea $\phi \in Deck(p)$, luego $\exp \circ \log(p_i) \circ \phi = p_i \circ \phi = p_i = \exp \circ \log(p_i)$, por lo tanto los mapeos

$$u \rightarrow \log(p_i) \circ \phi(u) - \log(p_i)(u)$$

son constantes en U . Además si $u \in U$, entonces

$$\log(p_i) \circ \phi(u) - \log(p_i)(u) = \int_u^{\phi(u)} d \log(p_i) = \int_\gamma \frac{dz}{z - r_i}$$

donde γ es la proyección de la curva que va desde u a $\phi(u)$ mediante p_i . Luego existe un entero $L(p_i, \phi)$ de modo que

$$\log(p_i) \circ \phi(u) - \log(p_i)(u) = 2\pi i L(p_i, \phi)$$

Proposición 1.6.24. Si $\phi, \psi \in Deck(p)$, entonces el simbolo $L(p_i, \phi)$ satisface la relación

$$L(p_i, \phi \circ \psi) = L(p_i, \phi) + L(p_i, \psi)$$

para cada f que tenga todos sus ceros y polos en R .

Demostración. Consideremos el camino β que va desde u a $\psi(u)$ y dado que U es simplemente conexo, se tiene que todo camino desde $\phi(u)$ a $\phi \circ \psi(u)$ es homotópico al camino

$\phi(\beta)$. Luego

$$\begin{aligned}
 \int_u^{\phi\psi(u)} d \log p_i &= \int_u^{\phi(u)} d \log p_i + \int_{\phi(u)}^{\phi\psi(u)} d \log p_i \\
 &= \int_u^{\phi(u)} d \log p_i + \int_u^{\psi(u)} \phi^* d \log p_i \\
 &= \int_u^{\phi(u)} d \log p_i + \int_u^{\psi(u)} d \log p_i \circ \phi \\
 &= \int_u^{\phi(u)} d \log p_i + \int_u^{\psi(u)} d \log p_i
 \end{aligned}$$

obteniendo el resultado. \square

Definición 1.6.25. Sea h holomorfa definida en U y no nula. Dado un entero $k \geq 2$, diremos que h es una k -raíz de p_i si se cumple que

$$\exp\left(\frac{1}{k} \log p_i\right) = \exp(\log h)$$

es decir, $h^k = p_i$.

Recordemos que la existencia de k -raíces para cada k es equivalente a la existencia de logaritmos, lo cual es se cumple en este caso.

Proposición 1.6.26. Si h es una k -raíz de p_i y $\zeta = \exp(2\pi i/k)$, entonces $h \circ \phi = \zeta^{L(p_i, \phi)} h$ para cada $\phi \in Deck(p)$.

Demostración. Notamos que

$$\begin{aligned}
 \frac{h \circ \phi}{h} &= \frac{\exp(\log h \circ \phi)}{\exp(\log h)} \\
 &= \exp\left(\frac{\log p_i \circ \phi - \log p_i}{k}\right) \\
 &= \exp\left(\frac{2\pi i L(p_i, \phi)}{k}\right) \\
 &= \zeta^{L(p_i, \phi)} \quad \square
 \end{aligned}$$

Sabemos que $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - R)$ es un grupo libre finitamente generado por $|R| - 1$ elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_{|R|-1}$, donde cada γ_i es homotopico a una circunferencia centrada en $r_i \in R - \{\infty\}$ de radio pequeño y de índice uno. Del teorema 1.4.19 podemos considerar los generadores $\phi_i \in Deck(p)$ asociados a cada generador γ_i y luego se tiene

$$L(p_i, \phi_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - r_i} = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

1.7. Períodos y variedad Jacobiana

Sea X una superficie de Riemann compacta. Sea ω una 1-forma y tomamos un par de caminos γ_1, γ_2 de modo que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, luego del teorema 1.6.13 se nos asegura que

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Por lo tanto para cada clase de homotopía $[\gamma] \in \pi_1(X)$ podemos definir

$$\int_{[\gamma]} \omega := \int_{\gamma} \omega$$

y que por lo anterior está bien definido.

Recordamos que si $[\gamma_1], \dots, [\gamma_n] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ podemos definir sin problemas para $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{m_1[\gamma_1] + \dots + m_n[\gamma_n]} \omega := m_1 \int_{\gamma_1} \omega + \dots + m_n \int_{\gamma_n} \omega$$

Luego para cada clase $[\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z})$, podemos definir un funcional en el dual $H^1(X)^*$ dado por

$$\int_{[\gamma]} \cdot : H^1(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto \int_{[\gamma]} \omega$$

Definición 1.7.1. *Un funcional $\lambda \in H^1(X)^*$ es un **período**, si existe un $[\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ tal que*

$$\lambda = \int_{\gamma} \cdot$$

De la proposición 1.6.19, se tiene la inclusión

$$i : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X)^*, \quad [\gamma] \mapsto \int_{[\gamma]} \cdot$$

de hecho, si $i([\gamma_1]) = i([\gamma_2])$, entonces

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \omega = 0$$

para todo $\omega \in H^1(X)$, lo que implica $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

Definición 1.7.2. *La variedad **Jacobiana** de una superficie de Riemann compacta X , viene dada por el cociente*

$$Jac(X) := \frac{H^1(X)^*}{i(H_1(X, \mathbb{Z}))}$$

En el ejemplo 1.4.25 vimos que si X tiene género $g \geq 1$, entonces $H_1(X, \mathbb{Z})$ es de rango $2g$ con generadores $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. Del teorema 1.6.5 se tiene que $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X) = g$. Sea $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ una base de $H^1(X)$. Además $H^1(X)^* \cong \mathbb{C}^g$ y por ello podemos ver a $i(H_1(X, \mathbb{Z}))$ como el generado por la familia de vectores períodos

$$A_i := \left(\int_{a_i} \omega_1, \dots, \int_{a_i} \omega_g \right)$$

$$B_i := \left(\int_{b_i} \omega_1, \dots, \int_{b_i} \omega_g \right)$$

para cada $1 \leq i \leq g$.

