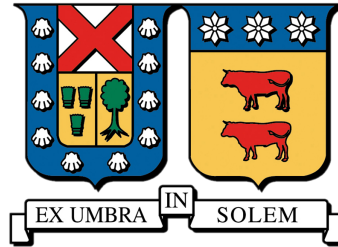


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO- CHILE



“MODELO HÍBRIDO FVM-FEM PARA LA SIMULACIÓN DEL
COMPORTAMIENTO AERO-ESTRUCTURAL DE UN GLOBO
SONDA DE ALTA ESTABILIDAD”

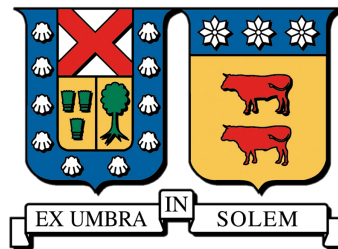
SEBASTIÁN ALONSO SANHUEZA ESPINOZA

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MECÁNICA
Y AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA : DR. ING. ALEX FLORES M.
PROFESOR CORREFERENTE : DR. ING. JOAQUÍN MURA M.
PROFESOR EVALUADOR EXTERNO 1 : DR. ING. RENATO HUNTER A.
PROFESOR EVALUADOR EXTERNO 2 : DR. ING. RODRIGO HERNÁNDEZ P.

MARZO - 2021

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO- CHILE



“MODELO HÍBRIDO FVM-FEM PARA LA
SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO
AERO-ESTRUCTURAL DE UN GLOBO SONDA DE
ALTA ESTABILIDAD”

SEBASTIÁN ALONSO SANHUEZA ESPINOZA

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MECÁNICA
Y AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA : DR. ING. ALEX FLORES M.
PROFESOR CORREFERENTE : DR. ING. JOAQUÍN MURA M.
PROFESOR EVALUADOR EXT. 1 : DR. ING. RENATO HUNTER A.
PROFESOR EVALUADOR EXT. 2 : DR. ING. RODRIGO HERNÁNDEZ P.

MARZO - 2021

TÍTULO DE LA TESIS:

**“MODELO HÍBRIDO FVM-FEM PARA LA SIMULACIÓN DEL
COMPORTAMIENTO AERO-ESTRUCTURAL DE UN GLOBO SONDA DE
ALTA ESTABILIDAD”**

AUTOR:

SEBASTIÁN ALONSO SANHUEZA ESPINOZA

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Título de Ingeniero Civil Mecánico y al Grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

DR. ING. ALEX FLORES M.

DR. ING. JOAQUÍN MURA M.

DR. ING. RENATO HUNTER A.

DR. ING. RODRIGO HERNÁNDEZ P.

Valparaíso, Chile, Marzo - 2021

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi Profesor Guía, Alex Flores. Su infinita paciencia, sabiduría y dedicación fueron fundamentales en cada etapa de este proceso. Su orientación experta no solo me brindó claridad en los conceptos más complejos, sino que también me inspiró en mis momentos más oscuros. Su compromiso con mi crecimiento académico y personal deja una huella duradera en mi formación.

No puedo pasar por alto la oportunidad que me brindó FONDEF, la Universidad Técnica Federico Santa María y el Departamento de Mecánica, al permitirme desarrollar este trabajo. La calidad de la educación que he recibido a lo largo de mis años de formación ha sido esencial para mi desarrollo profesional. Los profesores y compañeros con quienes compartí, han enriquecido mi perspectiva y ampliado mis horizontes.

Es muy importante para mí expresar mi gratitud hacia mi familia y amigos. Su apoyo inquebrantable, aliento constante y amor incondicional me impulsó a superar los innumerables desafíos que se presentaron en el camino. Cada palabra de aliento, cada gesto de confianza, ha sido un recordatorio constante de que nunca estuve solo en este viaje.

Mención aparte merece Nicole, sin quien no habría sido capaz de terminar este proyecto. Su paciencia, comprensión y sobre todo su amor, me han sostenido en los momentos de duda y agotamiento. Su presencia en mi vida ha sido la verdadera luz que me permitió salir de las sombras.

En resumen, este logro es el resultado de un esfuerzo colectivo y el apoyo de numerosas personas e instituciones. Mi corazón rebosa de gratitud hacia cada uno de ustedes por su contribución inestimable a darle término a este tan importante capítulo de mi vida.

Resumen

En el marco del proyecto FONDEF ID16I10105, se propone un sistema de globo cautivo que funciona como estación meteorológica, con el fin de ser utilizado para la evaluación del recurso eólico sobre terreno complejo. El sistema se compone de un globo aerostático auto-orientable de alta estabilidad, anclado a la superficie por uno o más cables elásticos, que eleva plataformas que contienen los equipos de medición meteorológica a una altura predeterminada.

Con el objetivo final de diseñar un sistema de control de la posición de las plataformas de medición, se utiliza un modelo estático existente de sistema de globo cautivo de tres anclajes, para desarrollar un código computacional que calcula la geometría de la estructura flexible en su estado de equilibrio, bajo la acción de un campo de flujo estacionario. La solución estática permite comparar el efecto de la forma del aerostato en el comportamiento de la estructura y entrega una condición inicial en reposo para una simulación dinámica.

Para el modelamiento de los cables que conforman la estructura flexible se utiliza una variante del método de elementos finitos conocido como método de masas concentradas. Debido al comportamiento no lineal se discretiza su largo en elementos elásticos lineales y se resuelve el sistema de equilibrio de cada elemento mediante el método de Newton-Raphson. Para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas sobre la estructura flexible se utilizan los coeficientes de arrastre y el principio de flujo cruzado.

Los aerostatos son modelados como cuerpos rígidos orientados de frente al viento, y se utiliza el método de volúmenes finitos para calcular las fuerzas generadas por el viento sobre la superficie del envoltorio. Se realizan simulaciones computacionales fluido-dinámicas de distintas formas geométricas de globo a una velocidad de viento constante y variando el ángulo de ataque, obteniéndose funciones de sus coeficientes aerodinámicos que permiten determinar el ángulo de ataque en equilibrio. Se escogen 5 formas distintas de globos: esférica, cilíndrica, ovoidal, NPL y GNVR; para comparar

su comportamiento aerodinámico y el impacto de este en el sistema de globo cautivo.

El modelo de cable se verifica utilizando soluciones analíticas encontradas en la literatura, y se utiliza una simulación en OpenFOAM de un globo esférico para verificar el modelo de aerostato y realizar un análisis de sensibilidad de la malla. El modelo de SGC simple se valida para los 5 tipos de globos a una velocidad de viento lenta, con flujo en transición a la turbulencia, y se comparan para un mismo valor del empuje neto y de longitud de cable. Los globos NPL y GNVR son comparados a velocidades más altas, con flujo turbulento completamente desarrollado, igualando su empuje neto para distintas configuraciones de longitud de cable, velocidad de viento y variación de volumen. Los resultados demuestran una variación de la altura menor al 5% y desplazamiento horizontal del orden de los 20 [m], para los globos NPL y GNVR, a una velocidad de viento máxima de 15 [m/s]. El trabajo realizado busca entregar un primer acercamiento teórico del funcionamiento de un sistema de globo cautivo como estación fija y de esta manera generar una metodología para el diseño de este.

Abstract

Within the framework of the FONDEF ID16I10105 project, a tethered balloon system is proposed that functions as a meteorological station, in order to be used for the evaluation of the wind resource over complex terrain. The system consists of a high stability self-steering lighter-than-air balloon, anchored to the surface by one or more elastic cables, which raises platforms containing the meteorological measurement equipment to a predetermined height.

With the ultimate goal of designing a control system for the position of the measurement platforms, an existing static model of a tri-tethered balloon system is used to develop a computational code that calculates the geometry of the flexible structure in its state equilibrium, under the action of a steady flow field. The static solution allows to compare the effect of the shape of the aerostat on the behavior of the structure and provides an initial condition at rest for a dynamic simulation.

A variant of the finite element method known as the lumped-mass method is used to model the cables that make up the flexible structure. Due to the non-linear behavior, its length is discretized in linear elastic elements and the equilibrium system of each element is solved using the Newton-Raphson method. For the calculation of the aerodynamic forces on the flexible structure, the drag coefficients and the principle of cross flow are used.

The aerostat is modeled as rigid body facing the wind, and the finite volume method is used to calculate the forces generated by the wind on the surface of the envelope. Computational fluid dynamic simulations of different geometric shapes of the balloon are carried out at a constant wind speed and varying the angle of attack, obtaining functions of their aerodynamic coefficients that allow determining the angle of attack in equilibrium. To compare the aerodynamic behavior and its impact on the tethered balloon system, 5 different shapes of balloons are chosen: spherical, cylindrical, ovoid, NPL and GNVR.

The cable model is verified using analytical solutions found in the literature, and an OpenFOAM simulation of a spherical balloon is used to verify the aerostat model and perform a sensitivity analysis of the mesh. The simple SGC model is validated for the 5 types of balloons at slow wind speed, with flow in transition to turbulence, and they are compared for the same value of buoyancy and cable length. NPL and GNVR balloons are compared at higher speeds, with fully developed turbulent flow, matching their net buoyancy for different cable length, wind speed and volume variation configurations. The results show a variation of the height less than 5% and horizontal displacement of the order of 20 [m], for the NPL and GNVR balloons, at a maximum wind speed of 15 [m/s]. The work carried out seeks to provide a first theoretical approach to the operation as a fixed station of a tethered balloon system, and in this way generate a methodology for its design.

Índice general

Agradecimientos	7
Resumen	9
Abstract	12
Glosario	24
1. Introducción	27
1.1. Antecedentes generales	27
1.2. Declaración del problema	32
1.3. Hipótesis	34
1.4. Objetivos	35
1.4.1. Objetivos generales	35
1.4.2. Objetivos específicos	35
2. Estado del Arte	36
2.1. Sistemas de globos cautivos	36
2.2. Investigación académica	40
2.3. Patentes comerciales	44
3. Marco Teórico	46
3.1. Mecánica del medio continuo	46
3.1.1. Ecuaciones de la cinemática	46
3.1.2. Deformación infinitesimal	47
3.1.3. Estado de tensión	48
3.1.4. Postulados de conservación	49
3.1.5. Problema de cable	53
3.1.6. Catenaria elástica	57
3.1.7. Método de Newton-Raphson	60

3.2.	Dinámica atmosférica	61
3.2.1.	Leyes de conservación	62
3.2.2.	Capa límite atmosférica	69
3.3.	Aerodinámica	75
3.3.1.	Fuerzas y momentos aerodinámicos	75
3.3.2.	Coefficientes adimensionales	77
3.3.3.	Tipos de flujos	79
3.3.4.	Características aerodinámicas	81
4.	Metodología	85
4.1.	Modelo de estructura de tensión	89
4.2.	Modelo de aerostato	95
4.3.	Modelo de campo de flujo atmosférico	99
4.4.	Modelo de sistema de globo cautivo	102
4.4.1.	SGC simple	115
4.4.2.	SGC triple-anclaje	118
4.5.	Recursos para la investigación	121
5.	Solución Estática de la Estructura Flexible de un Sistema de Globo Cautivo	122
5.1.	Funciones de geometría del envoltorio	123
5.1.1.	Geometría de globo esférico	123
5.1.2.	Geometría de globo cilíndrico	124
5.1.3.	Geometría de globo ovoidal	125
5.1.4.	Geometría de globo NPL	126
5.1.5.	Geometría de globo GNVR	126
5.2.	Coefficientes aerodinámicos para flujo estacionario	127
5.2.1.	Análisis de sensibilidad de malla	129
5.2.2.	Simulación de globo cilíndrico	132
5.2.3.	Simulación de globo ovoidal	135
5.2.4.	Globos NPL y GNVR	138
5.3.	Verificación del modelo SGC simple	139
5.3.1.	Caso 1: Cable flexible pesado en corriente uniforme	140
5.3.2.	Caso 2: Cable flexible con flotabilidad neutra en corriente uniforme	143
5.3.3.	Caso 3: Cable flexible en corriente uniforme (Análisis de Poda)	145
5.4.	Validación del modelo	147
5.4.1.	Comparación de SGC simple	148

6. Conclusiones	156
6.1. Trabajo a futuro	158
A. Código de la solución estática	160
A.1. Módulos de clases	164
A.2. Función <code>static_sol</code>	167
B. Simulaciones CFD en OpenFOAM 2.3.1	171
B.1. Datos y figuras de simulación de globo esférico	171
B.2. Datos y figuras de simulación de globo cilíndrico	175
B.3. Datos y figuras de simulación de globo ovoidal	178
Referencias	179

Índice de figuras

1.1. Participación relativa de fuentes renovables en generación eléctrica anual [9].	28
1.2. Esquema de diferentes alternativas de medición [41].	30
1.3. Equipos más utilizados para llevar a cabo una campaña de evaluación del recurso eólico.	31
1.4. Variación de la altura de operación, por efecto del ciclo día-noche en la capa superficial de la atmósfera.	33
1.5. Esquemas de prototipos del sistema EMA2.	34
2.1. Modelos de globos cautivos.	36
2.2. Esquema de sistema de globo cautivo multi-anclaje.	38
2.3. Representación del “Large Adaptative Reflector” [33].	41
2.4. Estructura de un dirigible TCOM 71M [46].	43
2.5. “Layout” del sistema experimental de globo cautivo de tres cables [6].	44
3.1. Sistemas de referencia para problemas de cable.	53
3.2. Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de cable en estado de equilibrio.	55
3.3. Elemento diferencial de catenaria elástica.	58
3.4. Representación geométrica del método de Newton.	60
3.5. Temperatura potencial promedio y velocidad de viento local promedio para una capa límite bien mezclada [21].	70
3.6. Fuerza y momento aerodinámico resultante sobre un perfil alar.	75
3.7. Sistemas de componentes en las que se separa la fuerza aerodinámica.	76
3.8. Convención de signos para momento aerodinámico.	77
3.9. Centro de presión de un perfil de ala.	77
3.10. Tipos de flujos alrededor de un cuerpo [24].	80
3.11. Flujo alrededor de un cuerpo delgado y uno obtuso [24].	81
3.12. Transición de flujo laminar a turbulento [24].	81

3.13. Gráfico cualitativo de la variación del C_L y C_D en función de α [24].	82
3.14. Gráfico cualitativo de la variación de la razón C_L/C_D en función de α [24].	83
3.15. Datos de un perfil de ala NACA 2412, fuente: <i>Abbott and Doenhoff</i> [24].	84
4.1. Esquema de método iterativo para la solución de problema FSI.	87
4.2. Esquema de segmento de cable con masas concentradas [23].	90
4.3. Diagrama de cuerpo libre sobre cada segmento de cable.	91
4.4. Fuerzas que actúan sobre el aerostato.	96
4.5. Diagrama de flujo de algoritmo para encontrar la solución estática de sistema de globo cautivo.	103
4.6. Esquema de operación del sistema de globo cautivo simple y las fuerzas involucradas.	104
4.7. Representación en 2D del rango de operación del sistema de globo cautivo.	108
4.8. Configuración de sistema de globo cautivo de triple anclaje.	110
4.9. Equilibrio de fuerzas en el punto de acoplamiento de SGC triple-anclaje.	110
4.10. Sistema de referencias para problema de SGC simple.	115
4.11. Diagrama de flujo de solución estática de SGC simple	117
4.12. Sistema de referencias para problema de SGC triple-anclaje.	118
4.13. Diagrama de flujo de solución estática de SGC multi-anclaje.	120
5.1. Envoltorio de aerostato de globo cilíndrico.	124
5.2. Envoltorio de aerostato de globo ovoidal.	125
5.3. Envoltorio de aerostato de globo NPL.	126
5.4. Envoltorio de aerostato de globo GNVR.	127
5.5. Volumen de control de la simulación del flujo sobre el aerostato.	128
5.6. Malla L1	131
5.7. Malla L2	131
5.8. Malla L3	131
5.9. Coeficiente de arrastre para cada malla a lo largo de la simulación, comparados con el valor teórico $C_D = 0,425712$ [13].	132
5.10. Malla de globo cilíndrico	133
5.11. Curvas C_L y $C_{M,\frac{c}{4}}$ en función de α para globo cilíndrico.	134
5.12. Curvas C_D y $C_{M,ac}$ en función de α para globo cilíndrico.	135
5.13. Malla de globo ovoidal	136
5.14. Curvas C_L y $C_{M,\frac{c}{4}}$ en función de α para globo ovoidal.	137
5.15. Curvas C_D y $C_{M,ac}$ en función de α para globo ovoidal.	137

5.16. Una boya es anclada con una cadena que pesa $2,5 [lb/ft]$, la profundidad es $145 [ft]$ y el arrastre sobre la boya es $225 [lb]$. Calcular la posición horizontal de la boya, el largo de la cadena y la tensión en la boya cuando el ángulo máximo permitido en el anclaje es de $30^\circ [15]$	141
5.17. Error porcentual de parámetros del caso 1 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.	142
5.18. Comparación entre el perfil de cable de la solución analítica y de un cable discretizado ($n=5$).	143
5.19. Una boya es instalada bajo una corriente de $3,38 [ft/s]$ con un cable de diámetro $0,5 [in]$ cuyo peso es despreciable, el arrastre sobre la boya es $400 [lb]$ y la profundidad es $656 [ft]$. Calcular la posición horizontal de la boya y el largo del cable si la tensión en la boya no debe superar las $1000 [lb]$ y $C_{DN} = 1,5 [15]$	144
5.20. Error porcentual de parámetros del caso 2 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.	145
5.21. Comparación entre el perfil de cable de la solución analítica y de un cable discretizado ($n=5$).	145
5.22. Una boya es instalada en aguas de $2000 [ft]$ de profundidad, el diámetro del cable es $0,315 [in]$ y su peso es $0,124 [lb/ft]$. La velocidad de la corriente es $4,54 [ft/s]$. Calcular el largo del cable y la tensión en la boya si la tensión máxima en el anclaje es $3000 [lb]$ y el ángulo máximo permitido en el anclaje es de 30° , utilizando $C_{DN} = 1,8$ y $\gamma = 0,02 [15]$	146
5.23. Error porcentual de parámetros del caso 3 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.	147
5.24. Razón sustentación a arrastre en función del ángulo de ataque, con $U_\infty = 2,0 [m/s]$	149
5.25. Perfil adimensionalizado de líneas de anclaje, con $U_\infty = 2,0 [m/s]$	150
5.26. Resultados de altura y desplazamiento de SGC simple, con volumen y longitud de cable constantes.	151
5.27. Resultados de capacidad de carga y perfiles de SGC simple, con volumen y longitud de cable constantes.	152
5.28. Resultados de longitud y perfil de cables de SGC simple, con volumen y altura de operación constantes.	153
5.29. Resultados de capacidad de carga y desplazamiento de SGC simple, con volumen y altura de operación constantes.	154
5.30. Resultados de altura y desplazamiento de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.	155