Proposición 1.7.3. *La familia $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ es \mathbb{R} -linealmente independiente.*

Demostración. Probaremos por contradicción. Supongamos los vectores $\{A_i, B_i\}_{i=1, \dots, g}$ son \mathbb{R} -dependientes, es decir existen $c_1, \dots, c_{2g} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$c_1 A_1 + \dots + c_g A_g + c_{g+1} B_1 + \dots + c_{2g} B_g = 0$$

Tomando conjugados tenemos

$$c_1 \overline{A_1} + \dots + c_g \overline{A_g} + c_{g+1} \overline{B_1} + \dots + c_{2g} \overline{B_g} = 0$$

Consideremos ahora la matrix

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & \overline{A_1} \\ \dots & \dots \\ A_g & \overline{A_g} \\ B_1 & \overline{B_1} \\ \dots & \dots \\ B_g & \overline{B_g} \end{pmatrix}_{2g \times 2g}$$

De las igualdades anteriores, se tiene que P tiene kernel no nulo y por ello el rango complejo de P es menor que $2g$. Por lo tanto existen $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \eta_1, \dots, \eta_g$ complejos y no nulos de modo que resuelvan el sistema

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_g \\ \eta_1 \\ \dots \\ \eta_g \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\int_{a_i} \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i + \sum_{i=1}^g \eta_i \overline{\omega_i} = 0$$

$$\int_{b_i} \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i + \sum_{i=1}^g \eta_i \overline{\omega_i} = 0$$

para todo i . Si denotamos $\varphi_1 = \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i$ y $\varphi_2 = \sum_{i=1}^g \eta_i \overline{\omega_i}$, de la primera parte del lema 1.6.18, se tiene que existe $f \in C^\infty(X)$ de modo que $\varphi_1 + \overline{\varphi_2} = df$ y luego ocupando la segunda parte, se tiene $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Como $\omega_1, \dots, \omega_g$ es una base del \mathbb{C} -espacio vectorial $H^1(X)$ se tiene $\lambda_i = \eta_i = 0$ para todo i . \square

De esta última proposición obtenemos que $i(H_1(X, \mathbb{Z}))$ está generado por $2g$ elementos \mathbb{R} -linealmente independientes, dentro de un espacio con dimensión compleja g . Sea Λ el conjunto generado sobre \mathbb{Z} por los vectores períodos $\{A_i, B_i\}_{i=1, \dots, g}$, es decir,

$$\Lambda = \{m_1 A_1 + \dots + m_g A_g + n_1 B_1 + \dots + n_g B_g : m_i, n_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

En particular Λ es un reticulado en \mathbb{C}^{2g} , luego se tiene que

$$Jac(X) = H^1(X)^*/i(H_1(X, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{C}^{2g}/\Lambda$$

y por lo tanto podemos ver a $Jac(X)$ como un toro complejo g -dimensional.

Definición 1.7.4. Una *variedad abeliana* (compleja) de dimensión $g \geq 0$, es un toro complejo g -dimensional que admite un embebimiento holomorfo a algún espacio proyectivo $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$, es decir, un mapeo holomorfo e inyectivo que preserve la estructura de grupo abeliano. De otro modo, una variedad abeliana compleja es una variedad proyectiva compleja que admite una estructura de grupo abeliano de modo que las operaciones sean holomorfas.

Recordamos que un toro complejo g -dimensional en general, es un cociente V/Λ donde V es un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{C}} V = g$ y Λ es un reticulado, es decir, un grupo abeliano libre generado por $2g$ elementos \mathbb{R} -linealmente independientes de V . Sea v_1, \dots, v_g base para V y l_1, \dots, l_{2g} base de Λ , entonces si consideremos las escrituras únicas

$$v_j = \pi_{j,1} l_1 + \dots + \pi_{j,2g} l_{2g}, \quad 1 \leq j \leq g$$

con $\pi_{ij} \in \mathbb{C}$. Definimos la matriz de períodos del toro V/Λ por

$$\Pi := \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,2g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{g,1} & \cdots & \pi_{g,2g} \end{pmatrix}_{g \times 2g}$$

Teorema 1.7.5. (Relaciones de Riemann) Un toro complejo g -dimensional V/Λ es una variedad abeliana si y sólo si existe una matriz $J \in M_{2g \times 2g}(\mathbb{Z})$ tal que

1. $\Pi J^{-1} \Pi^t = 0$
2. $i \Pi J^{-1} \bar{\Pi}^t$ es definida positiva.

En particular si $\det(J) = 1$, decimos que la variedad abeliana es **principalmente polarizada** por J .

Demostración. Ver en [BL, pág. 73]. \square

Teorema 1.7.6. Si X es una superficie de Riemann compacta de género g , entonces su variedad Jacobiana $Jac(X)$ es una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión g .

Demostración. Consideremos una base canónica $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ para $H_1(X, \mathbb{Z})$. Del teorema 1.6.23 existe una base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de modo que

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker y la matriz

$$\mathbf{Z} = \left(\int_{b_j} \omega_k \right)$$

es simétrica con parte imaginaria positiva definida. Luego la matriz de períodos del toro complejo g -dimensional $H^1(X)^*/i(H_1(X, \mathbb{Z}))$ viene dada por

$$\Pi = (I_g, \mathbf{Z})$$

si consideramos la matriz de intersección de la base canónica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que

$$\Pi J^{-1} \Pi^t = (I_g, \mathbf{Z}) \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} (I_g, \mathbf{Z})^t = \mathbf{Z} - \mathbf{Z} = 0$$

y

$$i\Pi J^{-1} \bar{\Pi}^t = i(I_g, \mathbf{Z}) \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} (I_g, \bar{\mathbf{Z}})^t = i(Z - \bar{Z}) = 2\text{Im}(Z)$$

la cual es definida positiva. Por lo tanto del teorema anterior se tiene que $Jac(X)$ es una variedad abeliana principalmente polarizada. \square

Finalizaremos este capítulo con el teorema de Torelli. Sea \mathcal{M}_g el conjunto de todas las superficies de Riemann compactas de género $g \geq 0$ módulo biholomorfismo y \mathcal{A}_g es conjunto de todas las variedades abelianas g -dimensionales principalmente polarizadas módulo isomorfismos.

Teorema 1.7.7. (Torelli) *El mapeo*

$$T : \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{A}_g, \quad X \mapsto Jac(X)$$

es inyectivo.

El teorema anterior nos dice que la Jacobiana de una superficie de Riemann compacta determina completamente a la superficie módulo biholomorfismos. Por lo tanto nos podemos hacer la siguiente pregunta, ¿Cuándo una variedad abeliana principalmente polarizada determina a una superficie de Riemann?. Esto es conocido como el **problema de Schottky**.

Capítulo 2

Curvas generalizadas de Fermat

En este capítulo estudiaremos las curvas generalizadas de Fermat, objetos que generalizan a las curvas de Fermat clásicas y que fueron estudiados en primera instancia en [GHL]. Con referencia en el trabajo mencionado, veremos que nuestra curva ejemplo $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ es un modelo para las curvas generalizadas de Fermat. Al final de este capítulo presentaremos un método para encontrar un conjunto finito de generadores para el reticulado $i(H_1(C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}), \mathbb{Z}))$ definido en la sección 1.7.

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Sean $k, n \geq 2$ enteros. Una **curva generalizada de Fermat** de tipo (k, n) es una superficie de Riemann compacta S admitiendo un grupo $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ de automorfismos holomorfos, de modo que S/H sea biholomorfa a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ y tenga exactamente $n + 1$ puntos ramas cada uno de orden k . Es decir, que la acción de H tenga firma $[0; k, n+1, k]$. En este caso, H se llama un **grupo generalizado de Fermat** de tipo (k, n) y el par (S, H) un **par generalizado de Fermat** de tipo (k, n) .