5.31. Resultados de capacidad de carga y ángulo de ataque de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.	155
A.1. Diagrama de flujo de función <i>static_sol</i>	170
B.1. Gráfico de residuales para Malla L1.	172
B.2. Gráfico de residuales para Malla L2.	172
B.3. Gráfico de residuales para Malla L3.	172
B.4. Campo de velocidades para Malla L1.	173
B.5. Campo de velocidades para Malla L2.	173
B.6. Campo de velocidades para Malla L3.	173
B.7. Campo de presión para Malla L1.	174
B.8. Campo de presión para Malla L2.	174
B.9. Campo de presión para Malla L3.	174
B.10. Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 0^\circ$	176
B.11. Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 10^\circ$	176
B.12. Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 20^\circ$	176
B.13. Gráfico de residuales para $\alpha = 0^\circ$	177
B.14. Gráfico de residuales para $\alpha = 10^\circ$	177
B.15. Gráfico de residuales para $\alpha = 20^\circ$	177

Índice de Tablas

4.1. Propiedades físicas de la atmósfera estándar a nivel del mar [14].	100
4.2. Valores típicos de parámetros de rugosidad del terreno [40].	101
4.3. Categorías de turbulencia del viento [8].	102
5.1. Parámetros geométricos del aerostato de forma cilíndrica.	124
5.2. Parámetros geométricos del aerostato de forma ovoidal.	125
5.3. Parámetros geométricos del aerostato NPL.	126
5.4. Parámetros geométricos del aerostato GNVR.	127
5.5. Parámetros de simulación de globo esférico.	130
5.6. Características de la malla del volumen de control para cada nivel de refinamiento.	130
5.7. Resultados de análisis de sensibilidad de malla.	132
5.8. Datos de entrada la simulación del globo cilíndrico.	133
5.9. Características de la malla del volumen de control para globo cilíndrico.	133
5.10. Resultados de simulación para globo cilíndrico.	134
5.11. Datos de entrada de la simulación del globo ovoidal.	135
5.12. Características de la malla del volumen de control para globo ovoidal.	136
5.13. Resultados de simulación para globo ovoidal.	136
5.14. Datos para globo NPL y GNVR.	138
5.15. Matriz de combinaciones posibles, para cada globo y ángulo de ataque.	138
5.16. Valores iniciales de los parámetros turbulentos de cada caso a simular.	139
5.17. Datos de entrada de la simulación de los globos NPL y GNVR.	139
5.18. Comparación de resultados para el caso 1.	142
5.19. Comparación de resultados para el caso 2.	144
5.20. Comparación de resultados para el caso 3.	147
5.21. Datos de entrada de los elementos del sistema de globo cautivo.	148
5.22. Configuración de sistema de globo cautivo para $Re \sim 2,5 \cdot 10^5$	149
5.23. Configuración de SGC simple, con longitud de cable y volumen constantes.	151

5.24. Configuración de SGC simple, con altura de operación y volumen de aerostato constantes.	153
5.25. Configuración de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.	155
A.1. Atributos de un objeto de clase <i>nodo</i>	165
A.2. Atributos de un objeto de clase <i>angulo_euler</i>	165
A.3. Atributos de un objeto de clase <i>material</i>	165
A.4. Atributos de un objeto de clase <i>segmento</i>	166
A.5. Atributos de un objeto de clase <i>cable</i>	166
A.6. Atributos de un objeto de clase <i>esfera</i>	167
A.7. Atributos de un objeto de clase <i>wind_pm</i>	167
A.8. Lista de entradas y salidas de la función <i>static_sol</i>	168
B.1. Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.	171
B.2. Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.	175
B.3. Resultados simulación de globo cilíndrico.	175
B.4. Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.	178
B.5. Resultados simulación de globo ovoidal.	178

Glosario

t	: tiempo.
t_{max}	: tiempo total de la simulación.
g	: aceleración de gravedad.
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Vectores unitarios de las direcciones de sistema de coordenadas cartesianas.
\vec{x}	: vector posición en coordenadas espaciales.
\vec{X}	: vector posición en coordenadas materiales.
\vec{U}	: campo de velocidades instantáneas.
\vec{U}_∞	: campo de velocidades promedio de la corriente libre.
ρ_∞	: Densidad volumétrica promedio de la corriente libre.
ν_∞	: Viscosidad cinemática promedio de la corriente libre.
\vec{X}_0	: vector posición en la configuración inicial o de referencia.
\vec{x}_{eq}	: vector posición en estado de equilibrio.
ρ_f	: Densidad volumétrica del fluido.
ρ_s	: Densidad volumétrica del sólido.
$\bar{\tau}$: Tensor de esfuerzos viscosos del fluido.
$\bar{\sigma}$: Tensor de tensión de Cauchy del sólido.
\vec{b}	: Vector de fuerzas de cuerpo.
ε_{tol}	: Error máximo tolerado.
Δs	: Longitud del segmento de cable cable.
d_t	: Diámetro sin deformación del cable.
E	: Módulo de Young del cable.
A	: Área de la sección transversal del cable.
λ_t	: Fuerza de gravedad resultante por unidad de longitud del cable.
\vec{T}^i	: Vector tensión en el nodo i del cable.
\vec{R}^i	: Vector fuerza aerodinámica resultante en el segmento i del cable.
\vec{W}^i	: Vector fuerza de gravedad en el segmento i del cable.
β_i	: Ángulo en el plano horizontal del segmento i del cable.
Γ_i	: Ángulo de elevación del segmento i del cable.

ε_i	: Deformación lineal del segmento i del cable.
$\hat{\tau}^i, \hat{n}_1^i, \hat{n}_2^i$: Vectores unitarios de las direcciones principales del segmento i del cable.
F_i	: Fuerza aerodinámica resultante por unidad de longitud en la dirección $\hat{\tau}$ del segmento i del cable.
G_i	: Fuerza aerodinámica resultante por unidad de longitud en la dirección \hat{n}_1 del segmento i del cable.
H_i	: Fuerza aerodinámica resultante por unidad de longitud en la dirección \hat{n}_2 del segmento i del cable.
U_x, U_y, U_z	: Componentes de \vec{U}_∞ en las direcciones cartesianas georreferenciadas a la altura del segmento i del cable.
$U_\tau^i, U_{n_1}^i, U_{n_2}^i$: Componentes de \vec{U}_∞ en las direcciones principales del segmento i del cable.
c	: Longitud de la cuerda del aerostato.
α	: Ángulo de ataque del aerostato con respecto al viento.
α^*	: Ángulo de ataque inicial del aerostato.
x_b	: Distancia del centro de flotación al borde de ataque del aerostato.
x_g	: Distancia del centro de masa al borde de ataque del aerostato.
x_a	: Distancia del centro aerodinámico al borde de ataque del aerostato.
x_c	: Distancia horizontal del pto. de acoplamiento al centro de masa.
x_c^*	: Distancia horizontal inicial del pto. de acoplamiento al centro de masa.
z_c	: Distancia vertical del punto de acoplamiento al centro de masa.
z_c^*	: Distancia vertical inicial del punto de acoplamiento al centro de masa.
\vec{B}	: Vector fuerza de empuje de la atmósfera sobre aerostato.
\vec{W}	: Vector fuerza de gravedad de la Tierra sobre aerostato.
\vec{T}_{ap}	: Vector tensión resultante sobre el punto de acoplamiento.
θ	: Ángulo de con la \vec{T}_{ap} vertical.
\vec{D}	: Vector fuerza de arrastre aerodinámico del viento sobre aerostato.
\vec{L}	: Vector fuerza de sustentación aerodinámica del viento sobre aerostato.
\vec{M}_a	: Vector momento aerodinámico sobre el centro aerodinámico del aerostato.
\vec{M}_{LE}	: Vector momento aerodinámico sobre el borde de ataque del aerostato.
$\vec{M}_{c/4}$: Vector momento aerodinámico sobre un cuarto de la cuerda del aerostato.
C_D	: Coeficiente de arrastre del envoltorio del aerostato.
C_L	: Coeficiente de sustentación del envoltorio del aerostato.
C_{M_a}	: Coeficiente de momento resultante sobre centro aerodinámico del aerostato.

$C_{M_{LE}}$: Coeficiente de momento resultante sobre borde de ataque del aerostato.
$C_{M_{c/4}}$: Coeficiente de momento resultante sobre cuarto de cuerda del aerostato.
z	: Altura geométrica con respecto al suelo.
z_0	: Parámetro de rugosidad del terreno.
z_{ref}	: Altura de referencia de una medición.
U_{ref}	: Velocidad promedio del viento a la altura de referencia.
\vec{u}	: Vector de componente turbulenta de la velocidad del viento.
IT	: Porcentaje de intensidad de turbulencia del viento.
I_{ref}	: Intensidad de turbulencia que categoriza un nivel de turbulencia de viento.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Desviación estandar de \vec{u} con respecto a \vec{U}_∞ en las direcciones longitudinal, lateral y ascendente, respectivamente.
L_0	: Longitud de cable sin deformación.
L_0^l	: Longitud de cable correa sin deformación.
\vec{T}_w	: Vector tensión del cable en el punto de anclaje.
B_n	: Magnitud de la fuerza de empuje neta del aerostato.
h	: Altura del punto de acoplamiento.
l	: Radio de circunferencia que circunscribe a los puntos de anclaje.
m_p	: Capacidad de carga de sistema de globo cautivo.
m_p^*	: Mínima capacidad de carga de sistema de globo cautivo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes generales

El consumo de energía primaria en Chile se basa principalmente en la utilización de combustibles fósiles. Estos recursos son limitados y no son producidos en el país, por lo que su disponibilidad queda sujeta a la variabilidad del mercado internacional. Además, su uso genera emisiones contaminantes que afectan negativamente al medioambiente y aumentan la huella de carbono de los productos exportados.

En cuanto a la generación de electricidad en Chile, las centrales termoeléctricas representan en la actualidad un 51,3% de la potencia instalada del Sistema Eléctrico Nacional (SEN), en la Figura 1.1 se muestra la evolución de la matriz eléctrica del SEN en los últimos 25 años. Cabe agregar que estas son la única alternativa disponible cuando disminuye la producción hidroeléctrica. Teniendo en cuenta que durante los últimos años las precipitaciones han disminuido, se ha visto una tendencia al crecimiento de la generación y capacidad instalada termoeléctrica en desmedro de la hidroeléctrica.

Considerando la seguridad del suministro, eficiencia en el uso de los recursos y sostenibilidad del sistema energético del país, es necesario encontrar una combinación de fuentes, recursos y tecnologías que permitan alcanzar un mayor grado de independencia energética, garantizar el suministro a costos razonables y causar un mínimo impacto al medio ambiente.

Debido a lo anterior, el gobierno de Chile se propuso como meta que un 20% de su matriz de generación eléctrica sea producida a través de energías renovables no convencionales (ERNC) al año 2025. Lo cual según la Asociación Chilena de Energías Renovables se alcanzó durante el año 2019, seis años antes de lo planeado.

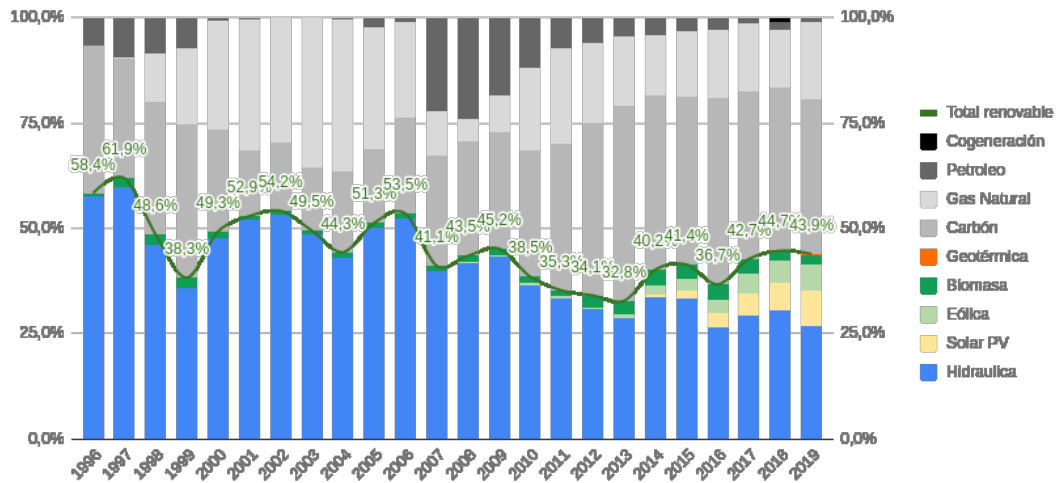


Figura 1.1: Participación relativa de fuentes renovables en generación eléctrica anual [9].

A pesar de esto, aún existen diversas barreras que impiden una mayor penetración de las ERNC en la matriz energética del país, entre las cuales se encuentra la falta de información confiable acerca de los recursos disponibles. La evaluación de los recursos renovables es una actividad que requiere de conocimiento especializado y de tiempo, además de una inversión significativa en equipamiento, operación, mantenimiento, y en el procesamiento y control de calidad de los datos generados.

La energía eólica corresponde a un tipo de ERNC, cuya fuente es la energía cinética que transporta el aire en la atmósfera. El viento, definido como toda masa de aire en movimiento, se produce principalmente como consecuencia del calentamiento desigual de la superficie terrestre por la radiación solar. El recurso eólico es explotado mediante un aerogenerador, también conocido como turbina eólica, que en términos generales transforma la energía mecánica del viento en energía eléctrica. La cantidad de energía que puede generarse depende del tipo y tamaño de la turbina, como también de la velocidad y características del viento en el lugar de su emplazamiento.

La existencia, magnitud y variabilidad del recurso eólico dependen de las condiciones climáticas y topográficas de un terreno en particular. El conocimiento del comportamiento del viento a gran escala (vientos dominantes) permite discriminar emplazamientos en las primeras fases de un proyecto. Sin embargo bajo los 100 [m] de altura, el comportamiento del viento es altamente influenciado por la superficie terrestre. Independiente de la envergadura del proyecto eólico, la correcta caracterización del viento ‘in situ’ es fundamental para asegurar una buena estimación de la energía eólica

disponible y la correcta selección del aerogenerador.

La evaluación del potencial eólico de un emplazamiento se realiza a través de una campaña de medición, cuyo objetivo es caracterizar las condiciones específicas del terreno, que experimentaría la estructura del aerogenerador. Las condiciones específicas del terreno corresponden a las condiciones externas: condiciones ambientales y de viento; y las condiciones del suelo: condiciones topográficas y sísmicas [8]. Durante una campaña de medición, se diseña un programa de evaluación de recurso eólico para determinar la producción anual de energía (AEP) utilizando como parámetros: AEP media esperada y su incertidumbre asociada. El horizonte financiero del proyecto es determinado utilizando estos dos indicadores.

Pequeñas desviaciones en el nivel de la incertidumbre pueden tener un efecto significativo en el error de la AEP estimada, aumentando el riesgo del proyecto y en consecuencia el costo final de la producción de energía. Dentro de la incertidumbre se consideran la extrapolación del perfil vertical del viento y la extrapolación horizontal, desde la posición de la medición hasta la ubicación del buje de la turbina del aerogenerador, entre otras. La incertidumbre de las mediciones puede ser minimizada adoptando mejores prácticas en el diseño, selección, calibración e implementación de la anemometría. Cualquier evaluación de recurso eólico debe ser acompañada por una evaluación exhaustiva y una declaración numérica de su incertidumbre.

La duración mínima de una campaña de medición para poder determinar las variaciones diurnas y estacionales del viento es de 1 año [16], y las mediciones de cada uno de los parámetros atmosféricos debe abarcar al menos el 90 % de la duración de la campaña, manteniendo al mínimo cualquier interrupción en las mediciones (menos de una semana). Sin embargo, para proyectos de pequeña escala ($\leq 10 [kW]$ potencia instalada), este no es un requisito fundamental [37] pudiendo utilizarse datos del viento provenientes de otras fuentes, tales como datos de estaciones meteorológicas cercanas al emplazamiento, que deberán ser corroborados posteriormente.

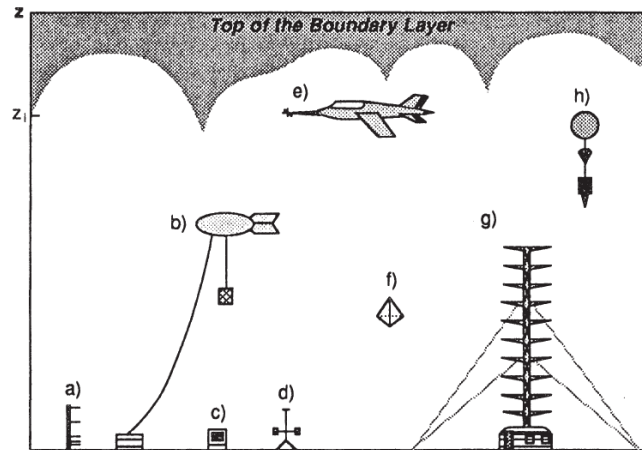


Fig. 10.2 Sketch of instrument platforms for direct sensors. (a) Mast. (b) Kyttoon. (c) Instrument (screen) shelter. (d) Mesonet station. (e) Aircraft. (f) Tetraon. (g) Tower. (h) Radiosonde.

Figura 1.2: Esquema de diferentes alternativas de medición [41].

La caracterización del viento puede realizarse de distintas maneras, como se muestra en la Figura 1.2, donde la alternativa a escoger dependerá de factores como la accesibilidad y topografía del terreno, factibilidad económica y la incertidumbre inherente al equipo de medición en particular, entre otros. Dependiendo del tipo de anemómetro, la medición de la velocidad del viento puede realizarse directamente en los puntos de interés o de manera remota desde el nivel del suelo.

La opción más utilizada en la actualidad es la torre de medición meteorológica (“met-mast”), sobre la cual se instalan los equipos de medición en las respectivas alturas de interés. Generalmente se usan dos tipos de estructuras de torres [40]: la torre tubular, utilizada para instalaciones en terrenos llanos; y la torre de rejilla atirantada, utilizada para instalaciones en terreno complejo.

Ventajas

- Los instrumentos de medición quedan en una posición fija montada en la estructura, por lo que se asegura una medición continua y datos meteorológicos confiables.

Desventajas

- Deben instalarse sobre un área abierta y nivelada (plana), los costos de instalación y mantenimiento aumentan para topografías complejas,
- El alto costo relativo de campañas de medición con este tipo de estructuras limita la factibilidad económica de proyectos eólicos de pequeña escala.

Una alternativa que utiliza un equipo de medición remota es SODAR (“Sound Detection And Ranging”), el cual basa su funcionamiento en el principio de retro



(a) Ejemplo de “met-mast”, (b) Modelo de SODAR (c) Modelo de LIDAR anemómetro de copa y veleta. comercial “Triton Sonic Wind Profiler”. comercial “ZephIR laser anemometer”

Figura 1.3: Equipos más utilizados para llevar a cabo una campaña de evaluación del recurso eólico.

dispersión acústica. Para poder medir el perfil vertical del viento, se envían pulsos acústicos con un pequeño ángulo con respecto a la vertical. Para mediciones de velocidad del viento en tres dimensiones, se necesitan al menos tres pulsaciones en diferentes direcciones. Ha sido principalmente usados para aplicaciones meteorológicas y aeroespaciales, pero en los últimos años su uso para la evaluación del potencial eólico ha ido en aumento. Asumiendo que el equipo emisor y el receptor no están separados, la configuración se denomina SODAR monoestático. Actualmente, todos los SODAR comerciales utilizados para aplicaciones de energía eólica son monoestáticos.

Ventajas

- Miden el perfil vertical del viento de manera remota, desde el nivel del suelo hasta 300 [m].

Desventajas

- No están estrictamente normados los protocolos de calibración ni para medir la incertidumbre y confiabilidad de estos sistemas para aplicaciones de energía eólica.
- Tienen problemas para medir a velocidades de viento menores a 4 [m/s] y sobre 25 [m/s].
- No poseen la autonomía para ser instalados en terrenos complejos y/o aislados.

Otro equipo de medición remota es LIDAR (“Light Detection And Ranging”), es un sistema similar al SODAR. Este dispositivo, en vez de un pulso acústico, emite un rayo de luz y utiliza el efecto Doppler para medir la velocidad y altura del viento. Estos equipos han sido usados extensivamente en aplicaciones meteorológicas y aeroespaciales, pero su costo es muy elevado. Sin embargo, se han desarrollado sistemas LIDAR comerciales de menor costo para evaluación de recursos de interés en aplicaciones de energía eólica. Hasta la fecha, existen dos diseños comerciales disponibles de este tipo: de onda constante

con foco variable y de pulsos con foco fijo.

- Ventajas**
- Miden el perfil vertical del viento de manera remota, desde el nivel del suelo hasta 200 [m].
 - Mediciones más precisas y exactas que el dispositivo SODAR.

- Desventajas**
- Alto costo de los equipos de medición.
 - No poseen la autonomía para ser instalados en terrenos complejos y/o aislados.

Existe también otra alternativa, si bien no muy utilizada actualmente, menos costosa que las “met-mast” y con mayor autonomía que los equipos de medición remota. Los sistemas de globos cautivos utilizan un aerostato fijado al suelo por una o más líneas de anclaje, cuyo empuje es utilizado para aerotransportar los equipos de medición meteorológica a una altura de interés. En este tipo de sistemas, los equipos de medición pueden permanecer en una posición aproximadamente fija por una larga duración en condiciones meteorológicas razonables.

- Ventajas**
- Menor costo y mayor autonomía que los equipos de medición remota.
 - Puede instalarse sobre terrenos complejos.

- Desventajas**
- La fuerza de arrastre producto de la interacción del viento con el sistema tiende a desplazar la posición de los instrumentos de medición.
 - La incertidumbre de la medición es mayor ya que ésta no se realiza en una posición fija.
 - La pérdida de gas de relleno requiere detener la medición para poder recargar el aerostato y evitar la pérdida de altura.

1.2. Declaración del problema

Las ventajas de los sistemas de globos cautivos los hacen atractivos para proyectos eólicos de mediana y pequeña escala. Sin embargo, se espera una variación en la posición de los instrumentos de medición debido al ciclo diario de la capa superficial de la atmósfera en el emplazamiento. Además el diseño del sistema debe considerar los desplazamientos producidos por fenómenos aerodinámicos producto de la turbulencia atmosférica, como por ejemplo: ráfagas de viento. Para que el sistema se comporte como una estación meteorológica deben contenerse los desplazamientos, de la posición de los instrumentos de medición, dentro de un margen menor al 5% de la altura predeterminada.

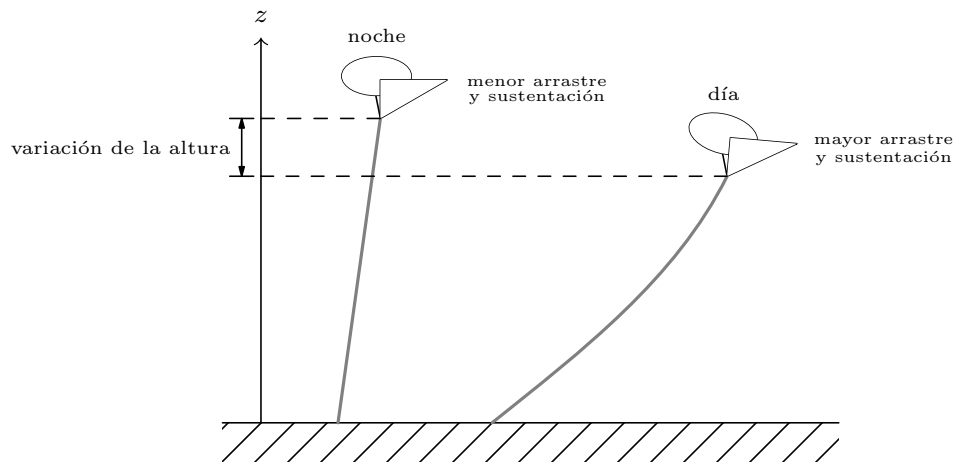


Figura 1.4: Variación de la altura de operación, por efecto del ciclo día-noche en la capa superficial de la atmósfera.

Considerando lo anterior, con el objetivo de desarrollar una metodología alternativa de evaluación del recurso eólico para proyectos de pequeña y mediana escala; la cual sea económica, autónoma, adaptable al terreno y cuya incertidumbre se mantenga dentro de niveles razonables. En el contexto del proyecto FONDEF ID16I10105, se propone un sistema de globo cautivo llamado Estación de Medición Aerotransportada Autónoma (EMA2), ver Figura 1.5. Este se compone de un Globo Aerostático de Alta Estabilidad (GA2E) que eleva hasta 3 plataformas de mediciones (PM), equipadas con sensores que miden los parámetros característicos del viento, colgadas a lo largo de una línea de carga, a una altura de 10, 30 y 50 metros respectivamente.

Para asegurar una buena campaña de medición, la estructura del sistema debe ser capaz de mantener las PM a la altura predeterminada durante el mayor tiempo posible y minimizar las perturbaciones sobre la posición de los sensores, que son inducidas por cambios abruptos en la magnitud y/o dirección del viento. El análisis estático y dinámico de la estructura flexible del EMA2, bajo distintas condiciones de viento, provee una aproximación de la posición y movimiento de las PM, que permite estimar su rendimiento como estación de medición meteorológica.

En el marco de este trabajo, se desarrollará y validará un modelo numérico basado en los métodos de volúmenes finitos (FVM) y elementos finitos (FEM), para evaluar la interacción fluido-sólido (FSI) de la estructura flexible que forman el conjunto de globo aerostático, cables de anclaje y carga aerotransportada. Específicamente se estudiarán perturbaciones en la posición del globo cautivo auto-orientable, en respuesta a fluctuaciones del campo de flujo atmosférico.

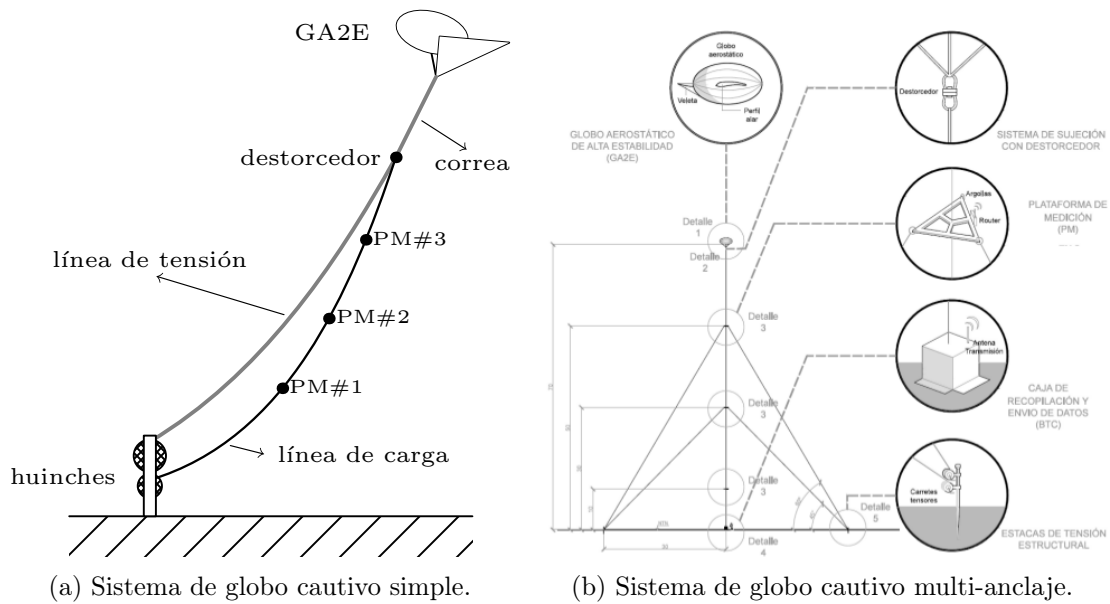


Figura 1.5: Esquemas de prototipos del sistema EMA2.

En el Capítulo 1 se introducen las diferentes alternativas para realizar la evaluación del recurso eólico, la declaración del problema, hipótesis y objetivos de la presente tesis. En el Capítulo 2 se describen los sistemas de globos cautivos y se entrega un resumen de la investigación académica y comercial sobre este tipo de sistemas. En el Capítulo 3 se define el marco teórico abarcado por el estudio. En el Capítulo 4 se define la metodología del desarrollo del modelo estático de sistema de globo cautivo para una y tres líneas de anclaje. En el Capítulo 5 se verifican las simulaciones del modelo de aerostato y de los cables, comparando con ejemplos encontrados en la literatura, y se valida el modelo comparando los distintos tipos de globos, bajo condiciones de viento prescritas. Finalmente, en el Capítulo 6, se entregan las conclusiones y las posibles modificaciones del modelo en el futuro.

1.3. Hipótesis

Es posible mejorar el comportamiento aero-estructural, para un amplio rango de velocidades de viento promedio y altura de operación, de un sistema de globo cautivo auto-orientable, anclado por uno o tres cables, para operar como una estación meteorológica, introduciendo cambios en la geometría del aerostato buscando maximizar la sustentación y minimizar el arrastre aerodinámico.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivos generales

Aportar un método de diseño de sistemas de globos cautivos cuyo objetivo sea la evaluación del recurso eólico, que permitirá ser una alternativa a las torres de medición meteorológica.

Analizar la interacción fluido-estructura, de un globo cautivo auto-orientable de geometría estabilizadora mixta, en presencia de un campo de flujo atmosférico turbulento.

Desarrollar un modelo matemático que permita predecir el desplazamiento espacial del aerostato bajo distintas condiciones de viento, y sirva como base para elaborar un sistema de control electrónico de la geometría de la estructura flexible.

1.4.2. Objetivos específicos

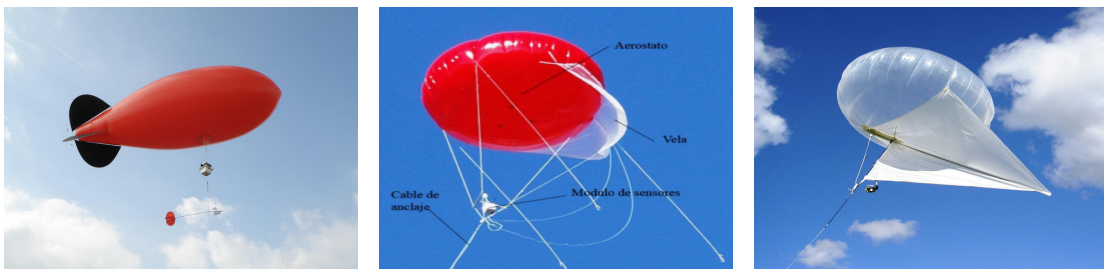
- Investigar el estado del arte académico y comercial, enfocado a la caracterización del viento mediante estructuras flexibles aerotransportadas con globos cautivos de alta estabilidad.
- Definir un modelo analítico para la parametrización del comportamiento aeroestructural y par estabilizador de un aerostato cuya forma es aerodinámica.
- Desarrollar un código híbrido FEM-FVM para la evaluación numérica de la interacción fluido-estructura de distintas configuraciones de sistemas de globo cautivo auto-orientables, con una o más líneas de anclaje.
- Comparar el rendimiento como estación meteorológica de múltiples geometrías de aerostatos de alta estabilidad.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Sistemas de globos cautivos

Un sistema de globo cautivo (SGC) se compone de un globo relleno con un gas más liviano que el aire, normalmente helio o hidrógeno, cuyo movimiento es restringido por una estructura flexible conformada por un conjunto de cables que lo mantienen atado a una posición fija en uno o más puntos de anclaje. La fuerza de empuje del aerostato, generada por el principio de Arquímedes, entrega la tensión a la estructura que mantiene elevada diversos tipos de carga dependiendo de la aplicación. Por ejemplo: equipos de medición meteorológica, de telecomunicaciones, de vigilancia, vallas publicitarias, etc. La autonomía y el bajo costo de este tipo de sistemas son algunas de las ventajas que han incentivado su aplicación tanto en proyectos militares como civiles.



(a) Modelo de “Blimp” comercial “Vaisala DigiCORA TetherSonde”. (b) Ejemplo de “net-curtain balloon”. (c) Modelo de “Kytoon” comercial “Allsopp Helikite”.

Figura 2.1: Modelos de globos cautivos.

Los primeros SGC se diseñaron utilizando un globo esférico, con la carga colgada debajo de este. La forma esférica utiliza la cantidad mínima de material para contener el gas de relleno, por lo tanto es la más liviana y menos costosa. Sin embargo, cuando la

intensidad del viento aumenta el globo esférico se vuelve aerodinámicamente inestable, poniendo en riesgo la integridad de la estructura. Para evitar este problema, el diseño de la forma geométrica del aerostato se alargó con el fin reducir su resistencia al viento, y además se le añadieron aletas en el borde de salida, de manera que el globo se oriente de frente al viento y su vuelo sea más estable. Este tipo de aerostatos es conocido como dirigible (“blimp”), actualmente se han desarrollado modelos híbridos de globo con malla o NCB (“net-curtain balloon”) y con volantín (“kytoon”) que aprovechan la intensidad del viento para generar aerodinámicamente parte de la tensión.

El sistema de globo cautivo más simple se contruye utilizando un sólo cable, con un extremo fijo anclado a una superficie, y unido al aerostato en su extremo libre; similar en comportamiento a un volantín o a una boya anclada al fondo marino. La carga puede estar montada directamente debajo del globo, o colgada de algún otro punto a lo largo de la línea de anclaje. Bajo esta configuración, la altura del aerostato puede ser controlada modificando la longitud del cable, pero su posición en el plano horizontal dependerá exclusivamente de la dirección del viento. Cualquier ráfaga capaz de generar un desplazamiento del aerostato, producirá entonces un cambio en la posición de la carga. La estabilidad, es decir, su capacidad para operar como una estación fija, aumenta considerablemente al utilizar tres o más líneas de anclaje [38] [30].

Los cables tensionados por la fuerza de empuje del globo, forman un tipo de estructura flexible conocida como estructura de tensión. Donde las fuerzas externas que se ejercen sobre la estructura son transmitidas hacia los anclajes mediante cables viscoelásticos, y la rigidez de la estructura dependerá de la diferencia entre la tensión generada por el aerostato y el peso total del sistema. Las ventajas operacionales que tiene este tipo de estructura [25] son:

- El peso de la estructura es comparable al peso de la carga.
- Los cables están altamente tensionados por la fuerza de flotación generada por el aerostato en equilibrio estático. Reduciendo el desplazamiento debido a perturbaciones externas y aumentando su rigidez frente a fuerzas horizontales.
- La geometría de la estructura puede reconfigurarse fácilmente modificando la longitud de los cables.
- Las fuerzas aerodinámicas que se generan sobre la estructura son transportadas eficientemente por los esfuerzos tensionales (de tracción) de los cables.

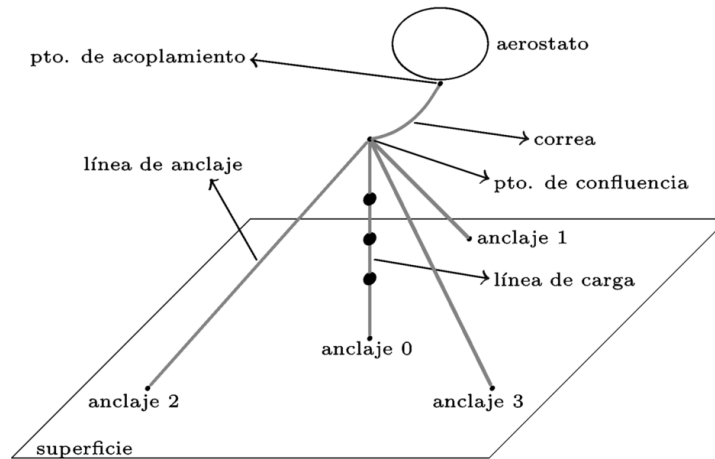


Figura 2.2: Esquema de sistema de globo cautivo multi-anclaje.