De la definición, ocupando la formula de Hurwitz podemos obtener el género de una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) dado por

$$g_{k,n} = \frac{2 + k^{n-1}((n-1)(k-1) - 2)}{2}$$

Ejemplo 2.1.2. Consideremos la curva de Fermat de orden k dada por $F_k = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} : x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0\}$. Si $\zeta = e^{2\pi i/k}$, entonces tenemos los siguientes automorfismos

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto [\zeta x_1, x_2, x_3]$$

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, \zeta x_2, x_3]$$

que generan un subgrupo H_k isomorfo a \mathbb{Z}_k^2 . Del ejemplo 1.2.11 tenemos que F_k/H_k tiene precisamente 3 puntos ramas. Recordamos que $g_{F_k} = (k-1)(k-2)/2$ y de la formula de Hurwitz para acciones de grupo tenemos

$$k(k-3) = k^2 \left(2g_{F_k/H_k} - 2 + \sum_{i=1}^k (1 - 1/r_i) \right) = k^2 m$$

Luego si $g_{F_k/H_k} \geq 1$, se tiene $k(k-3) \geq k^2$ lo cual es absurdo y por lo tanto $g_{F_k/H_k} = 0$. De esta manera, F_k es una curva generalizada de Fermat de tipo $(k, 2)$.

Ejemplo 2.1.3. En vista de lo hecho en los ejemplos 1.1.16, 1.2.11 y 1.3.6, nos resulta sencillo probar que el par $(C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}), H_0)$, donde H_0 es subgrupo de automorfismos generado por los

$$a_j[x_1, \dots, x_{n+1}] = [x_1, \dots, x_{j-1}, \zeta x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}]$$

para $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto el par $(C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}), H_0)$ es una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) para todo $k, n \geq 2$ enteros.

Definición 2.1.4. Diremos que dos curvas generalizadas de Fermat (S_1, H_1) y (S_2, H_2) son **holomórficamente equivalentes**, si existe un biholomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ de modo que $f \circ H_1 \circ f^{-1} = H_2$.

2.2. Modelo algebraico

Notamos que si $g_{k,n} \leq 1$, entonces $(n-1)(k-1) \leq 2$. Por lo tanto los casos no hiperbólicos son:

1. $(k, n) = (2, 2)$: $S = \hat{\mathbb{C}}$ y $H = \langle A(z) = -z, B(z) = 1/z \rangle$.
2. $(k, n) = (3, 2)$: $S = \mathbb{C}/\Lambda_{e^{2\pi i/3}}$, donde $\Lambda_{e^{2\pi i/3}} = \langle z \rightarrow z+1, z \rightarrow z+e^{2\pi i/3} \rangle$ y $H = \langle A(z) = e^{2\pi i/3}z, B(z) = z + (2+e^{2\pi i/3})/3 \rangle$. Notamos que esta superficie corresponde la curva de Fermat de grado 3 con ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 0$
3. $(k, n) = (2, 3)$: $S = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, donde $\tau \in \mathbb{C}$ con $Im(\tau) > 0$, $\Lambda_\tau = \langle z \rightarrow z+1, z \rightarrow z+\tau \rangle$ y $H = \langle A(z) = -z, B(z) = -z+1/2, C(z) = -z+\tau/2 \rangle$. Este caso corresponde a la curva algebraica dado por $\{x^2 + y^2 + z^2 = \lambda x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$, donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

De aquí en adelante trabajaremos con el caso de curvas generalizadas de Fermat de tipo (k, n) hiperbólicas, es decir $(n-1)(k-1) > 2$.

Teorema 2.2.1. Sea (S, H) una curva de Fermat generalizada de tipo (k, n) y Γ el grupo Fuchsiano que uniformiza a S/H . Entonces (S, H) es holomórficamente equivalente al par $(\mathbb{H}/\Gamma', \Gamma/\Gamma')$, donde Γ' es el subgrupo conmutador de Γ .

Demostración. Teorema 1.5.10 nos asegura que existen grupos Fuchsianos $\Gamma \triangleleft L \leq Aut(\mathbb{H})$, de modo que $\Gamma/L \cong H$ con $S = \mathbb{H}/L$ y $S/H = \mathbb{H}/\Gamma$. Sea $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ el conmutador de Γ . Como Γ es un grupo libre finitamente generado por n elementos y cada uno de orden k , se tiene

$$H' = \Gamma/\Gamma' \cong \mathbb{Z}_k^n$$

Dado que Γ' es el menor grupo que abelianiza a Γ , se tiene entonces que $\Gamma' \triangleleft L \triangleleft \Gamma$ y de este modo $[L : \Gamma'] = 1$, luego $L = \Gamma'$ obteniendo $S \cong \mathbb{H}/\Gamma'$. Considerando la acción de $\Gamma/\Gamma' \cong H'$ se tiene que (S', H') es una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) . Sea $f : S \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma'$ el biholomorfismo obtenido y supongamos que Γ_0 es un grupo Fuchsiano uniformizando $S'/(\Gamma/\Gamma')$, entonces tenemos el isomorfismo

$$\mathbb{H}/\Gamma \cong \mathbb{H}/\Gamma_0$$

de la proposición 1.5.8 se tiene que existe $T \in Aut(\mathbb{H})$ de modo que $T \circ \Gamma \circ T^{-1} = \Gamma_0$ y por lo tanto

$$T \circ \Gamma/\Gamma' \circ T^{-1} = \Gamma_0/\Gamma'_0$$

De lo anterior se deduce que $f \circ H \circ f^{-1} = T \circ \Gamma/\Gamma' \circ T^{-1}$ para algún $T \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ y por lo tanto (S, H) y (S', H') son holomórficamente equivalentes. \square

Sea (S, H) una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) y sean $R = \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ los puntos ramas de $S \rightarrow S/H$, entonces existe una transformación de Moebius T que envía R a $\{\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ con $T(r_i) = \lambda_{i-2}$ para $i \geq 3$. Por el teorema anterior tenemos que toda curva generalizada de Fermat está determinada por el grupo Fuchsiano que uniformiza a S/H , usando el hecho de que $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})/H_0$ tiene grupo Fuchsiano isomorfo al de S/H se concluye:

Teorema 2.2.2. *Sea (S, H) curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) y salvo transformaciones de Moebius, sean*

$$\{\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$$

*los puntos ramas de $S \rightarrow S/H$, entonces (S, H) y $(C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}), H_0)$ son holomórficamente equivalentes. Decimos que (S, H) es **modelado** por $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$.*

Demostración. Para más detalles ver [GHL]. \square

Una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) , donde $(k-1)(n-1) \leq 2$ (es decir, las que no son hiperbólicas), tienen diferentes grupos generalizados de Fermat de tal tipo. Pero todos esos grupos son conjugados en el grupo total de automorfismos holomorfos de la curva. En [HKLP] se probó que en el caso hiperbólico tenemos unicidad.