Un SGC multi-anclaje, como el mostrado en la Figura 2.2, está compuesto por los siguientes elementos estructurales:

- Anclaje: Estructura fijada firmemente al suelo, donde se monta el huinche del cable que funciona como línea de anclaje.
- Cable: Elemento mecánico que solo soporta esfuerzos de tracción, y que es utilizado para transmitir las tensiones generadas por las fuerzas externas hacia los anclajes, y mantener unida la estructura flexible.
- Carga: Equipos de medición meteorológica a aerotransportar, los cuales se fijan a lo largo de una línea de carga o pueden colgar libremente de la estructura de tensión.
- Aerostato: Vehículo más liviano que el aire que, a través de su fuerza de empuje y sustentación, genera la tensión que da rigidez a la estructura flexible y mantiene a la carga en el aire.
- Correa: Cable que separa el punto donde se acopla el aerostato a la estructura flexible, y el punto donde convergen las líneas de anclaje.

El sistema EMA2 en particular se diseña con la intención de que las PM permanezcan inmóviles a una altura previamente definida, y mantengan su posición durante el período de tiempo que dure la campaña de medición. Los principales factores que dificultan su funcionamiento son: la naturaleza turbulenta de la atmósfera, que tiende a desplazar el sistema de su estado de equilibrio y afecta los resultados de la medición; y la constante pérdida de gas de relleno, que disminuye la fuerza de empuje y limita el tiempo de

operación del sistema.

La velocidad con que se escapa el gas de relleno depende del tipo y material de la envoltura del aerostato. Se distinguen dos tipos de envoltura: con una capa de envoltura o con doble capa de envoltura. La pérdida de helio de globos con una capa no supera alrededor de 5% por semana. Ello hace posible que permanezca a la altura de vuelo hasta un mes, si el sistema es proyectado con suficientes reservas de helio para compensar su pérdida parcial. Los aerostatos con doble capa de envoltura, además de la capa del poliuretano tienen una segunda envoltura protectora fabricada con un material más sólido. Gracias a la mayor protección del material de la segunda envoltura, el globo de dos capas tiene una ventaja considerable en condiciones meteorológicas extremas. Sin embargo no puede variar su volumen fácilmente, aumentando así la presión interna cuando cambia la temperatura del aire.

La influencia del campo de flujo atmosférico sobre el sistema se presenta en la forma de fuerzas de arrastre (fuerzas horizontales), producto del movimiento relativo entre el viento y la estructura flexible. Entre ellas, la fuerza aerodinámica resultante sobre el aerostato es la más importante, ya que en condiciones de viento extremas puede ser comparable en magnitud a la fuerza de empuje. Las fallas de un sistema de globo cautivo ocurren por cambios abruptos en la velocidad del viento. Por lo tanto, la estimación de estas cargas de golpe es un requerimiento importante en la etapa de diseño del sistema de globo cautivo.

En una atmósfera estáticamente estable, las fuerzas de arrastre tienden a desplazar el sistema a su estado de equilibrio. Donde la posición de cada componente en el espacio queda fija, siempre y cuando el campo de flujo atmosférico pueda considerarse estacionario. Sin embargo el sistema se encuentra inmerso dentro de la capa límite planetaria o PBL (“planetary boundary layer”), específicamente en la subcapa superficial (“surface layer”), la cual está dominada por flujos turbulentos. La respuesta del SGC frente a perturbaciones en la intensidad y/o dirección del viento determinará su capacidad para operar como estación de medición meteorológica.

Los cables de la estructura de tensión, deben ser construidos de un material que sea rígido, ligero y tenga un esfuerzo de falla elevado. Esto evita que el perfil geométrico del cable se curve y se asemeje más a una línea recta, resultando en una estructura que responde mejor frente a fuerzas horizontales. También debe tenerse en cuenta la selección del diámetro del cable, ya que el área de la sección transversal debe ser capaz de soportar la tensión máxima dentro del rango de operación del sistema, multiplicada

además por un factor de seguridad conservador de al menos 5 [17].

2.2. Investigación académica

El análisis de sistemas de globos cautivos, si bien se ha realizado anteriormente [43] [42], se ha restringido mayoritariamente a sistemas de un solo cable, donde se presentan algunas simulaciones dinámicas enfocadas principalmente en la verificación de las características aerodinámicas del modelo de aerostato, sin discutir la dinámica de los cables o algún sistema de control sobre la estructura de tensión.

La estructura del sistema se asemeja bastante a la estructura de sistemas de puertos flotantes y sistemas de boyas. De esta manera el diseño de estas estructuras sirve como base para desarrollar el modelo que se propone. La Guardia Costera canadiense [39] desarrolló un modelo matemático, en conjunto con un estudio experimental, para simular el comportamiento de un sistema navegación de boyas autónomas. Este sistema se asemeja al un globo cautivo mediante un solo cable, ya que la boya es anclada al fondo marino y se deja a la deriva. Para ello se modeló la boya como una masa en el nodo extremo del cable, sujeta a flotación, arrastre viscoso y gravedad. El cable fue modelado como elementos discretos de cable conectados mediante una articulación sin fricción. Cada elemento incluye rigidez interna y amortiguamiento, la rigidez flexional es despreciada dada la flexibilidad de los cables. Los nodos del cable se modelan como masas sujetas a gravedad, flotación y fuerza de arrastre inducida por las corrientes marinas. La discretización del cable, conocida como de masas condensadas (“lumped-mass”) y originalmente propuesta en [50], permite que cada elemento de cable pueda poseer propiedades distintas, de esta manera se pueden probar esquemas de cables compuestos por distintos materiales (alguna combinación de cuerda, cable de acero y/o cadenas). El movimiento del sistema es obtenido al integrar las ecuaciones de movimiento.

Este modelo de masas condensadas para la discretización de cables fue utilizado también en [11] para predecir, entre otras cosas, el movimiento de un sistema de vehículo enjaulado operado remotamente o ROV (“Remotely Operated Vehicle”) y la tensión que soporta el cable que une al barco con la jaula del ROV. Este vehículo está diseñado para operar en aguas profundas, descendiendo enjaulado para luego moverse independientemente en el fondo marino controlado desde la cubierta del barco de soporte, y el cable que lo conecta con el barco le permite permanecer indefinidamente sumergido y transmite información en tiempo real al barco. No obstante, el cable acopla

el movimiento del barco con el movimiento de la jaula y con el movimiento del ROV, esto sumado a las corrientes marinas pueden ocasionar deterioros en el cable que ponen en peligro la recuperación del ROV. Los desplazamientos horizontales del barco son pequeños comparados con la escala vertical, y por lo tanto no son transmitidos por el cable. De esta manera un modelo unidimensional mediante el método de elementos finitos es suficiente para representar el sistema y al utilizar una integración numérica Runge-Kutta de cuarto/quinto orden se consiguen resultados precisos con un gasto computacional moderado.

Volviendo a sistemas de globos cautivos, el Consejo Nacional de Investigación de Canadá (NRCC) a finales los años 90 estuvo desarrollando un prototipo de radio telescopio compuesto por un arreglo de antenas que en conjunto abarcan un millón de metros cuadrados [2]. El proyecto internacional conocido como “Square Kilometre Array” (SKA) incluye organizaciones de muchos países incluyendo a Australia, Canadá, China, India, los Países Bajos y Estados Unidos [12].

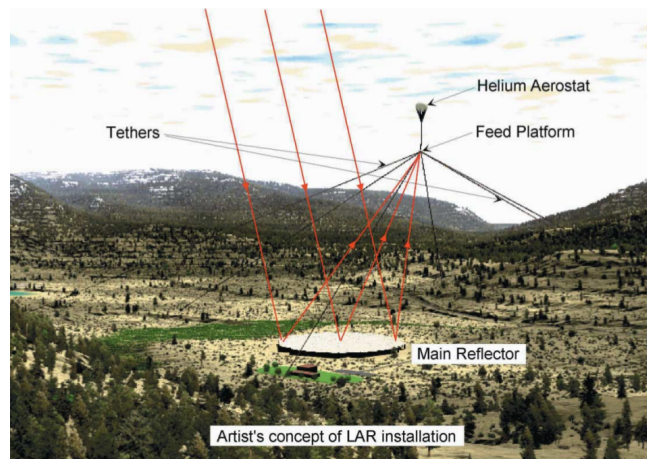


Figura 2.3: Representación del “Large Adaptative Reflector” [33].

Dada la magnitud del SKA no es factible económicamente utilizar los radio telescopio tradicionales, sino que se propuso la construcción de un “Large Adaptative Reflector” (LAR) el cual es un reflector parabólico de largo diámetro (alrededor de 200 metros) y gran longitud focal (alrededor de 500 metros) que requiere una plataforma aerotransportada que soporte el receptor focal (centrada en el reflector con un ángulo de cénit entre 0° y 60°), una esquematización del LAR se observa en la Figura 2.3. Un arreglo de 50 LARs serían necesarios para construir el SKA. El desafío para implementar este diseño de radio telescopio es controlar con precisión la posición de la plataforma aérea del receptor, para lo cual se utilizan 3 o más cables de anclaje mientras que un aerostato es utilizado para entregar la fuerza de flotación al sistema.

En [23] se realizan 3 análisis distintos para encontrar la solución estática del sistema LAR bajo regímenes de viento moderado (velocidad de viento constante de 10 $[m/s]$ con ráfagas de 2.5 $[m/s]$). El primero de estos es un análisis de cable continuo que permite determinar las fuerzas y los perfiles de los cables para la condición sin viento. Los otros dos análisis utilizan una discretización de los cables para resolver iterativamente las fuerzas y los perfiles con una condición de viento promedio. Las dos discretizaciones utilizan el método de masas condensadas en nodos a lo largo del cable y donde se concentran las fuerzas distribuidas que actúan sobre él (peso, fuerzas aerodinámicas y tensión). La diferencia radica en que uno posiciona los nodos en los extremos de cada segmento de cable, mientras que el otro los posiciona en el punto medio de cada uno. La discretización del cable permite prescribir distintas velocidades y direcciones de viento en cada nodo, aunque para el estudio se utiliza un perfil de viento constante. Si bien las expresiones matemáticas derivadas de la discretización son distintas, con un número suficientemente grande de elementos, llegan a la misma solución. Sin embargo la primera discretización es incapaz de especificar la posición final del aerostato, no permite separar el punto de confluencia del aerostato mediante una correa y dificulta la inclusión de más de tres cables. Se utilizan dos modelos de aerostatos, uno esférico y otro de forma aerodinámica (con una razón de 3 : 1 entre largo y diámetro), y se comparan dos tipos de cable sintético con un cable de acero.

A partir de esta solución estática, en [31] se define un ciclo de control de la posición de la plataforma aerotransportada donde se concluye que se puede mantener la plataforma dentro de un rango menor a 1 metro desde la posición deseada, en la condición de viento más desfavorable. También se concluye que al utilizar un aerostato de forma esférica, se requiere menos potencia en el sistema de control. El peor rendimiento del aerostato con forma aerodinámica se debe a la fuerza de sustentación producida por cambios en la dirección del viento inducidos por ráfagas de baja frecuencia.

No obstante algunas investigaciones [3] [4] sobre globos cautivos de forma esférica han demostrado que la geometría esférica genera vórtices que inducen una fuerte oscilación cuya amplitud es cercana a 2 veces el diámetro del globo, en condición de flujo estacionario. Las oscilaciones incrementan el arrastre alrededor de un 100 % sobre el esperado en una esfera para flujos estacionarios.

Los análisis dinámicos realizados sobre sistemas de globos cautivos pueden separarse en estudios lineales y no lineales. James DeLaurier [19] fue el primero en estudiar la dinámica no lineal de un aerostato acoplado a un modelo comprensivo de cable, para

ello consideró un movimiento en 2 dimensiones y condición de viento estacionario, para luego agregar un modelo de turbulencia en [18]. La estabilidad del sistema fue analizada al desacoplar el movimiento del aerostato en movimientos laterales y longitudinales. Un método de paneles segmentados fue introducido a este modelo en [44] para modelar el aerostato.

Un modelo lineal de globo cautivo fue propuesto en [27], y fue validado en condición de viento estacionario utilizando datos experimentales. Un análisis de estabilidad fue realizado pero el acople dinámico entre el cable y el aerostato fue descartado. Al linealizar las ecuaciones de movimiento del modelo no lineal [44] se realizó un análisis de estabilidad de un aerostato comercial de gran envergadura [46]. Este análisis sólo incluyó movimientos pendulares, desestimando otros modos de movimiento; y mostró una buena concordancia con los datos experimentales presentados en [45].

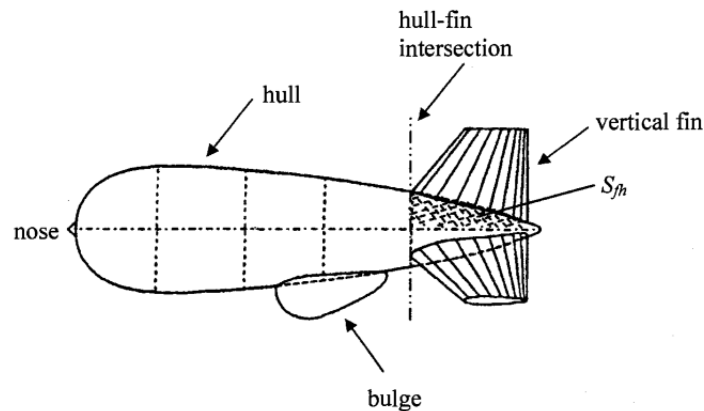


Figura 2.4: Estructura de un dirigible TCOM 71M [46].

Siguiendo con el desarrollo del diseño del LAR, en [5] es elaborado un modelo dinámico no lineal de un sistema de aerostato cautivo con un solo cable. Donde el aerostato es simulado utilizando un método de descomposición por componentes (desarrollado en [29]), es decir, las fuerzas y momentos aerodinámicos sobre el aerostato son calculados al descomponer el aerostato en componentes con características aerodinámicas conocidas. Estos componentes (ver Figura 2.4) son: el *envoltorio* (“hull”) y las *aletas* (“fins”). Las fuerzas son calculadas en cada componente individual para luego ser sumadas en el eje de referencia del aerostato. El modelo dinámico fue validado experimentalmente en [6] para el sistema con tres cables (ver Figura 2.5), realizando cuatro vuelos de prueba para investigar cómo la geometría del sistema afecta el comportamiento aerodinámico de este.

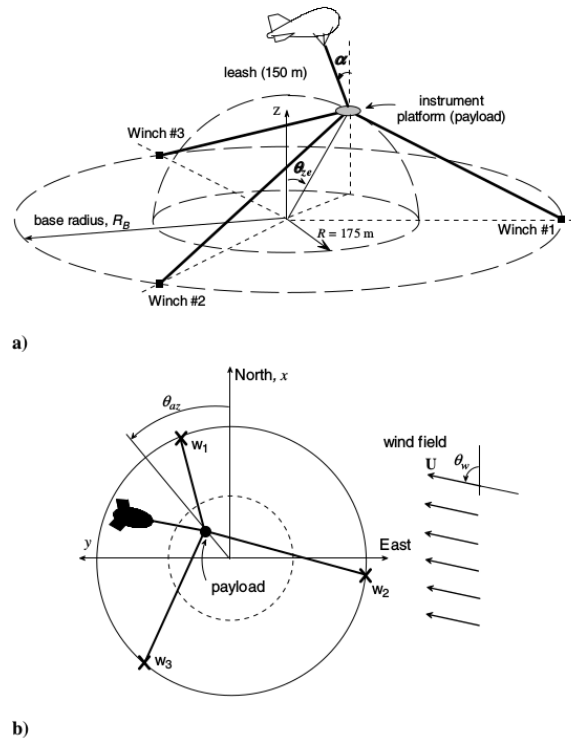


Figura 2.5: “Layout” del sistema experimental de globo cautivo de tres cables [6].

Soportar condiciones meteorológicas adversas, especialmente en presencia de vientos fuertes, es un desafío clave en la operación del aerostato que pretende lograr vuelos de alta duración. Un modelo atmosférico mejorado, donde se generan entradas de ráfagas de viento usando datos reales de un huracán, es introducido en [26] utilizando un modelo no lineal de aerostato en 2D, que incluye un cuerpo rígido con cargas aerodinámicas acoplado a un cable continuo, validado con los resultados experimentales de [45]. En [35] se lleva a cabo una simulación utilizando ecuaciones diferenciales no lineales en un modelo de masas condensadas, investigando tres escenarios típicos de interacciones entre el aerostato y el viento.

2.3. Patentes comerciales

Actualmente se pueden encontrar algunos sistemas de medición meteorológica en el comercio, a base de aerostatos cautivos, como el sistema “DigiCORA TetherSonde” de la empresa finlandesa Vaisala y “SmartTether” de la empresa estadounidense Anasphere Inc. El sistema “DigiCORA TetherSonde” consiste de un aerostato tipo

“blimp”, hinchable eléctrico para la lianza, hasta seis módulos “TetherSonde” y un módulo “Ozonesonde”. Cada módulo “TetherSonde” tiene un anemómetro de cazoletas y sensores de temperatura y presión. Cada módulo tiene forma de una veleta aerodinámica, que permite medir la dirección de viento con ayuda de un compás digital. Los módulos se alimentan con una batería alcalina de 9 [V]. Se puede añadir también un pack adicional de baterías que aumenta autonomía hasta unas 6 horas.

Los módulos “SmartTether” de Anasphere Inc. son similares a los módulos de Vaisala, con forma de veleta. Contienen un anemómetro de cazoletas y un compás digital. Se comunican por radio con una estación base en tierra para el registro de los datos y también se alimentan por baterías. Los sistemas a base de los aerostatos que se mencionan se ven limitados por la velocidad admisible del viento, que no debe superar en la mayoría de los casos los 10 [m/s], y por la duración de la medición, que se limita a varias horas como máximo.

Otros acercamientos al uso de globos cautivos para la caracterización de la velocidad y dirección del viento se encuentran en las bases de datos internacionales de patentes y marcas. Como en la aplicación KR20020023769 [22] un sistema de anemómetros elevados con globos publicitarios, el cual mide la velocidad y dirección del viento, además transmite la información de manera inalámbrica para ser leída por un equipo receptor; y en la solicitud DE19908330 [10], con un sistema para determinar la altura de vuelo del aerostato.