Teorema 2.2.3. *Sean $k, n \geq 2$ enteros tales que $(k-1)(n-1) > 2$. Entonces cada curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) tiene un único grupo generalizado de Fermat de tipo (k, n) .*

Observación 2.2.4. *Es importante notar que existen superficies de Riemann de género $g \geq 2$ que pueden admitir dos grupos generalizados de Fermat de tipos diferentes.*

2.3. Períodos

En esta sección encontraremos la matriz de períodos para la curva generalizada de Fermat de tipo (k, n) dada por

$$C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) := \begin{cases} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = 0 \\ \lambda_2 x_1^k + x_2^k + x_5^k & = 0 \subset \mathbb{P}^n \\ \dots & \dots \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = 0 \end{cases}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Tenemos su grupo generalizado de Fermat $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ generado por los automorfismos $a_j : [x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto [x_1, \dots, \zeta x_j, \dots, x_{n+1}]$ donde $\zeta = e^{2\pi i/k}$. Por simplicidad en la escritura la denotaremos a $C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ por $C_{k,n}$. Recordemos además que los puntos ramas del mapeo $\pi : C_{k,n} \rightarrow C_{k,n}/H \cong \hat{\mathbb{C}}$ son

$$R = \{r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = \lambda_1, \dots, r_n = \lambda_{n-2}\} \cup \{\infty\}$$

2.3.1. Generadores para $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$

Consideremos el cubrimiento universal del plano pinchado

$$p : U \rightarrow \hat{C} - R$$

con p holomorfa y no nula en U . Apartir de esto, notamos que los mapeos holomorfos $-p, p-1, p-\lambda_1, \dots, p-\lambda_{n-2}$ no se anulan en U , entonces por lo hecho en 1.6.5 existen k -raíces respectivas denotadas por $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_{n+1}$ y que cumplen

$$\hat{x}_2 \circ \phi = \zeta^{L(-p, \phi)} \hat{x}_2, \quad \hat{x}_3 \circ \phi = \zeta^{L(p-1, \phi)} \hat{x}_3, \quad \hat{x}_i \circ \phi = \zeta^{L(p-\lambda_{i-2}, \phi)} \hat{x}_i \quad 4 \leq i \leq n+1$$

para cada $\phi \in Deck(p)$. Luego no es difícil ver que

Lema 2.3.1. *El subgrupo de $Deck(p)$ que deja invariante a todos los \hat{x}_i es*

$$Deck(p)_k := \{\phi \in Deck(p) : L(-p, \phi) \equiv L(p-r_2, \phi) \equiv L(p-r_3, \phi) \equiv \dots \equiv L(p-r_n, \phi) \equiv 0 \pmod{k}\}$$

Consideremos ahora la superficie de Riemann pinchada $C'_{k,n} = C_{k,n} - \pi^{-1}(R)$, entonces se tiene

Proposición 2.3.2. *El mapeo*

$$q : U \rightarrow C'_{k,n} \quad u \rightarrow q(u) = [1, \hat{x}_2(u), \dots, \hat{x}_{n+1}(u)]$$

es el cubrimiento universal de $C'_{k,n}$ con $Deck(q) = Deck(p)_k$.

Demostración. Dado que $r_i + \hat{x}_2^k + \hat{x}_i^k = r_i - p + (p - r_i) = 0$, se tiene que $q(U) \subset C'_{k,n}$.

Sea $a \in C'_{k,n}$, como $C'_{k,n} = C_{k,n} - \bigcup_{i=1}^n (\{x_i = 0\} \cap C_{k,n})$ podemos asumir que $a = [1, a_2, \dots, a_{n+1}]$ con $a_i \neq 0$. Si $q(u) = a$, entonces $\hat{x}_i(u) = a_i$ para cada i y en particular $\hat{x}_2(u)^k = -p(u) = a_2^k$. Como p es sobreyectiva, entonces existe $u \in U$ de modo que $p(u) = -a_2^k$ y luego $\hat{x}_2(u) = \zeta^{j_2} a_2$ para algún j_2 entero. Notamos que si $a \in C'_{k,n}$, entonces $a_i^k = -a_2^k - r_i$ para $i > 2$ y luego

$$\hat{x}_i^k(u) = p(u) - r_i = -a_2^k - r_i = a_i^k, \quad i > 2$$

lo que implica $\hat{x}_i(u) = \zeta^{j_i} a_i$ con los j_i enteros para todo $i \geq 2$. Luego podemos escojer un $\phi \in Deck(p)$ de modo que

$$L(p - r_i, \phi) = -j_i$$

lo que implica $q(\phi(u)) = a$, por lo tanto q es sobreyectiva.

Finalmente si $u, v \in q^{-1}(p)$ para $p \in C'_{k,n}$, se tiene $p(u) = p(v)$ lo que implica $v = \phi(u)$ para algún $\phi \in Deck(p)$. Luego

$$q(u) = [1, \hat{x}_2(u), \dots, \hat{x}_{n+1}(u)] = [1, \zeta^{L(-p, \phi)} \hat{x}_2(u), \dots, \zeta^{L(p-r_n, \phi)} \hat{x}_{n+1}(u)] = q(v)$$

implica $\phi \in Deck(p)_k$. Concluyendo \square

Lema 2.3.3. *Se tiene el siguiente isomorfismo*

$$Deck(p)/Deck(q) \cong \mathbb{Z}_k^n$$

Demostración. Consideremos el homomorfismo sobreyectivo

$$\Psi : Deck(p) \rightarrow \mathbb{Z}_k^n, \quad \Psi(\phi) = (L(-p, \phi), L(p-r_2, \phi), L(p-r_3, \phi), \dots, L(p-r_n, \phi)) \quad \text{mód } k$$

con kernel $Deck(q)$, luego

$$Deck(p)/Deck(q) \cong \mathbb{Z}_k^n$$

concluyendo. \square

Recordemos que $Deck(p) \cong \pi_1(\hat{\mathbb{C}} - R)$ es un grupo libre finitamente generado por n elementos.

Lema 2.3.4. *Si ϕ_1, \dots, ϕ_n son los generadores de $Deck(p)$, entonces $Deck(q)$ es generado por*

$$\phi_i^k \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad [Deck(p), Deck(p)]$$

donde $[Deck(p), Deck(p)]$ denota el conmutador de $Deck(p)$.

Demostración. Sea $K = \langle \phi_1^k, \dots, \phi_n^k, [Deck(p), Deck(p)] \rangle$. Del lema anterior $\Psi(K) = 0$, entonces se tiene

$$[Deck(p), Deck(p)] \trianglelefteq K \trianglelefteq Deck(q) \trianglelefteq Deck(p)$$

No es difícil probar que

$$Deck(p)/K \cong \mathbb{Z}_k^n$$

Luego de la identidad $[Deck(p) : K] = [Deck(p) : Deck(q)][Deck(q) : K]$, se tiene $[Deck(q) : K] = 1$ completando la demostración. \square

Por otro lado tenemos ahora el isomorfismo $Deck(p) \cong \pi_1(C'_{k,n})$ y recordemos que tenemos una dualidad entre las funciones $p - r_i$ y una base de $Deck(p)$ construida en 1.6.5.