Otros dispositivos para la medición de las características del viento, sobre plataformas móviles se describen en JPS59218917 [48] y en ES2304086 [32]. En ES2366287 [1], se diseña un dispositivo para la medición de la velocidad y la dirección del viento con vistas a la implantación de aerogeneradores eólicos, que comprende de un globo anclado a una plataforma marítima o terrestre, que mide la velocidad y dirección del viento; y está provisto de un sistema de control de la altura del sensor a través de un altímetro. Este diseño está más enfocado para aplicaciones “off-shore”, pero claramente puede ser utilizado en tierra firme. Mostró una buena precisión para intervalo de velocidades entre 1 [m/s] y 10 [m/s]. Se plantea la idea de implementar un sistema de control automático de la altura de la sonda. Por último, se quiere comprobar que el prototipo puede funcionar con velocidades de viento de hasta 25 [m/s]

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Mecánica del medio continuo

Un medio continuo se define por el conjunto infinito de partículas que conforman un cuerpo (ya sea en estado sólido, líquido, gaseoso, etc.) que será estudiado macroscópicamente. Al asumir que no existen discontinuidades, a pesar de las que puedan existir a nivel atómico o molecular, el desarrollo teórico matemático de este medio y de sus propiedades puede elaborarse a partir de funciones continuas.

La mecánica es la rama de la física que estudia el comportamiento de un cuerpo, cuando está sujeto a fuerzas, y como se desarrolla en el tiempo. La mecánica del medio continuo por lo tanto, busca establecer un conjunto de ecuaciones que gobiernan un problema físico en particular, basado en principios fundamentales, desde una perspectiva macroscópica.

En general, cuando se aplica una fuerza a un sólido, este es capaz de volver a su estado original cuando dicha fuerza es removida. En contraste, los fluidos (líquidos y gases) se comportan de manera diferente, por lo tanto, la mecánica del medio continuo es separada en dos grupos: Mecánica de Sólidos y Mecánica de Fluidos. Sin embargo, las ecuaciones fundamentales son las mismas para ambos.

3.1.1. Ecuaciones de la cinemática

El movimiento de una partícula, con respecto a un sistema de referencia, es expresado matemáticamente por una función que traza la trayectoria recorrida por esta. La función entrega las coordenadas de los puntos espaciales que ocupa la partícula a lo largo del tiempo y depende del vector velocidad \vec{v} , rapidez con que cambia la posición, y del vector aceleración \vec{a} , variación de la velocidad respecto del tiempo. Para desarrollar las

expresiones matemáticas de \vec{v} y \vec{a} , se define el vector de desplazamiento \vec{u} , como la diferencia entre los vectores de posición de una partícula en las configuraciones actual e inicial.

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}}_{\text{descripción Lagrangiana}} = \underbrace{\vec{x} - \vec{X}(\vec{x}, t)}_{\text{descripción Euleriana}} \quad (3.1)$$

El campo de velocidades se define como la derivada temporal del vector de posición de cada partícula.

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\vec{u} + \vec{X})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{X}}{dt}}_{=0} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (3.2)$$

El campo de aceleración se calcula como la *derivada material* del campo de velocidades.

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad (3.3)$$

Considerando que cualquier cantidad física o propiedad \mathcal{Z} , asignada a una partícula del medio continuo, puede escribirse en su descripción material o Lagrangiana como $\mathcal{Z}(\vec{X}, t)$, y en su descripción espacial o Euleriana como $\mathcal{Z}(\vec{x}, t)$. Se define la *condición estacionaria* de una propiedad \mathcal{Z} cuando, escrita en su descripción Euleriana, no se observa dependencia de la variable temporal. No obstante esto no implica que, para una misma partícula, la propiedad en cuestión no varíe con el tiempo; la influencia del tiempo aparece implícitamente debido a la dependencia de las coordenadas materiales.

$$\text{Condición Estacionaria: } \mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(\vec{x}) = \mathcal{Z}(\vec{x}(\vec{X}, t)) = \mathcal{Z}(\vec{X}, t) \quad (3.4)$$

3.1.2. Deformación infinitesimal

La *teoría de pequeñas deformaciones* se basa en dos hipótesis que simplifican la descripción matemática de la deformación. La primera indica que los desplazamientos son muy pequeños frente a las dimensiones típicas del medio y la segunda que los gradientes de los desplazamientos sean muy pequeños también. Esto significa que las configuraciones Ω_0 , y Ω_t están muy próximas la una a la otra, y en consecuencia, las coordenadas materiales coinciden con las espaciales, por lo tanto, no es necesaria la distinción entre descripción Lagrangiana y Euleriana.

$$\text{1era Hipótesis: } \vec{x} = \vec{u} - \vec{X} \cong \vec{X}$$

$$\text{2da Hipótesis: } \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Se puede demostrar que bajo estas hipótesis los tensores, material $\overline{\overline{E}}$ y espacial $\overline{\overline{e}}$, de deformación convergen al *tensor de deformación infinitesimal*, denotado por $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{x}, t)$. Este tensor es simétrico y todas sus componentes son infinitesimales.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{E}} &= \overline{\overline{e}} = \overline{\overline{\varepsilon}} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.3. Estado de tensión

Las fuerzas que actúan sobre un medio continuo se clasifican en dos tipos: fuerzas másicas y fuerzas superficiales. Las *fuerzas másicas*, son fuerzas que se ejercen a distancia sobre las partículas del medio; las fuerzas gravitatorias y las inerciales son ejemplos de este tipo. Sea $\vec{b}(\vec{x}, t)$ la descripción Euleriana del campo vectorial *fuerzas másicas por unidad de masa*. La fuerza resultante total \vec{f}_V , de las fuerzas másicas que actúan sobre el volumen material V se calcula como:

$$\vec{f}_V = \int_V \rho \vec{b}(\vec{x}, t) dV \quad (3.6)$$

Las *fuerzas superficiales*, son fuerzas que actúan sobre el contorno del volumen material y son producidas por las *acciones de contacto* entre las partículas de la frontera con el exterior; ejemplos de este tipo son la presión y la fricción. Sea $\vec{t}(\vec{x}, t)$ la descripción espacial del campo vectorial de *fuerzas superficiales por unidad de superficie*. La fuerza resultante total \vec{f}_S , de las fuerzas superficiales en el contorno ∂V del volumen V se presenta a continuación.

$$\vec{f}_S = \int_{\partial V} \vec{t}(\vec{x}, t) dS \quad (3.7)$$

Las fuerzas que actúan sobre un medio continuo se relacionan con su aceleración, a través de la segunda ley de Newton. La masa total del medio es \mathcal{M} , y el sistema de partículas tiene una aceleración \vec{a}_{cm} , ocupando el volumen espacial V_t en el instante t . La aplicación de la segunda ley para al medio continuo se expresa como sigue:

$$\vec{f}_V + \vec{f}_S = \mathcal{M} \vec{a}_{cm} \quad (3.8)$$

$$\int_{V_t} \rho \vec{b}(\vec{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} \vec{t}(\vec{x}, t) dS = \int_{V_t} \rho \vec{a}(\vec{x}, t) dV \quad (3.9)$$

El *vector de tracción* \vec{t} que actúa en un punto material del contorno, según los postulados de Cauchy, depende de la partícula en cuestión y de la orientación de la superficie definida por el vector normal unitario \hat{n} . Se define entonces el *tensor de tensiones de Cauchy*, denotado por $\overline{\overline{\sigma}}$, asociado a cada punto material del medio, el

cual contiene la información sobre los vectores de tracción correspondientes a cualquier plano que pase por dicho punto.

$$\vec{t}(\vec{x}, t) = \bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n} \quad (3.10)$$

Debido al principio de conservación del momento angular, descrito más adelante en la ecuación (3.24), se tiene como resultado que este tensor es simétrico, y entonces puede escribirse en forma matricial de las siguientes maneras:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

En la ecuación (3.11) se describen las componentes del tensor tensión en su notación científica y en su notación ingenieril respectivamente. En el primer caso cada componente puede caracterizarse en función de sus subíndices como:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \begin{cases} \text{índice } i \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica el plano de actuación} \\ \text{(plano perpendicular al eje } x_i) \end{array} \right. \\ \text{índice } j \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica la dirección de la tensión} \\ \text{(dirección del eje } x_j) \end{array} \right. \end{cases}$$

Mientras que en la notación ingenieril, las componentes del tensor de tensiones de Cauchy se clasifican como:

$$\begin{cases} \sigma_i \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Tensión normal actuante sobre el plano} \\ \text{perpendicular al eje } i \end{array} \right. \\ \tau_{ij} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Tensión tangencial actuando sobre el plano} \\ \text{perpendicular } i \text{ en la dirección del eje } j \end{array} \right. \end{cases}$$

3.1.4. Postulados de conservación

La mecánica del medio continuo se asienta en una serie de principios de conservación de ciertas cantidades físicas, independiente del material y rango de desplazamientos o deformaciones, los cuales siempre tienen validez. Los principios que se utilizan para establecer las ecuaciones que gobiernan un problema físico son:

- Principio de conservación de la masa.
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento.
- Principio de conservación del momento angular.

- Principio de conservación de la energía.

Conservación de la masa

Definiendo la masa total del volumen material V de un medio continuo:

$$\mathcal{M} = \int_V \rho dV \quad (3.12)$$

El principio de conservación de la masa expresa que la masa total del medio continuo es siempre la misma, lo que en términos matemáticos se escribe:

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dt} = 0 \quad (3.13)$$

Utilizando la expresión de la derivada material de una integral de volumen, la forma integral de la ecuación (3.13) resulta:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = 0 \quad (3.14)$$

Esta expresión debe cumplirse no sólo para V , sino también para todo volumen parcial de material $dV \subset V$ a considerar. En particular, debe cumplirse para cada uno de los volúmenes materiales elementales asociados a las diferentes partículas del medio que ocupan un volumen diferencial dV . Entonces, de esta manera, se obtiene la expresión local de la conservación de la masa, la cual constituye la denominada *ecuación de continuidad*:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.15)$$

Conservación de la cantidad de movimiento

Definiendo la cantidad de movimiento de un volumen material V de un medio continuo:

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_V \rho v dV \quad (3.16)$$

El principio de la conservación del momento lineal determina que la resultante de todas las fuerzas (másicas y superficiales) que actúan sobre un volumen V de un medio continuo es igual la tasa de cambio de su cantidad de movimiento. Lo cual se expresa como:

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}}{Dt} = \vec{f}_b + \vec{f}_s \quad (3.17)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.16) en la ecuación (3.17), se consigue

la forma integral del principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV = \int_V \rho \vec{b} dV + \int_{\partial V} \vec{t} dS \quad (3.18)$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds, el teorema de la divergencia y reemplazando (3.10) en la ecuación (3.18), se obtiene la forma local de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, denominada también como la *ecuación de Cauchy*:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{b} \quad (3.19)$$

Conservación del momento angular

Definiendo el momento angular de un volumen material V de un medio continuo:

$$\vec{\mathcal{L}} = \int_V (\vec{x} \times \rho \vec{v}) dV \quad (3.20)$$

El principio de conservación del momento angular establece que la tasa de cambio del momento angular respecto a un punto arbitrario, es igual al momento \vec{M}_O resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen material en cuestión. Lo cual, en términos matemáticos, es expresado por:

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}}{Dt} = \vec{M}_O \quad (3.21)$$

Donde el momento resultante de las fuerzas másicas y superficiales que actúan sobre el medio continuo tiene la siguiente forma:

$$\vec{M}_O = \int_{\partial V} (\vec{x} \times \vec{t}) dS + \int_V (\vec{x} \times \rho \vec{b}) dV \quad (3.22)$$

Así, reemplazando (3.22) y (3.20) en la ecuación (3.21), se obtiene la forma integral del principio de conservación del momento angular:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\vec{x} \times \rho \vec{v}) dV = \int_{\partial V} (\vec{x} \times \vec{t}) dS + \int_V (\vec{x} \times \rho \vec{b}) dV \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) es válida para aquellos medios continuos en los que las fuerzas entre partículas son iguales, opuestas y colineales; y en las que no existen momentos distribuidos.

Al utilizar el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia, se obtiene la forma local del principio de conservación del momento angular, también conocido como *segunda ley de Cauchy*, la cual se refiere a la simetría del tensor de

tensiones de Cauchy:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^T \quad (3.24)$$

Conservación de la energía

Definiendo la energía cinética de un volumen material V de un medio continuo:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\vec{v} \cdot \vec{v}) dV \quad (3.25)$$

La energía interna de un volumen material V de un medio continuo:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho u dV \quad (3.26)$$

La potencia mecánica entrante, realizada por las fuerzas que actúan sobre un volumen material V de un medio continuo:

$$\frac{DW}{Dt} = \int_{\partial V} (\vec{t} \cdot \vec{v}) dS + \int_V (\rho \vec{b} \cdot \vec{v}) dV \quad (3.27)$$

Y la potencia calorífica entrante de un volumen material V de un medio continuo:

$$\frac{DQ}{Dt} = \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} (\vec{q} \cdot \hat{n}) dS \quad (3.28)$$

Donde r es una función escalar que describe de calor generado internamente por unidad de masa y tiempo, también llamado *término fuente*, y \vec{q} es el vector flujo de calor no convectivo por unidad de superficie, también conocido como *flujo de calor de Cauchy*.

El principio de la conservación de la energía, también conocido como *primera ley de la termodinámica*, expresa que la tasa de cambio de la energía cinética más la tasa de cambio de la energía interna es igual a la suma de la tasa de cambio del trabajo realizado por el sistema más la tasa de cambio de cualquier otra energía suministrada, o removida, del sistema. En términos matemáticos lo anterior se puede escribir como:

$$\frac{DK}{Dt} + \frac{DU}{Dt} = \frac{DW}{Dt} + \frac{DQ}{Dt} \quad (3.29)$$

Al reemplazar las definiciones (3.25)-(3.28) en la ecuación (3.29) y utilizando el teorema de la divergencia y la ecuación (3.19) se obtiene la forma integral del principio de conservación de la energía:

$$\int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V (\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}}) dV + \int_V \rho r dV - \int_V (\nabla \cdot \vec{q}) dV \quad (3.30)$$

Donde $\overline{\overline{D}}$ es el tensor tasa de deformación, cuyos componentes se definen de la siguiente manera:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.31)$$

La forma local del principio de conservación de la energía también es llamada *ecuación de la energía*:

$$\rho \frac{du}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} + \rho r - \nabla \cdot \vec{q} \quad (3.32)$$

3.1.5. Problema de cable

Si se considera el punto O la posición del extremo fijo de un cable mecánico, la longitud de arco del perfil del cable a partir del punto O a un punto P cualquiera a lo largo de este, se define mediante la coordenada material curvilínea s mediante la siguiente relación:

$$s = \int_O^P ds \quad (3.33)$$

En cierto instante $t > 0$ el extremo libre del cable es traccionado por una fuerza \vec{T} , ver Figura 3.1a. El vector \vec{r} es utilizado para identificar posición de P en un sistema de referencia inercial de base ortonormal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, cuyo origen se ubica en el punto O .

$$\vec{r}(s) = x(s, t) \hat{i} + y(s, t) \hat{j} + z(s, t) \hat{k} \quad (3.34)$$

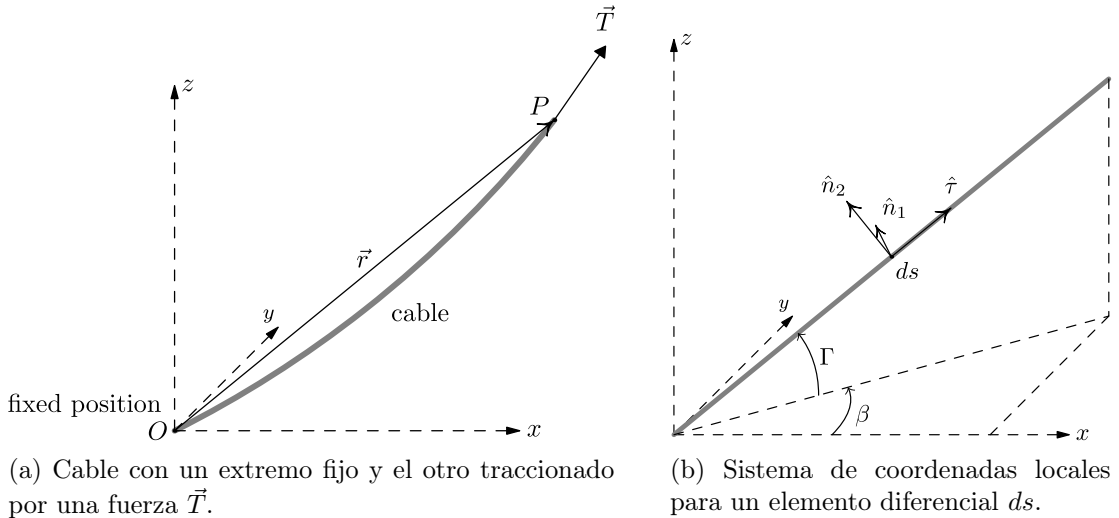


Figura 3.1: Sistemas de referencia para problemas de cable.

Sea $\{\hat{\tau}, \hat{n}_1, \hat{n}_2\}$ la base ortonormal del sistema de coordenadas cartesianas locales asociadas al punto material P , donde $\hat{\tau}$ es un vector unitario en la dirección tangente al

perfil del cable en ese punto. Si, como se muestra en la Figura 3.1b, Γ se define como el ángulo entre el plano horizontal y el vector $\hat{\tau}$; y β el ángulo entre la proyección de $\hat{\tau}$ en el plano horizontal y el eje x . La relación entre las bases de las coordenadas locales en el punto P y las coordenadas cartesianas (x, y, z) está dada por:

$$\hat{\tau} = \cos \Gamma \cos \beta \hat{i} + \cos \Gamma \sin \beta \hat{j} + \sin \Gamma \hat{k} \quad (3.35)$$

$$\hat{n}_1 = -\sin \beta \hat{i} + \cos \beta \hat{j} \quad (3.36)$$

$$\hat{n}_2 = -\sin \Gamma \cos \beta \hat{i} - \sin \Gamma \sin \beta \hat{j} + \cos \Gamma \hat{k} \quad (3.37)$$

Sea ds un elemento infinitesimal de longitud del cable en P . Las componentes del elemento de cable en las direcciones x , y y z se escriben:

$$dx = ds \hat{\tau} \cdot \hat{i} = ds \cos \Gamma \cos \beta \quad (3.38)$$

$$dy = ds \hat{\tau} \cdot \hat{j} = ds \cos \Gamma \sin \beta \quad (3.39)$$

$$dz = ds \hat{\tau} \cdot \hat{k} = ds \sin \Gamma \quad (3.40)$$

Entonces las componentes (x, y, z) del vector \vec{r} asociado a un punto P cualquiera, pueden ser obtenidas integrando las ecuaciones (3.38-3.40) sobre el dominio en que varían los ángulos Γ y β entre los puntos O y P .