Teorema 2.3.5. *Si ϕ_1, \dots, ϕ_n son una base para $Deck(p)$ de modo que*

$$L(p - r_i, \phi_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

entonces el primer grupo de homología de $C'_{k,n}$

$$H_1(C'_{k,n}, \mathbb{Z}) \cong \frac{Deck(q)}{[Deck(q), Deck(q)]}$$

está generado por las clases de los elementos

$$\phi_i^k \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right) [\phi_j, \phi_l] \left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right)^{-1}$$

con $1 \leq j < l \leq n$ y $g_d \geq 0$ enteros.

Demostración. Como $Deck(q)$ está generado por ϕ_i^k y $[Deck(p), Deck(p)]$, se tiene entonces que

$$\phi_i^k \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\gamma[\phi_j, \phi_l]\gamma^{-1}$$

con $\gamma \in Deck(p)$ y $1 \leq j < l \leq n$ generan a $Deck(q)$. Tenemos $Deck(p)/Deck(q) = \mathbb{Z}_k^n$, por lo tanto existen k^n clases $Deck(q)\rho$ con $\rho \in Deck(p)$ y por ello cada γ será igual a un producto $\sigma\rho$ con $\rho \in Deck(p)$ un representante de clase y $\sigma \in Deck(q)$.

Ahora notemos que una colección de k^n clases viene dada por

$$Deck(q) \left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right) \quad 0 \leq g_d \leq k-1$$

Por lo tanto al considerar

$$\gamma[\phi_j, \phi_l]\gamma^{-1} = \sigma(\rho[\phi_j, \phi_k]\rho^{-1})\sigma^{-1}$$

como un producto de elementos en $Deck(q)$ y al cocientar por $[Deck(q), Deck(q)]$, se tiene que el producto commuta y elimina a los σ . \square

Corolario 2.3.6. *Un conjunto generador de $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ es la imagen de los generadores de $H_1(C'_{k,n}, \mathbb{Z})$ mediante la inclusión $i : C'_{k,n} \rightarrow C_{k,n}$.*

Demostración. En 1.4.26 se tiene que la inclusión induce un homomorfismo sobreyectivo de $\pi_1(C'_{k,n})$ sobre $\pi_1(C_{k,n})$. \square

Escojamos $u \in U$ con $p(u) = z_0 \in \hat{C} - R$ de modo que la familia de segmentos $\{\overline{z_0 r_i} : 1 \leq i \leq n\}$ no se intersecten entre si a excepción de en z_0 . Consideremos entonces las curvas cerradas simple γ_i al rededor de r_i para $1 \leq i \leq n$ con base en z_0 . Es un hecho de que esta familia de curvas genera a $\pi_1(\hat{C} - R) \cong Deck(p)$ y por lo tanto existe un conjunto generador $\phi_1, \dots, \phi_n \in Deck(p)$ que cumplen con las hipótesis del teorema 2.3.5.

Resumimos los mapeos ocupados mediante el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ & \downarrow q & \\ p \swarrow & C'_{k,n} & \xrightarrow{i} C_{k,n} \\ & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\ & \hat{C} - R & \xrightarrow{i} \hat{C} \end{array}$$

2.3.2. Cálculo de períodos

Sean $\{\hat{x}_i\}_{i=2}^{n+1}$ las k -raíces de $-p, p - r_1, p - r_n$ con $r_1 = 0, r_2 = 1$ y $r_i = \lambda_{i-2}$ si $i \geq 3$, de lo hecho en la sección anterior podemos ver que

$$\hat{x}_i = (x_i/x_1) \circ q$$

donde x_i/x_1 es la función i -ésima coordenada en $C'_{k,n}$.

En el ejemplo 1.6.9 mostramos una base para el espacio de 1-formas $H^1(C_{k,n})$ dada por

$$\theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \frac{y_2^r dy_2}{y_3^{\alpha_3} \dots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}} \quad \text{con } (r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in I_{k,n}$$

donde $I_{k,n} = \{(r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) : 0 \leq \alpha_j \leq k-1, 0 \leq r \leq \sum_{j=3}^{n+1} \alpha_j - 2, r \in \mathbb{Z}\}$.

Sea $\phi \in Deck(p)$ y fijemos $u \in U$ donde (U, p) es el cubrimiento universal de $C'_{k,n}$. Denotaremos por l_ϕ a la curva que va desde u a $\phi(u)$. De lo hecho al final de la sección anterior, se tiene que los generadores de $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ son las curvas $i \circ q \circ l_\phi$ donde $\phi \in Deck(p)$ es de la forma

$$\phi_i^k \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right) [\phi_j, \phi_l] \left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right)^{-1}$$

Por lo tanto un conjunto de generadores finito para los períodos de $C_{k,n}$ estaría dado al resolver las integrales

$$\int_{i \circ q \circ l_\sigma} \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \int_{l_\sigma} q^* i^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \int_{l_\sigma} q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \int_u^{\phi(u)} q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}$$

Lema 2.3.7. *Tenemos las siguientes relaciones por pullbacks inducidos sobre los generadores de $H^1(C_{k,n})$*

$$q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \frac{\hat{x}_2^r d\hat{x}_2}{\hat{x}_3^{\alpha_3} \dots \hat{x}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}},$$

$$\phi^* q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \zeta^{(r+1)L(-p, \phi) - \sum_{d=3}^{n+1} \alpha_d L(p - r_{d-1}, \phi)} q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}$$

para cada $\phi \in Deck(p)$. Donde $\zeta = e^{2\pi i/k}$.

Demostración. Dado que $\hat{x}_i = (x_i/x_1) \circ q$, entonces es inmediato el primer resultado. Explícitamente tenemos

$$q \circ \sigma : U \rightarrow C_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) - \pi^{-1}(R), \quad [1, \hat{x}_2, \dots, x_{n+1}] \rightarrow [1, \hat{x}_2 \circ \sigma, \dots, x_{n+1} \circ \sigma]$$

y recordamos que en la sección 1.6.5 se probó que $\hat{x}_i \circ \phi = \zeta^{L(p-r_i, \phi)} \hat{x}_i$ obteniendo la segunda relación. \square

Si consideramos los generadores ϕ_1, \dots, ϕ_n de $Deck(p)$ con $L(p - r_i, \phi_j) = \delta_{ij}$, entonces denotaremos por M_i al valor $(r+1)L(-p, \phi_i) - \sum_{d=3}^{n+1} \alpha_d L(p - r_{d-1}, \phi_i)$. Notamos que

$$M_i = \begin{cases} r+1 & i=1 \\ -\alpha_{i+1} & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