Entre las fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal de cable, ubicado entre los puntos s y $s + ds$, cuando este está inmerso en un fluido y en estado de equilibrio se tienen: la tensión aplicada en cada uno de sus extremos; y la fuerza gravitacional y la fuerza de arrastre resultante de la interacción con el fluido, ambas aplicadas en el centro de masa, ver Figura 3.2.

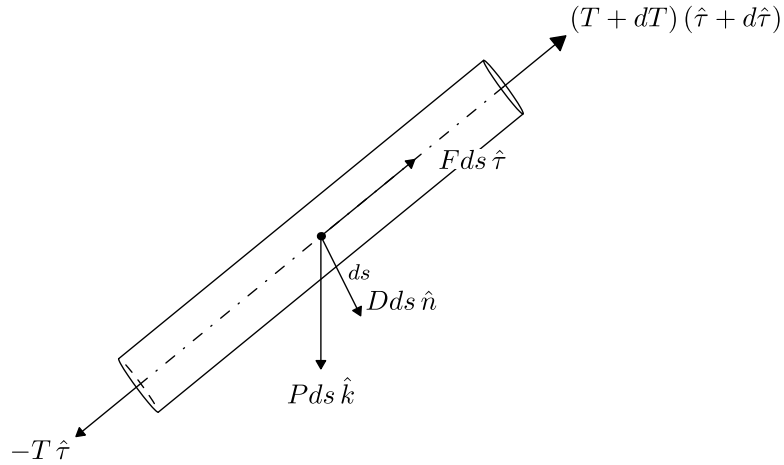


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de cable en estado de equilibrio.

La tensión \vec{T} actúa solamente en la dirección $\hat{\tau}$, por lo tanto si se define como T la magnitud de la tensión en un extremo, dT el cambio de la magnitud de la tensión sobre ds' y además el cambio en la orientación del cable $d\hat{\tau} = \cos \Gamma d\beta \hat{n}_1 + d\Gamma \hat{n}_2$, se tiene:

$$\vec{T}(s) = -T \hat{\tau} \quad (3.41)$$

$$\vec{T}(s + ds) = (T + dT)(\hat{\tau} + \cos \Gamma d\beta \hat{n}_1 + d\Gamma \hat{n}_2) \quad (3.42)$$

La fuerza gravitacional estará dada por la diferencia del peso del cable y el empuje producto del volumen de fluido desplazado, si se denota por λ la fuerza gravitacional por unidad de longitud del elemento diferencial de cable, esta está dada por:

$$\lambda = \frac{\pi}{4} d^2 g (\rho_c - \rho_f) \quad (3.43)$$

Donde ρ_c y ρ_f son la densidad del cable y el fluido respectivamente, d es el diámetro del área de la sección transversal del cable y g es la aceleración de gravedad.

La fuerza de arrastre depende de la velocidad del fluido circundante y la orientación del elemento de cable en el espacio. Sea el campo de velocidades del fluido \vec{U}_∞ , entonces las componentes de la resistencia al arrastre por unidad de longitud en el sistema de coordenadas locales se calculan utilizando el principio de flujo cruzado (“cross-flow

principio”)[49] para cilindros inclinados en la dirección de flujo:

$$F = \frac{1}{2}\rho_f C_T \pi d \left| \vec{U}_\infty \cdot \hat{\tau} \right| \vec{U}_\infty \cdot \hat{\tau} \quad (3.44)$$

$$G = \frac{1}{2}\rho_f C_N d \left| \vec{U}_\infty \cdot \hat{n}_1 \right| \vec{U}_\infty \cdot \hat{n}_1 \quad (3.45)$$

$$H = \frac{1}{2}\rho_f C_N d \left| \vec{U}_\infty \cdot \hat{n}_2 \right| \vec{U}_\infty \cdot \hat{n}_2 \quad (3.46)$$

Donde C_N y C_T son los coeficientes de arrastre normal y tangencial al perfil de cable respectivamente.

Para que se cumpla la condición de equilibrio, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial ds , ver Figura 3.2 deben sumar el vector nulo, por lo tanto se tiene:

$$-T \hat{\tau} + (T + dT) (\hat{\tau} + \cos \Gamma d\beta \hat{n}_1 + d\Gamma \hat{n}_2) + F ds \hat{\tau} + G ds \hat{n}_1 + H ds \hat{n}_2 - \lambda ds \hat{k} = 0 \quad (3.47)$$

De esta forma si se descartan los términos infinitesimales de orden superior, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de $\hat{\tau}$, \hat{n}_1 y \hat{n}_2 al multiplicar la ecuación (3.47) por cada uno de los vectores unitarios.

- En la dirección $\hat{\tau}$:

$$dT + F ds - \lambda \sin \Gamma ds = 0$$

- En la dirección \hat{n}_1 :

$$T \cos \Gamma d\beta + G ds = 0$$

- En la dirección \hat{n}_2 :

$$Td\Gamma + H ds - \lambda \cos \Gamma ds = 0$$

Entonces al ordenar los resultados anteriores, las ecuaciones diferenciales de equilibrio del cable quedan de la forma:

$$\frac{dT}{ds} = \lambda \sin \Gamma - F \quad (3.48)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{G}{T \cos \Gamma} \quad (3.49)$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{\lambda \cos \Gamma - H}{T} \quad (3.50)$$

Estas ecuaciones describen los cambios en la tensión y orientación que ocurren, sobre un elemento infinitesimal cable, cuando se encuentra en su estado de equilibrio. Cabe destacar que los cambios en la tensión solo se deben a fuerzas en la dirección tangencial al perfil del cable, mientras que las fuerzas normales a su eje longitudinal producen cambios en su orientación en el espacio.

De esta manera, en el problema de cable, la variable independiente es la distancia a lo largo del cable s de un punto material P a lo largo de este, mientras que las variables dependientes son la posición \vec{r} en el sistema de referencia inercial, los ángulos Γ y β , y la tensión \vec{T} en dicho punto.

El análisis puede extenderse para incluir la elasticidad del cable en las ecuaciones de equilibrio. En este caso las ecuaciones deben derivarse en términos de un elemento infinitesimal deformado ds , el cual depende de la longitud inicial del elemento (sin tensión) ds_0 y de la deformación ε , la cual es función de la tensión en el elemento de cable. La ecuación que relaciona ambas longitudes es la siguiente:

$$ds = (1 + \varepsilon)ds_0 \quad (3.51)$$

La relación entre la tensión y la deformación está dada por la ecuación constitutiva conocida como la *ley de Hooke*:

$$T = EA\varepsilon \quad (3.52)$$

3.1.6. Catenaria elástica

La catenaria elástica es un caso particular del problema de cable, cuando sólo se consideran la tensión y fuerza de gravedad como las únicas fuerzas que actúan sobre el cable. Tomando un elemento diferencial del cable estirado dp , lo suficientemente pequeño para que pueda considerarse su perfil como una línea recta, y se aplica la condición de equilibrio, de acuerdo a las fuerzas que actúan sobre el elemento (ver Figura 3.3), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x : & \quad \frac{d}{dp}(T \cos \theta)dp = 0 \\ \sum \vec{F}_z : & \quad \frac{d}{dp}(T \sin \theta)dp - dW = 0 \end{aligned}$$

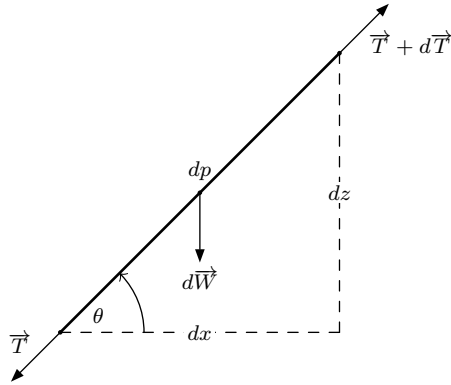


Figura 3.3: Elemento diferencial de catenaria elástica.

Al considerar que la disminución del diámetro del área transversal del cable es pequeña, es posible calcular el peso del elemento diferencial del cable utilizando el área transversal del cable sin tensión A_0 de tal manera que $dW = \rho A_0 ds$. Además desde la Figura 3.3 se desprende que $\cos \theta = dx/dp$ y $\sin \theta = dz/dp$ entonces debe cumplirse la siguiente restricción geométrica:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (3.53)$$

Utilizando la relación (3.53), se reordenan las ecuaciones anteriores obteniéndose:

$$\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dp} \left(T \frac{dz}{dp} \right) = \rho g A_0 \frac{ds}{dp} \quad (3.55)$$

Al integrar las ecuaciones (3.54) y (3.55) se obtienen las ecuaciones diferenciales para las componentes horizontal x y vertical z del perfil del cable:

$$T \frac{dx}{dp} = H \quad (3.56)$$

$$T \frac{dz}{dp} = \lambda s + V \quad (3.57)$$

Donde H y V son fuerzas constantes que corresponden a las componentes horizontal y vertical respectivamente de la reacción en el anclaje del cable, y $\lambda = \rho g A_0$ es el peso por unidad de longitud del cable sin tensión. La ecuación constitutiva de la tensión del cable se construye utilizando la ley de Hooke:

$$T = EA_0 \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (3.58)$$

Entonces se despeja dx/dp y dz/dp de las ecuaciones (3.56) y (3.57), y por regla de la cadena se obtienen las ecuaciones diferenciales del perfil geométrico del cable, en función de su coordenada lagrangiana s , se describen como:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{T} \left(\frac{T}{EA_0} + 1 \right) \quad (3.59)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{V + \lambda s}{T} \left(\frac{T}{EA_0} + 1 \right) \quad (3.60)$$

Si las ecuaciones (3.56) y (3.57) se elevan al cuadrado y luego se suman se puede despejar una expresión para la magnitud de la tensión $T(s)$ del cable:

$$T = \sqrt{H^2 + (V + \lambda s)^2} \quad (3.61)$$

Utilizando la ecuación (3.61) se puede derivar la solución paramétrica que describe el perfil del cable cuyos extremos se encuentran fijos en los puntos $(0, 0)$ y (l, h) . La solución consiste en determinar las coordenadas cartesianas x y z de los puntos materiales del cable en función del parámetro s .

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{EA_0} + \frac{H}{\sqrt{H^2 + (V + \lambda s)^2}} \quad (3.62)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{V + \lambda s}{EA_0} + \frac{V + \lambda s}{\sqrt{H^2 + (V + \lambda s)^2}} \quad (3.63)$$

Integrando y aplicando las condiciones de borde $x(0) = 0$ y $z(0) = 0$ se obtienen las ecuaciones:

$$x(s) = \frac{Hs}{EA_0} + \frac{H}{\lambda} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V + \lambda s}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \right] \quad (3.64)$$

$$z(s) = \frac{H^2}{2EA_0\lambda} \left[\left(\frac{V + \lambda s}{H} \right)^2 - \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right] + \frac{H}{\lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V + \lambda s}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} \right] \quad (3.65)$$

Con estas ecuaciones se tiene definido completamente el perfil del cable. Los valores de H y V se obtienen al aplicar las condiciones de borde $x(L_0) = l$ y $z(L_0) = h$ a las ecuaciones (3.64) y (3.65) respectivamente, obteniéndose siguiente sistema de ecuaciones

no lineales:

$$l = \frac{HL_0}{EA_0} + \frac{H}{\lambda} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V + \lambda L_0}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \right] \quad (3.66)$$

$$h = \frac{H^2}{2EA_0\lambda} \left[\left(\frac{V + \lambda L_0}{H} \right)^2 - \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right] + \frac{H}{\lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V + \lambda L_0}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} \right] \quad (3.67)$$

3.1.7. Método de Newton-Raphson

En el análisis numérico el método de Newton-Raphson (también llamado método de Newton) permite encontrar sucesivamente mejores aproximaciones a las raíces (o ceros) de una función. Suponiendo que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. La ecuación de la línea tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.68)$$

Donde f' denota la primera derivada de f . El punto donde la línea recta (3.68) corta el eje x es utilizada como la siguiente aproximación de la raíz x_1 . En otras palabras, haciendo $y = 0$ se tiene:

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \quad (3.69)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.70)$$

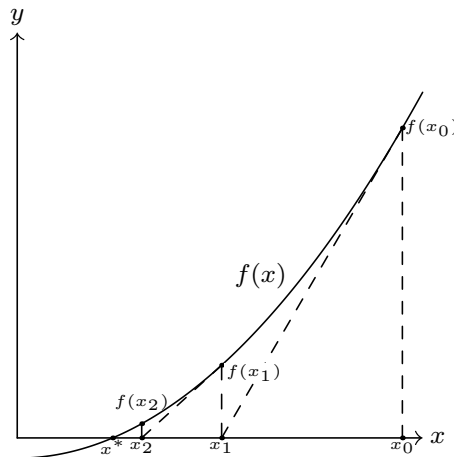


Figura 3.4: Representación geométrica del método de Newton.

Como se puede observar en la Figura 3.4, donde la raíz a la cual se busca una aproximación esta dada por x^* . Se observa que cada iteración se acerca más a la raíz,

por lo tanto, se puede generalizar el algoritmo para una aproximación x_n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.71)$$

El valor de la primera aproximación x_0 debe ser tal que $f(x_0) \approx 0$ y su convergencia es cuadrática [20]. También se puede utilizar el método de Newton para resolver sistemas no lineales de k incógnitas y k ecuaciones, el cual encuentra los ceros de funciones continuas diferenciables $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. De acuerdo a la formulación anterior, se tiene que multiplicar a la izquierda el inverso de la matriz Jacobiana $J_{F(x_n)}$ de $k \times k$ en vez de dividir por $f'(x_n)$.

$$J_{F(x_n)} \Delta x = -F(x_n) \quad (3.72)$$

$$\Delta x = -J_{F(x_n)}^{-1} F(x_n) \quad (3.73)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad (3.74)$$

3.2. Dinámica atmosférica

La meteorología dinámica es el estudio del movimiento de la atmósfera que están asociados con el clima y el tiempo. Para este tipo de movimientos la naturaleza discreta del viento puede ser ignorada, y se puede considerar como un fluido continuo. Se asume que las cantidades físicas que caracterizan el estado de la atmósfera (como la presión, densidad y temperatura) tienen un valor único en cada *partícula fluida*. De esta manera, las leyes fundamentales de la mecánica de fluidos y la termodinámica pueden ser expresadas en términos de ecuaciones diferenciales parciales.

Los esfuerzos fundamentales que influyen en el movimiento de la atmósfera, son los siguientes:

- Gradiente de presión:

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

- Aceleración de gravedad:

$$\vec{g}^* = \frac{\vec{g}_0^*}{(1 + z/a)^2}$$

Donde z es la altura sobre el nivel del mar, a es el radio de la Tierra y \vec{g}_0^* es la aceleración de gravedad a nivel del mar.

- Esfuerzos viscosos:

$$\nu \Delta \vec{U}$$

Donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática y \vec{U} es el vector velocidad, válida sólo para μ constante.

Al formular las ecuaciones es natural utilizar un sistema de coordenadas georeferencial, es decir, en reposo con respecto a la Tierra. Debido a la rotación de esta, el sistema de referencia será no inercial y por lo tanto se deben introducir fuerzas aparentes como la fuerza centrífuga y las fuerzas de Coriolis.

- Gravedad aparente:

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R}$$

El término $\Omega^2 \vec{R}$ se debe a la aceleración centrípeta, donde \vec{R} es el vector posición con respecto al eje de rotación, y $\Omega = 7,292 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ es la velocidad angular de rotación de la Tierra. El término \vec{g} es llamado gravedad aparente, y su magnitud normalmente es considerada como una constante ($g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$).

- Fuerzas de Coriolis:

$$-f \hat{k} \times \vec{U}$$

Donde $f = 2\Omega \sin \phi$ es el parámetro de Coriolis y ϕ es la latitud (con respecto al ecuador).

3.2.1. Leyes de conservación

El movimiento de la atmósfera está gobernado por tres principios físicos fundamentales: la conservación de la masa, la conservación del momentum y la conservación de la energía. Las ecuaciones serán descritas utilizando un sistema de referencia euleriano, cuyo volumen control consiste en un paralelepípedo rectangular infinitesimal de lados dx , dy y dz ; cuya posición esta fija en relación a los ejes coordenados.

Conservación de la cantidad de movimiento

Para escribir la ley de conservación de momentum, se asume que las únicas fuerzas reales actuando sobre la atmósfera son la gravedad, el gradiente de presión y la fricción; la segunda ley de Newton puede reescribirse como:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{U} \quad (3.75)$$

Dado que para propósitos meteorológicos se puede considerar a la Tierra como una esfera, sin incurrir en un error relevante, en coordenadas esféricas la superficie terrestre corresponde a una curva de nivel. Entonces se define el sistema de coordenadas (λ, ϕ, z) , donde λ es la longitud, ϕ es la latitud y z es la altitud (distancia vertical sobre la superficie de la Tierra). Si los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} toman ahora las direcciones Este, Norte y hacia arriba respectivamente el vector velocidad se convierte en $\vec{U} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$; cuyas componentes se definen como:

$$u = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt} \quad v = r \frac{d\phi}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (3.76)$$

Donde r es la distancia hasta el centro de la Tierra, la cual se relaciona con z por $r = z + a$. Tradicionalmente se realiza la aproximación $r \approx a$, ya que por lo general para las aplicaciones meteorológicas se tiene que $z \ll a$. Las coordenadas (x, y, z) representan las distancias hacia el Este, hacia el Norte y hacia arriba (desde un punto de referencia en la superficie de la Tierra) respectivamente.

El gradiente de presión, en este sistema de referencia, se expresa como:

$$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \quad (3.77)$$

De la misma manera, la aceleración de gravedad se representa por:

$$\vec{g} = -g \hat{k} \quad (3.78)$$

Si se expande el término de la fuerza de Coriolis queda:

$$\begin{aligned} -2\bar{\Omega} \times \vec{U} = & - (2\bar{\Omega}w \cos \phi - 2\bar{\Omega}v \sin \phi) \hat{i} \\ & - 2\bar{\Omega}u \sin \phi \hat{j} + 2\bar{\Omega}u \sin \phi \hat{k} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Se reescribe entonces la ecuación (3.75) en su forma escalar como sigue:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + \nu \Delta u \quad (3.80)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + \nu \Delta v \quad (3.81)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi + \nu \Delta w \quad (3.82)$$

Las ecuaciones (3.80)-(3.82) representan las componentes de las ecuaciones de movimiento en las direcciones este, norte y arriba respectivamente. Los términos

proporcionales a $1/a$ son los llamados términos de curvatura y aparecen debido a la curvatura de la Tierra.