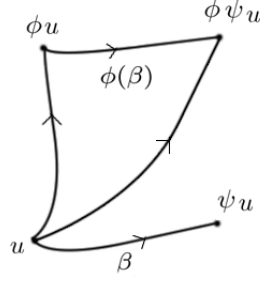
Por lo tanto hemos reducido el problema de integrar sobre $C_{k,n}$ a un problema de integración en el cubrimiento universal U de $C'_{k,n}$. Antes de seguir necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.3.8. *Sean $\phi, \psi \in Deck(p)$ y $\omega \in H^1(U)$, entonces*

$$\int_u^{\phi(\psi(u))} \omega = \int_u^{\phi(u)} \omega + \int_u^{\psi(u)} \phi^* \omega$$

Demostración. Dado que U es simplemente conexo, es directo al observar desde la imagen

$$\int_u^{\phi(\psi(u))} \omega = \int_u^{\phi u} \omega + \int_{\phi(\beta)} \omega = \int_u^{\phi(u)} \omega + \int_u^{\psi(u)} \phi^* \omega$$



□

A partir del lema anterior podemos empezar a calcular integrales sobre $C_{k,n}$.

Lema 2.3.9. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene

$$\int_{ioqol_{\phi_i^k}} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = 0$$

Demostración. De hecho, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{ioqol_{\phi_i^k}} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} &= \int_u^{\phi_i^k u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\ &= \sum_{m=1}^k \int_u^{\phi_i u} (\phi_i^{m-1})^* q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\ &= \int_u^{\phi_i u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \sum_{m=1}^k \zeta^{(m-1)M_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Luego los todos los períodos para las clases de ϕ_i^k con $i \in \{1, \dots, n\}$ son nulos en homología, lo que nos reduce el conjunto de generadores de $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ a las clases de

$$\left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right) [\phi_j, \phi_l] \left(\prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d} \right)^{-1} \quad 1 \leq j < l \leq n \text{ y } 0 \leq g_d \leq k-1$$

Recordamos que $M_1 = r+1$ y $M_i = -\alpha_{i+1}$ con $i \in \{2, \dots, n\}$.

Lema 2.3.10. Para las clases de $\sigma = \rho[\phi_j, \phi_l]\rho^{-1}$ con $\rho = \prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d}$ se tiene

$$\int_{ioqol_\sigma} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \int_{ioqol_{[\phi_j, \phi_l]}} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}$$

Demostración. Aplicando los lemas 2.3.7 y 2.3.8, y notando que $[\phi_j, \phi_l] \in Deck(q)$ dejando

invariante a q se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{i\circ q\circ l_\sigma} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} &= \int_u^{\rho^{[\gamma_i,\gamma_j]}\rho^{-1}u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \int_{\rho\rho^{-1}u}^{\rho^{[\gamma_i,\gamma_j]}\rho^{-1}u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \int_{\rho^{-1}u}^{[\gamma_i,\gamma_j]\rho^{-1}u} \rho^* q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \int_{\rho^{-1}u}^{[\gamma_i,\gamma_j]\rho^{-1}u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \left(\int_{\rho^{-1}u}^u \cdot + \int_u^{[\gamma_i,\gamma_j]u} \cdot + \int_{[\gamma_i,\gamma_j]u}^{[\gamma_i,\gamma_j]\rho^{-1}u} \cdot \right) q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \int_u^{[\gamma_i,\gamma_j]u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.11. Para cada $j, l \in \{1, \dots, n\}$ se tiene

$$\int_{i\circ q\circ l_{[\phi_j, \phi_l]}} \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = (1 - \zeta^{M_l}) \int_u^{\phi_j u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} - (1 - \zeta^{M_j}) \int_u^{\phi_l u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}$$

Demostración. Ocupando nuevamente los lemas 2.3.7 y 2.3.8 obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_u^{[\phi_j, \phi_l]u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} &= \int_u^{\phi_j u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} + \int_u^{\phi_l \phi_j^{-1} \phi_l^{-1} u} \phi_j^* q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \int_u^{\phi_j u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} + \zeta^{M_j} \int_u^{\phi_l \phi_j^{-1} \phi_l^{-1} u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \\
&= \dots \\
&= (1 - \zeta^{M_l}) \int_u^{\phi_j u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} - (1 - \zeta^{M_j}) \int_u^{\phi_l u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto sólo resta encontrar las integrales

$$\int_u^{\phi_i u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

Lema 2.3.12. Si fijamos $z_0 = p(u)$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene

$$\int_u^{\phi_i u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = -\frac{1}{k} (1 - \zeta^{M_i}) \int_{z_0}^{r_i} (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w - r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w - r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw$$

Considerando $w \rightarrow w^{1/k}$ en la rama principal.

Demostración. Del lema 2.3.7 tenemos

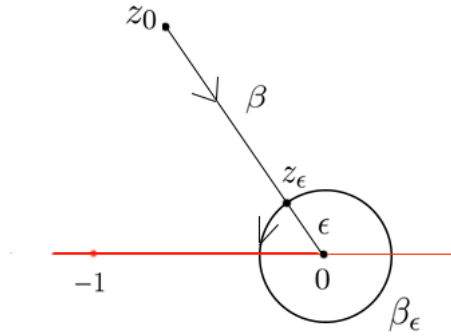
$$\int_u^{\phi_i u} q^* \theta_{r,\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = \int_u^{\phi_i u} \frac{\hat{x}_2^r d\hat{x}_2}{\hat{x}_3^{\alpha_3} \dots \hat{x}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}$$

Notando que $-\hat{x}_2^k = p$ y haciendo un cambio de variable $w = -\hat{x}_2^k$, se tiene

$$\int_u^{\phi_i u} q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = -\frac{1}{k} \int_{\gamma_i} (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w-r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w-r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw$$

donde γ_i es la proyección mediante p de la curva que va desde u a $\phi_i(u)$, es decir, γ_i es un elemento de $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - R, z_0)$ con índice uno y rodeando a r_i .

Si γ_1 es la curva cerrada que encierra a $r_1 = 0$. Si $t_0 \in [0, 1)$ es tal que $z_0 = e^{2\pi t_0}$, consideremos la circunferencia centrada en 0 y de radio $\epsilon > 0$ pequeño dada por $\beta_\epsilon(t) = \epsilon e^{2\pi i(t+t_0)}$. Sea β la recta que va desde z_0 a $z_\epsilon \in \beta_\epsilon \cap \overline{z_0, 0}$. Luego tenemos que γ_1 es homotópica a la curva $\beta + \beta_\epsilon - e^{2\pi i} \beta$, donde el factor $e^{2\pi i}$ se debe a la continuación del argumento a través de $(-\infty, 0]$, como se ve en la figura.