Aproximación Geostrófica

Para la escala sinóptica, la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión tienen el mismo orden de magnitud. Si se asume que estas son las únicas fuerzas sobre el viento, se llega a la primera aproximación de balance geostrófico:

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.83)$$

$$fu \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.84)$$

Donde f es el parámetro de Coriolis. El balance geostrófico entrega una aproximación de la relación del campo de presiones y la velocidad horizontal en sistemas extratropicales de gran escala. Se define entonces el campo de velocidades horizontales, $\vec{V}_g = u_g \hat{i} + v_g \hat{j}$, llamado viento geostrófico y que satisface el sistema (3.84).

$$\vec{V}_g = \hat{k} \times \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p \quad (3.85)$$

Entonces conociendo la distribución de presiones en un tiempo dado, se puede determinar el viento geostrófico. Esta aproximación del campo de velocidades horizontales es válida sólo para movimientos a gran escala lejos del ecuador. La aproximación (3.85) no es dependiente del tiempo, por lo tanto no puede ser usada para predecir la evolución del campo de velocidades.

Número de Rossby

Para obtener una ecuación predictora del campo de velocidades es necesario incluir la aceleración en el sistema el sistema (3.84). Las ecuaciones resultantes para el campo de velocidades horizontal queda de la forma:

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g) \quad (3.86)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f(u - u_g) \quad (3.87)$$

En la práctica la aplicación de estas ecuaciones predictoras se dificulta porque la aceleración está dada por la pequeña diferencia entre la velocidad y la aproximación geostrófica. Entonces un pequeño error en la medición de la velocidad o el gradiente de presión conllevará un gran error al aproximar la aceleración.

Una medida conveniente de la magnitud de la aceleración comparada con la fuerza de Coriolis puede ser obtenida calculando la razón entre las escalas características de estos términos. Esta razón es un número adimensional llamado el número de Rossby y está designado por:

$$R_0 = \frac{U}{f_0 L} \quad (3.88)$$

De esta manera, mientras más pequeño sea el número de Rossby, mejor será la validez de la aproximación geostrófica.

Aproximación hidrostática

Es conveniente definir una presión estandar $p_0(z)$, que es la presión horizontal promedio para cada z ; y su correspondiente densidad estandar $\rho_0(z)$. Definidos de manera que están en equilibrio hidrostático exacto:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = -g \quad (3.89)$$

Así se pueden escribir los campos de presión y densidad como:

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t) \quad (3.90)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (3.91)$$

Donde p' y ρ' son las desviaciones de la presión y densidad con respecto a sus valores estandar. Entonces utilizando las definiciones (3.89)-(3.91), y asumiendo que $|\rho'/\rho_0| \ll 1$, es posible escribir:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx \frac{1}{\rho_0} \left[\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right] \quad (3.92)$$

Entonces, para movimientos en la escala sinóptica, la aceleración vertical es despreciable y no puede ser determinada desde la ecuación (3.82); sin embargo es posible deducirla de manera indirecta.

Conservación de la masa

La ley de conservación de la masa para un volumen de control en un sistema de referencia euleriano, en su forma no conservativa, esta dado por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.93)$$

Utilizando la misma técnica que en la aproximación hidrostática, y asumiendo otra

vez que $|\rho'/\rho_0| \ll 1$, se puede reescribir la ecuación de continuidad (3.93) como:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right) + \frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \approx 0 \quad (3.94)$$

Donde ρ' designa la desviación local de la densidad en relación a su promedio horizontal $\rho_0(z)$.

Una buena aproximación sería tomar solamente los dos últimos términos, quedando la ecuación como:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{U}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (3.95)$$

La aproximación (3.95) muestra que para flujo horizontal puro, la atmósfera se comporta como un fluido incompresible. Sin embargo, cuando existen movimientos verticales, la compresibilidad asociada con la dependencia de la altura de $\rho_0(z)$ debe ser tomada en consideración.

Conservación de la energía

La primera ley de la termodinámica para el volumen de control en movimiento (sistema de referencia lagrangiano) establece que la tasa de cambio en la energía termodinámica total de un sistema es igual a la diferencia entre el flujo calor que entra al sistema y la tasa de cambio del trabajo realizado por las fuerzas externas sobre este.

La energía termodinámica total del volumen de control no es más que la suma de la energía interna y la energía cinética. Dado que la fuerza de Coriolis es perpendicular a la velocidad no efectúa trabajo sobre el sistema. Entonces si e designa la energía interna del volumen de control δV y despreciando los efectos de las fuerzas viscosas, se tiene que la primera ley de la termodinámica se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \delta V \right] = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \delta V + \rho \gg \cdot \vec{U} \delta V + \rho J \delta V \quad (3.96)$$

Donde J representa el flujo de calor por unidad de masa debido a radiación, conducción, y pérdida latente de calor. Aplicando la regla de la cadena y la ecuación de la conservación de la masa se obtiene:

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - p \nabla \vec{U} - pgw + \rho J \quad (3.97)$$

Para simplificar la ecuación (3.97) se puede separar en el balance de la energía mecánica y el balance de la energía térmica. De esta manera se define la función

geopotencial $\Phi(z)$ como $d\Phi = gdz$; entonces la ecuación de la energía mecánica queda de la forma:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} + \Phi \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p \quad (3.98)$$

Ahora notando la energía interna específica para el aire seco está dada por $e = c_v T$, donde $c_v = 0,717 [kJ/kgK]$ es el calor específico isocórico del aire seco; sea $\alpha = 1/\rho$ el volumen específico y considerando la conservación de la masa, entonces la ecuación de la energía termodinámica queda de la forma:

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = J \quad (3.99)$$

El término $p d\alpha/dt$ representa una conversión entre energía térmica y mecánica. Este proceso de conversión permite a la energía solar provocar el movimiento de la atmósfera.

Temperatura potencial

Tomando la derivada total de la ecuación de estado de un gas ideal se tiene:

$$\alpha \frac{dp}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = R \frac{dT}{dt} \quad (3.100)$$

Donde $R = 0,287 [kJ/kgK]$ es la constante de gas ideal para el aire seco, sustituyendo $p d\alpha/dt$ en la ecuación (3.99) y usando $c_p = R + c_v$, donde $c_p = 1,004 [kJ/kgK]$ es el calor específico isobárico del aire seco. Al reordenar queda:

$$\frac{c_p}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{J}{T} = \frac{ds}{dt} \quad (3.101)$$

Donde s es la entropía específica. La ecuación (3.101) entrega la tasa de cambio de la entropía que sigue el movimiento de un proceso termodinámico reversible. Para un proceso adiabático ($ds/dt = 0$) entonces esta ecuación queda de la forma:

$$\frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp = 0$$

Integrando esta expresión desde un estado (p, t) a uno (p_s, θ) , y despejando θ se tiene:

$$\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \quad (3.102)$$

Esta relación es conocida como la ecuación de Poisson, y la temperatura θ es llamada temperatura potencial. θ es la temperatura que un volumen de aire a presión p y temperatura T tendría si fuera comprimido o expandido adiabáticamente hasta una presión p_s . Dado que los movimientos en la escala sinóptica son aproximadamente

adiabáticos fuera de regiones de precipitación activa, la temperatura θ es una cantidad cuasi conservada para tales flujos. Reemplazando en la ecuación (3.101) entonces se obtiene:

$$\frac{c_p}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{T} = \frac{ds}{dt} \quad (3.103)$$

Gradiente adiabático

El gradiente adiabático es la tasa de decrecimiento de la temperatura con respecto a la altura, y se relaciona con la tasa de cambio de la temperatura potencial con respecto a la altura mediante la ecuación:

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{c_p} \quad (3.104)$$

Para una atmósfera en que la temperatura potencial no varía con la altura, el gradiente de temperatura es de la forma:

$$\Gamma_d = \frac{g}{c_p} = -\frac{dT}{dz} \quad (3.105)$$

Estabilidad estática

Si la temperatura potencial es función de la altura, entonces el gradiente atmosférico, $\Gamma = -\partial T/\partial z$ será diferente del gradiente adiabático y por lo tanto:

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma \quad (3.106)$$

Si $\Gamma < \Gamma_d$ entonces θ se incrementa con la altura. Si el volumen de control sufre un desplazamiento adiabático con respecto a su nivel de equilibrio, flotará positivamente cuando se desplaza hacia abajo y flotará negativamente cuando se desplaza hacia arriba. De esta manera siempre tenderá a retornar a su nivel de equilibrio y entonces la atmósfera se dice que está estaticamente estable o estratificada establemente.

Las oscilaciones adiabáticas sobre el nivel de equilibrio en una atmosfera estáticamente estable son llamadas oscilaciones de flotabilidad. La frecuencia característica de dichas oscilaciones, para un pequeño desplazamiento δz , se deducen de la ecuación:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{\theta}{\theta_0} \quad (3.107)$$

Donde θ designa la desviación de la temperatura potencial con respecto a su nivel de equilibrio $\theta_0(z)$. Si el desplazamiento es adiabático, la temperatura potencial se conserva

y por lo tanto se tiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -N^2 \delta z \quad (3.108)$$

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}$$

Donde N^2 es una medida de la estabilidad de la atmósfera. La ecuación (3.108) tiene una solución general de la forma $\delta z = A e^{iNt}$. La correspondiente frecuencia N es la llamada frecuencia de flotabilidad. Entonces, a partir de lo anterior, se define el criterio de estabilidad estática para aire seco:

$$\begin{aligned} d\theta_0/dt > 0 & \quad \text{estáticamente estable} \\ d\theta_0/dt = 0 & \quad \text{estáticamente neutro} \\ d\theta_0/dt < 0 & \quad \text{estáticamente inestable} \end{aligned}$$

En la escala sinóptica la atmósfera siempre es estáticamente estable porque cualquier región inestable que se genere es estabilizada rápidamente por un movimiento convectivo.

3.2.2. Capa límite atmosférica

La capa límite atmosférica es la porción de la atmósfera en que el campo de velocidades está fuertemente influenciado, de manera directa, por su interacción con la superficie de la Tierra. Esta interacción depende de la viscosidad molecular, a pesar de que las fuerzas viscosas sólo son significativas hasta unos pocos milímetros sobre la superficie. Fuera de esta subcapa viscosa la difusión molecular sólo es importante para remolinos turbulentos de pequeña escala.

Sin embargo, la viscosidad cumple un rol indirecto importante, dado que la atmósfera no desliza contra la superficie, se producen esfuerzos de corte elevados cerca de esta, lo que conlleva a la generación de remolinos turbulentos de pequeña escala. Esta turbulencia, más la generada por el calentamiento de la superficie terrestre, es muy efectiva para transmitir el calor desde la superficie hacia la atmósfera. Este flujo de calor es varios órdenes de magnitud más rápido que el realizado por procesos moleculares.

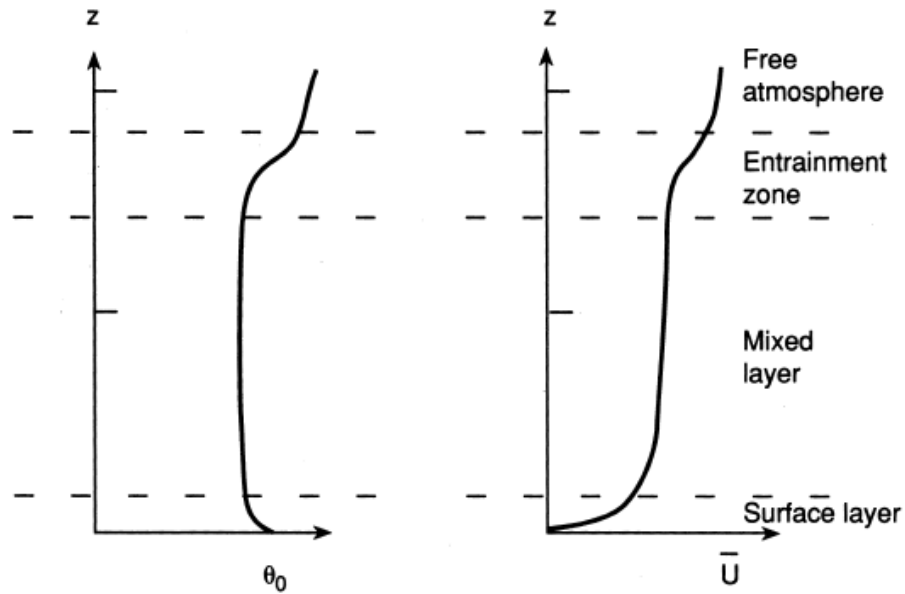


Figura 3.5: Temperatura potencial promedio y velocidad de viento local promedio para una capa límite bien mezclada [21].

La dinámica del flujo en la capa límite atmosférica es entonces determinada en gran parte por el hecho de que el flujo atmosférico es turbulento. En la atmósfera libre (sobre la capa límite) la turbulencia puede ser despreciada para aproximaciones en la escala sinóptica.

La profundidad de la capa límite atmosférica producida por este transporte turbulento puede variar desde valores muy pequeños, como 30 [m] en condiciones de gran estabilidad estática, hasta más de 3 [km] en condiciones altamente convectivas. Para condiciones promedio de latitud media, la profundidad es de 1 [km] aproximadamente, y contiene acerca del 10% de la masa de la atmósfera.

Turbulencia atmosférica

A diferencia de los flujos sinópticos, que tienen una escala de profundidad pequeña comparada con su escala horizontal, los remolinos turbulentos de interés en la capa límite atmosférica tienden a tener escalas horizontales y verticales similares. La escala de longitud máxima está limitada por la profundidad de la capa límite ($\sim 10^3$ [m]). La escala de longitud mínima ($\sim 10^{-3}$ [m]) es la de los remolinos más pequeños que existen por la fricción molecular. En la capa límite, el balance geostrófico ya no es una aproximación adecuada para el campo de velocidades de gran escala.

La aproximación de Boussinesq es una forma de las ecuaciones de movimiento que es válida para esta situación. En esta aproximación, la densidad es remplazada por un valor promedio constante, ρ_0 , excepto en el término de la flotabilidad en la ecuación de movimiento vertical.

Las ecuaciones del movimiento, en coordenadas cartesianas, quedan de la forma:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.109)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.110)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\theta}{\theta_0} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.111)$$

El campo total de temperatura potencial está dado por $\theta_{tot} = \theta(x, y, z, t) + \theta_0(z)$. Entonces la ecuación adiabática de la energía termodinámica es:

$$\frac{d\theta}{dt} = -w \frac{d\theta_0}{dz} \quad (3.112)$$

Finalmente la ecuación de continuidad bajo la aproximación de Boussinesq tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.113)$$

En un fluido turbulento, una variable campo, como la velocidad medida en un punto, generalmente fluctúa rápidamente en el tiempo por los remolinos de varias escalas que pasan por el punto. Para que la medición sea verdaderamente representativa de flujo a gran escala, se asume que estas variables pueden ser separadas en campos promedios que varían lentamente y componentes turbulentos que fluctúan rápidamente.

Siguiendo el esquema propuesto por Reynolds, para cada variable campo, por ejemplo θ , su media estará designada por $\bar{\theta}$ y su componente turbulenta por θ' . Entonces se tiene que $\theta = \bar{\theta} + \theta'$. Por definición el promedio de la componente fluctuante se anula, así como el promedio del producto de una desviación con una media.

Tomando en cuenta que:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.114)$$

Se reescriben las ecuaciones de la aproximación de Boussinesq para el movimiento

de los promedios:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + \bar{v}\Delta\bar{u} \\ & - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} + \bar{v}\Delta\bar{v} \\ & - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{dt} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} + \bar{v}\Delta\bar{w} \\ & - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\bar{w} \frac{d\theta_0}{dz} - \left(\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} \right) \quad (3.118)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (3.119)$$

Los términos entre paréntesis de las ecuaciones (3.115-3.118) son los llamados términos de covarianza y representan flujos turbulentos. Para la mayoría de las capas límites atmosféricas la magnitud de estos términos son del mismo orden que los otros términos de (3.115-3.118). En tales casos no se pueden despreciar estos flujos, incluso cuando sólo el promedio es de interés.

Energía cinética turbulenta

Los remolinos turbulentos siempre tienden a causar que la energía turbulenta fluya hacia las escalas mas pequeñas, donde son disipadas. Entonces debe existir una producción continua de turbulencia si la energía cinética turbulenta debe permanecer estadísticamente constante. Al investigar la producción de la turbulencia se llega a la ecuación:

$$\frac{d(TKE)}{dt} = MP + BPL + TR - \varepsilon \quad (3.120)$$

Donde $TKE = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ es la energía cinética turbulenta específica, MP es la producción mecánica, BPL es producción o pérdida de flotabilidad, TR designa la redistribución por transporte y fuerzas de presión, y $\varepsilon > 0$ representa la disipación por fricción.

En una capa estaticamente estable, la turbulencia solo puede existir si la producción mecánica es lo suficientemente grande para sobreponerse a los efectos de amortiguación de la flotabilidad y la disipación viscosa. Esta condición es medida por una cantidad llamada el número de flujo de Richardson. Y es definido por:

$$Rf = -\frac{BPL}{MP} \quad (3.121)$$

Si la capa límite atmosférica es estaticamente inestable, entonces $Rf < 0$ y la turbulencia se sostiene por convección. Para condiciones estables, Rf será positivo.

Ecuaciones de movimiento de la capa límite atmosférica

Para el caso especial de turbulencia homogénea horizontal sobre la subcapa viscosa, los términos de viscosidad molecular y divergencia de los flujos turbulentos horizontales pueden ser despreciados. De esta manera las ecuaciones (3.115) y (3.116) quedan de la forma:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (3.122)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \quad (3.123)$$

Para resolver estas ecuaciones para \bar{u} y \bar{v} es necesario conocer la distribución vertical de los flujos turbulentos. Dado que esto no es posible, ya que dependen de la turbulencia, se utilizan métodos de aproximación semi-empíricos.

Para movimientos de escala sinóptica se puede establecer un equilibrio entre las fuerzas de Coriolis, el gradiente de presión y la divergencia de los flujos turbulentos:

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0 \quad (3.124)$$

$$-f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = 0 \quad (3.125)$$

Donde el gradiente de presión es expresado en términos de la velocidad geostrofica dada en la ecuación (3.85).