Luego

$$\begin{aligned} -k \int_u^{\phi_i u} q^* i^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} &= (1 - \zeta^{r+1}) \int_{z_0}^{z_\epsilon} (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w-r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w-r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw \\ &\quad + \int_{\beta_\epsilon} (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w-r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w-r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw \end{aligned}$$

Notamos que existe una constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\beta_\epsilon} (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w-r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w-r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw \right| \\ &= \left| 2\pi(-\epsilon)^{\frac{r+1}{k}} \int_0^1 \frac{e^{\frac{2\pi i(r+1)(t+t_0)}{k}}}{\prod_{j=2}^n (\epsilon e^{2\pi i(t+t_0)} - r_j)^{\alpha_{j+1}/k}} dt \right| \\ &\leq 2\pi \epsilon^{\frac{r+1}{k}} C \end{aligned}$$

dado que para ϵ pequeño las funciones $(\epsilon e^{2\pi i(t+t_0)} - r_i)^{-\alpha_{i+1}/k}$ son continuas en $[0, 1]$ y por ello acotadas. Tomando límite $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$\int_u^{\phi_1 u} q^* i^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = -\frac{(1 - \zeta^{r+1})}{k} \int_{z_0}^0 (-w)^{\frac{r+1}{k}-1} (w-r_2)^{-\alpha_3/k} \dots (w-r_n)^{-\alpha_{n+1}/k} dw$$

Finalmente para γ_i con $i \geq 2$ (la curva encerrando a r_i), hacemos un cambio de variables llevando r_i al 0 y luego el resultado se obtiene de forma análoga que en el caso $r_1 = 0$. \square

Junto con el lema 2.3.11 obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_u^{[\gamma_j, \gamma_l]u} q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} \\ &= - \frac{(1 - \zeta^{M_j})(1 - \zeta^{M_l})}{k} \int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w - r_2)^{\alpha_3/k} (w - r_3)^{\alpha_4/k} \dots (w - r_n)^{\alpha_{n+1}/k}} \end{aligned}$$

Finalmente para cada generador $\sigma = \rho[\phi_j, \phi_l]\rho^{-1} \in H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ con $\rho = \prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d}$, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{ioqol_\sigma} \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} \\ &= - \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \frac{(1 - \zeta^{M_j})(1 - \zeta^{M_l})}{k} \int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w - r_2)^{\alpha_3/k} (w - r_3)^{\alpha_4/k} \dots (w - r_n)^{\alpha_{n+1}/k}} \end{aligned}$$

para $(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in I_{k,n}$, $1 \leq j < l \leq n$ y $0 \leq g_d \leq k - 1$.

Si denotamos por

$$W(R, r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1})(w) := - \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w - r_2)^{\alpha_3/k} (w - r_3)^{\alpha_4/k} \dots (w - r_n)^{\alpha_{n+1}/k}}$$

se tiene

Teorema 2.3.13. *El reticulado $i(H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z}))$ está generado por los vectores períodos*

$$\left(\dots, \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} \frac{(1 - \zeta^{M_j})(1 - \zeta^{M_l})}{k} \int_{r_j}^{r_l} W(R, r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) dw, \dots \right)_{(r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in I_{k,n}}$$

para cada generador $l_{\rho[\phi_j, \phi_l]\rho^{-1}} \in H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ con $\rho = \prod_{d=1}^n \phi_d^{g_d}$ y $0 \leq g_d \leq k - 1$.

2.3.3. Convergencia de integrales

Fijemos $\theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}$ y consideremos

$$I = \int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w - 1)^{\alpha_3/k} (w - \lambda_1)^{\alpha_4/k} \dots (w - \lambda_{n+1})^{\alpha_{n+1}/k}}$$

podemos asumir sin pérdida de generalidad que dentro de la recta desde r_j a r_l no hay ningún otro r_i . Notamos además que $M_i/k \in (-1, 1)$ para cada i . Denotemos por r_{jl} al punto medio entre r_j y r_l , entonces observamos que sobre $\overline{r_j r_{jl}}$ las funciones $|w - r_i|^{M_i}$ con $i \neq j$ están bien definidas, son continuas y por esto acotadas. Luego sobre $\overline{r_j r_{jl}}$ se tiene la cota

$$\prod_{i=1}^n |w - r_i|^{M_i/k} \leq C_j |w - r_j|^{M_j/k}$$

de forma análoga obtenemos sobre $\overline{r_{jl} r_l}$ la cota

$$\prod_{i=1}^n |w - r_i|^{M_i/k} \leq C_l |w - r_l|^{M_l/k}$$

para C_j, C_l constantes positivas y luego para $j, l \neq 0$ obtenemos (el caso $j = 0$ o $l = 0$ es análogo)

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \int_{r_j}^{r_l} \prod_{i=1}^n |w - r_i|^{M_i/k} |dw|^{1/k} \\
&\leq C_j \int_{r_j}^{r_{jl}} |w - r_j|^{M_j/k} |dw|^{1/k} + C_l \int_{r_{jl}}^{r_l} |w - r_l|^{M_l/k} |dw|^{1/k} \\
&\leq C'_j \int_{r_j}^{r_{jl}} |w - r_j|^{M_j/k} |dw| + C'_l \int_{r_{jl}}^{r_l} |w - r_l|^{M_l/k} |dw|
\end{aligned}$$

Haciendo en el primer sumando un cambio de variables $z = w - r_j$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{r_j}^{r_{jl}} |w - r_j|^{M_j/k} |dw| &= \int_0^{r_{jl}-r_j} |z|^{M_j/k} |dz| \\
&= |r_{jl} - r_j|^{M_j/k} \int_0^1 t^{M_j/k} dt \\
&= |r_{jl} - r_j|^{M_j/k} \left. \frac{t^{(M_j/k)+1}}{(M_j/k)+1} \right|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{|r_{jl} - r_j|^{M_j/k}}{(M_j/k)+1} < \infty
\end{aligned}$$

Análogo con la otra integral, se tiene $\int_{r_{jl}}^{r_l} |w - r_l|^{M_l/k} |dw| < \infty$, por lo que obtenemos la convergencia de

$$\int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w-1)^{\alpha_3/k} (w-\lambda_1)^{\alpha_4/k} \dots (w-\lambda_{n+1})^{\alpha_{n+1}/k}}$$

Capítulo 3

Observaciones y posibles trabajos futuros.

En el capítulo anterior encontramos un conjunto generador para el primer grupo de homología del modelo algebraico $C_{k,n}$ de una curva generalizada de Fermat y junto con la base encontrada por Rubén Hidalgo en [RH] para el espacio de 1-formas holomorfas, encontramos un conjunto generador para el reticulado asociado a la Jacobiana de $C_{k,n}$ dado por las entradas de los vectores períodos

$$-\frac{1}{k} \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} (1 - \zeta^{M_j}) (1 - \zeta^{M_l}) \int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w-1)^{\alpha_3/k} (w-\lambda_1)^{\alpha_4/k} \dots (w-\lambda_{n+1})^{\alpha_{n+1}/k}}$$

Algunas observaciones y posibles ideas para trabajos a futuro se dejan en este capítulo.

1. Del lema 2.3.7 notamos que para cada $\phi \in Deck(p)$, la 1-forma

$$q^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \frac{\hat{x}_2^r d\hat{x}_2}{\hat{x}_3^{\alpha_3} \dots \hat{x}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}$$

puede ser vista como un **vector propio** del pull-back ϕ^* con **valor propio** dado por

$$\zeta^{(r+1)L(-p, \phi) - \sum_{d=3}^{n+1} \alpha_d L(p - r_{d-1}, \phi)}$$

2. Para las curvas de Fermat clásicas $C_{k,2}$ con $R = \{r_1 = 0, r_2 = 1, \infty\}$, las integrales a desarrollar son de la forma

$$\int_0^1 \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w-1)^{\alpha_3/k}} = -\eta^{r-\alpha_3+1} \int_0^1 w^{\frac{r+1}{k}-1} (1-w)^{-\alpha_3/k} dw$$

donde $\eta = (-1)^{1/k}$. Si recordamos la **función Beta**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$$

se tiene

$$\int_0^1 \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w-1)^{\alpha_3/k}} = -\eta^{r-\alpha_3+1} B\left(\frac{r+1}{k}, 1 - \frac{\alpha_3}{k}\right)$$

obteniendo un resultado análogo al de David Rohrlich en [GR] para la curva $X^k + Y^k = Z^k$. La función Beta está ampliamente estudiada y cumple con propiedades

que facilitan encontrar sus evaluaciones sobre los números racionales, como es en nuestro caso.

En el caso general, nos encontramos con el problema de evaluar las integrales

$$\int_{r_j}^{r_l} \frac{(-w)^{\frac{r+1}{k}-1} dw}{(w-1)^{\alpha_3/k} (w-\lambda_1)^{\alpha_4/k} \cdots (w-\lambda_{n+1})^{\alpha_{n+1}/k}}$$

las que podríamos ver como una **generalización** de las funciones Beta. Un posible trabajo a futuro se trataría sobre investigar integrales, sus propiedades y en cuanto se parecen a las funciones Beta, de modo que hagan más fácil su evaluación.

3. Sea $\phi = [\phi_j, \phi_l] \in Deck(p)$ con $j < l \in \{1, \dots, n\}$ y denotemos por κ_j^l a la curva asociada $i \circ q \circ l_\phi \in H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$. Consideremos los siguientes automorfismos de $C_{k,n}$

$$a_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = [x_1, \dots, \zeta x_i, \dots, x_n], \quad i \in \{1, \dots, n+1\}$$

Recordemos que $H = \langle a_i : i \in \{1, \dots, n+1\} \rangle \cong \mathbb{Z}_k^n$ y tomemos como base generadora los automorfismos a_2, \dots, a_{n+1} . Consideremos ahora la acción sobre cada κ_j^l dada por $a_i \kappa_j^l := a_{i*}(\kappa_j^l) = a_i \circ \kappa_j^l$ para cada $i \geq 2$. Por lo hecho en el capítulo anterior no es difícil ver que

$$\int_{a_i \kappa_j^l} \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \int_{\kappa_j^l} a_i^* \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \zeta^{M_i} \int_{\kappa_j^l} \theta_{r, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}$$

Por lo tanto si consideramos el algebra de grupo $\mathbb{Z}[H]$ (grupo abeliano libre generado por H junto con la operación producto definida por la composición de automorfismos y producto usual de enteros), entonces podemos reescribir lo hecho para los generadores de $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$.

Teorema 3.0.1. *Para una curva generalizada de Fermat $C_{k,n}$, su primer grupo de homología $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}[H]$ -módulo generado por los elementos κ_j^l para $j < l \in \{1, \dots, n\}$ y $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ el grupo de automorfismos generado por los a_2, \dots, a_{n+1} .*

4. En particular nos interesa estudiar $Jac(C_{k,n})$ como una variedad Abeliana, para ello debemos encontrar una base canónica de $H_1(C_{k,n}, \mathbb{Z})$. Como posible trabajo a futuro, se podría intentar reducir el conjunto generador a una base con $2g_{k,n}$ generadores, para comenzar a estudiar su matriz de intersección. Un punto de partida para esta reducción es considerar las siguientes relaciones para $\zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d}$:

a)

$$\sum_{g_i=0}^{k-1} \zeta^{\sum_{d=1}^n g_d M_d} = 0$$

para cada tupla fija $(g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$ y para cada $1 \leq i \leq n$.

b)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \zeta^{\sum_{d=1}^n (i+m_d) M_d} = 0$$

con $0 \leq m_d \leq k-1$ fijos y para cada $1 \leq d \leq n$.

Las cuales nos entregan las siguientes relaciones en homología

a)

$$\sum_{g_i=0}^{k-1} (a_2^{g_1} \dots a_{n+1}^{g_n})_* \kappa_j^l = 0$$

para cada tupla fija $(g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$ y para cada $1 \leq i \leq n$.

b)

$$\sum_{i=0}^{k-1} (a_2^{i+m_1} a_2^{i+m_2} \dots a_{n+1}^{i+m_n})_* \kappa_j^l = 0$$

con $0 \leq m_d \leq k - 1$ fijos y para cada $1 \leq d \leq n$.

Bibliografía

- [BL] C. Birkenhake, H. Lange *Complex Abelian Varieties*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [BRE] T. Breuer *Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces*, London Math. Society Lectures Note Series vol. **280**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [DON] S. Donaldson *Riemann Surfaces*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **22**, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [FK] H. M. Farkas, I. Kra *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1980.
- [GHL] G. Gonzalez-Diez, R. Hidalgo, M. Leyton, *Generalized Fermat curves*, Journal of Algebra **321**, 2009.
- [GG] E. Gironde, G. González-Diez *Introduction to compact Riemann surfaces and Dessins d'Enfants*, London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [GR] B. Gross (apéndice por D. Rohrlich), *On the periods of Abelian Integrals and a Formula of Chowla and Selberg*, Inventiones mathematicae **45** (1978): 193-212.
- [GRIFF] P. Griffiths *Introduction to algebraic curves*, Translations of Mathematical Monographs, vol 76, American Math. Society, 1989.
- [HKLP] R. A. Hidalgo, A. Kontogeorgis, M. Leyton-Alvarez, P. Paramantzoglou. *Automorphisms of Generalized Fermat Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra **221** (2017), 2312–2337.
- [LA] Lang. S *Introduction to Algebraic and Abelian Functions*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **89**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1982.
- [MASS] W. S. Massey *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1967.
- [MIR] R. Miranda *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Grad. Studies in Maths., vol 5, American Math. Society, 1997.
- [RH] R. Hidalgo *Holomorphic differentials of Generalized Fermat curves*, arXiv:[1710.01349](https://arxiv.org/abs/1710.01349), 2017.
- [SHAF] I.R Shafarevich *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.