Perfil logarítmico del viento

En capas límites neutral o establemente estratificadas, la dirección del viento y su dirección varían significativamente con la altura. Por lo tanto es necesario determinar la dependencia vertical de la divergencia de los flujos turbulentos para cerrar las ecuaciones

de movimiento en la capa límite planetaria. El método tradicional es asumir que la turbulencia actúa de manera análoga a la difusión molecular, tal que el flujo turbulento de un campo de velocidades es proporcional al gradiente local de la velocidad promedio. De esta manera se tiene:

$$\overline{u'w'} = -K_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (3.126)$$

$$\overline{v'w'} = -K_m \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad (3.127)$$

$$\overline{\theta'w'} = -K_h \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) \quad (3.128)$$

Donde K_m es el coeficiente de viscosidad turbulenta y K_h es la difusión térmica turbulenta. Este método tiene sus limitaciones ya que, a diferencia del coeficiente de viscosidad molecular, la viscosidad turbulenta depende del flujo en vez de las propiedades físicas del fluido y deben ser determinadas empíricamente para cada situación.

La subcapa superficial, cuya profundidad depende de la estabilidad pero usualmente corresponde al 10 % del total de la profundidad de la capa límite atmosférica, no depende directamente de las fuerzas de Coriolis o el gradiente de presión. El análisis se facilita al suponer que el viento cerca de la superficie es paralelo al eje x . El flujo cinético turbulento puede ser expresado en términos de una velocidad de fricción u_* , definida por:

$$u_*^2 = \left| \overline{(u'w')}_s \right| \quad (3.129)$$

Asumiendo que el flujo turbulento permanece constante en su valor superficial en los primeros metros de la atmósfera y reemplazando (3.126) se tiene:

$$K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \quad (3.130)$$

Utilizando una longitud de mezcla proporcional a la altura $l = kz$, en este caso se tiene $K_m = (kz)^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior e integrando con respecto a z se obtiene el *perfil de viento logarítmico*:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (3.131)$$

Donde z_0 es una constante que representa la altura a la cual $\bar{u} = 0$, y k es la constante de von Karman, la cual tiene un valor determinado experimentalmente de $k \approx 0,41$.

3.3. Aerodinámica

La aerodinámica es una rama de la dinámica de fluidos que corresponde al estudio del movimiento del aire, particularmente cuando este interactúa con un objeto sólido, como por ejemplo el ala de un aeroplano. La aerodinámica es un subcampo de la dinámica de fluidos y la dinámica de gases, y muchos aspectos de la teoría aerodinámica son comunes a estos campos. El término aerodinámica es utilizado frecuentemente como sinónimo de la dinámica de gases, siendo la una diferencia en que esta última se aplica para el estudio del movimiento de todos los gases, sin limitarse solamente al aire.

El estado de tensión, generado por las fuerzas y momentos aerodinámicos sobre un objeto sólido que se mueve sumergido en un fluido, se debe solamente a dos fuentes básicas:

- Distribución de presión sobre la superficie del cuerpo.
- Distribución de los esfuerzos de corte sobre la superficie del cuerpo.

3.3.1. Fuerzas y momentos aerodinámicos

Tanto la presión p como los esfuerzos de corte τ tienen dimensiones de fuerza por unidad de área. La presión \vec{p} actúa normal a la superficie, mientras que $\vec{\tau}$ lo hace de manera tangencial a esta. El efecto neto de estas distribuciones integradas sobre la superficie del cuerpo es determinado por la fuerza aerodinámica \vec{R} y el momento aerodinámico \vec{M} resultantes, como se muestra en la Figura 3.6.

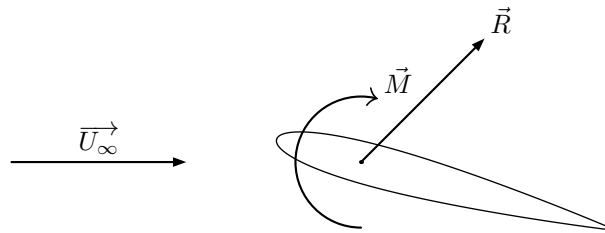


Figura 3.6: Fuerza y momento aerodinámico resultante sobre un perfil alar.

La fuerza aerodinámica resultante \vec{R} puede escribirse como la suma de dos componentes, como las que se observan en la Figura 3.7.

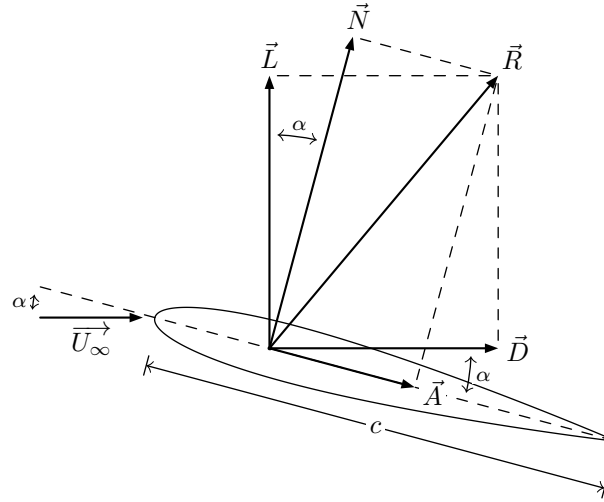


Figura 3.7: Sistemas de componentes en las que se separa la fuerza aerodinámica.

La fuerza de arrastre \vec{D} (*drag*) y la fuerza de sustentación \vec{L} (*lift*) se definen con respecto a la velocidad de la corriente libre \vec{U}_∞ .

- \vec{L} : componente de \vec{R} perpendicular a \vec{U}_∞
- \vec{D} : componente de \vec{R} paralela a \vec{U}_∞

La cuerda c que se observa en la Figura 3.7 es la distancia lineal entre el borde de ataque (*leading edge, LE*) y el borde de salida (*trailing edge, TE*) del cuerpo. La fuerza normal \vec{N} y la fuerza axial \vec{A} se definen con respecto a esta cuerda.

- \vec{N} : componente de \vec{R} perpendicular a c
- \vec{A} : componente de \vec{R} paralela a c

El ángulo de ataque α del cuerpo se define como el ángulo entre c y \vec{U}_∞ , de esta manera podemos establecer las relaciones para los dos sistemas de componentes.

$$\vec{L} = \vec{N} \cos \alpha - \vec{A} \sin \alpha \quad (3.132)$$

$$\vec{D} = \vec{N} \sin \alpha + \vec{A} \cos \alpha \quad (3.133)$$

El momento aerodinámico resultante ejercido sobre el cuerpo depende del punto desde donde se calcula. Generalmente el momento aerodinámico es calculado en el borde de ataque (\vec{M}_{LE}), donde se considera que los momentos que tienden a aumentar α son positivos y los que tienden a disminuir α son negativos.

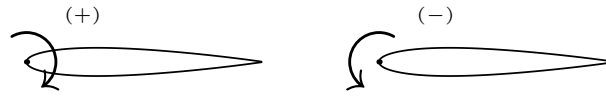


Figura 3.8: Convención de signos para momento aerodinámico.

El punto sobre la cuerda donde efectivamente se aplica la fuerza aerodinámica \vec{R} se denomina centro de presión del cuerpo, y es el punto a lo largo de la cuerda, en el cual el momento aerodinámico \vec{M} es cero. La distancia desde el borde de ataque al centro de presión se puede calcular como:

$$x_{cp} = - \frac{\|\vec{M}_{LE}\|}{\|\vec{N}\|} \quad (3.134)$$

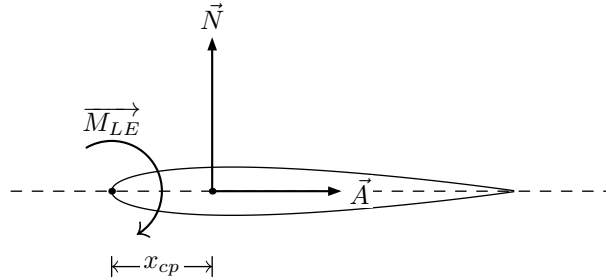


Figura 3.9: Centro de presión de un perfil de ala.

3.3.2. Coeficientes adimensionales

Para el estudio del comportamiento aerodinámico del cuerpo resulta útil expresar las fuerzas y momentos aerodinámicos de manera adimensional. Sean ρ_∞ y U_∞ la densidad y velocidad de la corriente libre, aguas arriba del cuerpo, se define la cantidad dimensional presión dinámica de la corriente libre como:

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \quad (3.135)$$

A continuación se definen los coeficientes adimensionales de mayor relevancia para la teoría aerodinámica. Cuando se trata de un cuerpo tridimensional se denotan por letras mayúsculas, mientras que para cuerpos bidimensionales se utilizan letras minúsculas.

- Coeficiente de sustentación:

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} \quad (3.136)$$

- Coeficiente de arrastre:

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S} \quad (3.137)$$

- Coeficiente de momento aerodinámico:

$$C_M = \frac{M}{q_\infty S l} \quad (3.138)$$

- Coeficiente de presión:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (3.139)$$

Donde p_∞ es la presión de la corriente libre. S y l son el área y longitud de referencia respectivamente, y son escogidos de acuerdo a la forma geométrica del cuerpo; para diferentes cuerpos S y l pueden ser distintos. La elección particular del área y longitud de referencia no es crítica. Sin embargo han de tenerse en cuenta a la hora de comparar valores de coeficientes adimensionales.

Al trabajar con números adimensionales resulta práctico utilizar el método de análisis dimensional, para determinar las cantidades físicas que determinan la variación de las fuerzas y momentos aerodinámicos. A partir de este análisis, la fuerza y momento aerodinámico resultantes, para un cuerpo cuya geometría es conocida, dependen solamente de las siguientes variables físicas:

- Ángulo de ataque α .
- Velocidad de la corriente libre U_∞ .
- Densidad de la corriente libre ρ_∞ .
- Viscosidad del fluido, representado por coeficiente de viscosidad dinámico de la corriente libre μ_∞ .
- Tamaño del cuerpo, representado por una longitud de referencia, en este caso c .
- Compresibilidad del fluido, representada por la velocidad del sonido de la corriente libre a_∞ .

Finalmente, a través del análisis dimensional, se puede afirmar que la fuerza aerodinámica es solamente función de dos números adimensionales. El número de Reynolds mide la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, mientras que el número de Mach se relaciona con la compresibilidad del fluido.

- Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_\infty V_\infty l}{\mu_\infty}$$

- Número de Mach:

$$Ma = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

Extendiendo el análisis a los coeficientes adimensionales se puede establecer entonces que:

$$C_L = f_1(Re, Ma, \alpha) \quad (3.140)$$

$$C_D = f_2(Re, Ma, \alpha) \quad (3.141)$$

$$C_M = f_3(Re, Ma, \alpha) \quad (3.142)$$

Para las ecuaciones (3.140-3.142) se asume una geometría del cuerpo conocida. Tanto la aerodinámica experimental como la teórica buscan establecer relaciones explícitas para las funciones f_1 , f_2 y f_3 para geometrías de cuerpo específicas.

3.3.3. Tipos de flujos

A pesar de que en la naturaleza los flujos son complejos y contienen todo un espectro de fenómenos físicos que interactúan entre sí, para estudiar dichos flujos es necesario modelarlos con menor detalle, despreciando así algunos de los fenómenos que se espera sean menos significantes. Como resultado el estudio de la aerodinámica ha desarrollado un gran número de distintos tipos de flujos.

La manera más frecuente de clasificar y describir los distintos flujos aerodinámicos es según su número de Mach, y sus categorías son:

1. Flujo Subsónico ($Ma < 1$ en todo punto)
2. Flujo Transónico (regiones mixtas donde $Ma < 1$ y $Ma > 1$)
3. Flujo Supersónico ($Ma > 1$ en todo punto)
4. Flujo Hipersónico ($Ma \gg 1$)

Todos los flujos son en mayor o menor medida compresibles, de hecho un flujo donde la densidad es precisamente constante, llamado incompresible, no existe en la naturaleza. Sin embargo, existe un gran número de problemas aerodinámicos que pueden ser modelados como incompresibles sin que esto signifique una pérdida en la exactitud de los resultados. En la práctica cualquier flujo subsónico donde $Ma < 0,3$ puede asumirse con densidad constante.

Otra manera de clasificar los flujos es en viscosos y no viscosos. Si bien, al igual que los flujos incompresibles, en la realidad no existen flujos no viscosos, es decir, flujos que no involucran fricción, conducción térmica o difusión; existen muchos flujos aerodinámicos donde la influencia del fenómeno de transporte es tan pequeña que se pueden modelar como flujos no viscosos. En tales flujos, la influencia de la fricción, conducción térmica y difusión queda restringida a una delgada película de fluido adyacente a la superficie del cuerpo, llamada capa límite, como se observa en la Figura 3.10.

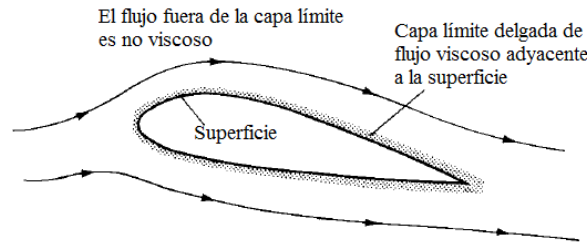


Figura 3.10: Tipos de flujos alrededor de un cuerpo [24].

Para flujos sobre cuerpos delgados, como el de la Figura 3.10, la teoría de flujos no viscosos predice adecuadamente la distribución de presión y la fuerza de sustentación sobre el cuerpo. Sin embargo, dado que la fricción es la mayor fuente de arrastre, no se puede predecir correctamente la fuerza de arrastre total. Por otra parte, cuando existe una separación de la capa límite, ya sea debido a un ángulo de ataque elevado para un cuerpo delgado o sobre un cuerpo obtuso como en la Figura 3.11, este flujo separado será dominado por los efectos viscosos y no se podrá utilizar la teoría de flujos no viscosos para predecir los efectos aerodinámicos.

Los flujos viscosos pueden clasificarse en dos tipos básicos: flujo laminar, donde las partículas fluidas se mueven ordenadamente a lo largo de las líneas de corriente sin salirse de estas, y flujo turbulento, donde las partículas fluidas se mueven aleatoriamente salíendose de su línea de corriente. La diferencia entre ambos flujos es significativa y tienen un gran impacto en el comportamiento aerodinámico. En la naturaleza es más común encontrarse con flujos turbulentos, debido a la tendencia de aumentar la entropía, sin embargo un flujo laminar puede darse naturalmente bajo ciertas condiciones.

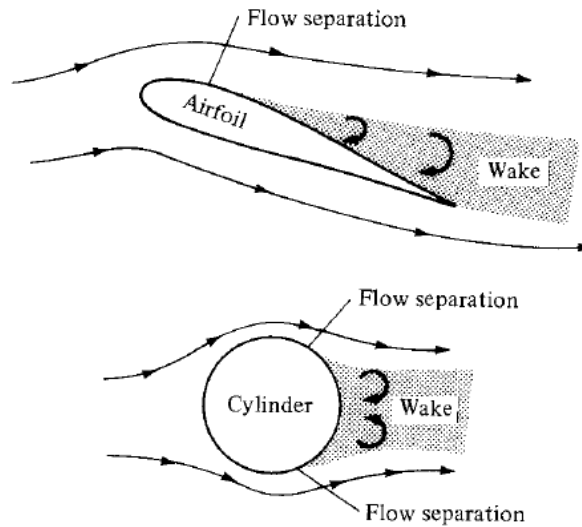


Figura 3.11: Flujo alrededor de un cuerpo delgado y uno obtuso [24].

Para identificar si el flujo dentro de la capa límite se trata de un flujo laminar o turbulento se utiliza como parámetro el número de Reynolds. Para valores pequeños de Re se asume un comportamiento laminar, mientras que para Re muy grandes se tiene un comportamiento turbulento completamente desarrollado. La transición desde el régimen laminar al régimen turbulento está definida por un número de Reynolds crítico Re_{cr} , como se observa en la Figura 3.12. El valor de este para una geometría dada y condiciones específicas es difícil de predecir pero en la práctica frecuentemente se utiliza un valor de $Re_{cr} \approx 5 \cdot 10^5$.

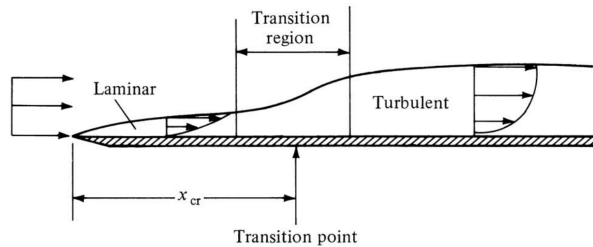


Figura 3.12: Transición de flujo laminar a turbulento [24].

3.3.4. Características aerodinámicas

A partir de las ecuaciones (3.140-3.142) para una geometría de cuerpo dada, si se fijan los valores de Re y Ma , se tiene que los coeficientes de sustentación, arrastre y momento aerodinámico dependen solamente del ángulo de ataque. En la Figura 3.13 se muestra un esquema de la variación del coeficiente de sustentación y el coeficiente

de arrastre en función del ángulo de ataque de acuerdo a resultados experimentales y teóricos.

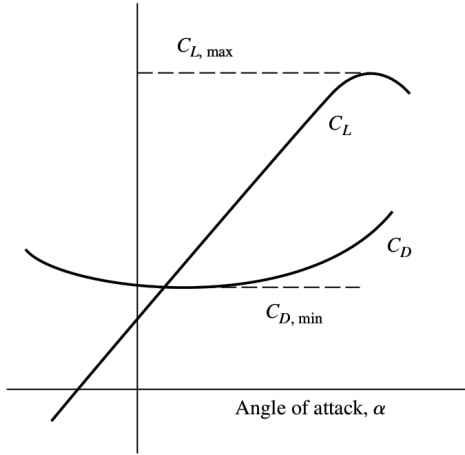


Figura 3.13: Gráfico cualitativo de la variación del C_L y C_D en función de α [24].

Se tiene que el coeficiente de sustentación para ángulos pequeños y moderados varía linealmente hasta alcanzar un valor máximo, denotado por $C_{L, \max}$, y luego disminuye a medida que sigue aumentando α . La pérdida de sustentación, luego del peak, se debe a la separación de la capa límite con la superficie del cuerpo, fenómeno ilustrado en la Figura 3.11.

El arrastre aerodinámico se genera a partir de los efectos viscosos, en particular mediante dos mecanismos:

- *skin-friction drag*: debido a los esfuerzos de corte que actúan en la superficie del cuerpo.
- *pressure drag*: por la separación de la capa límite debido al gradiente de presión adverso

La suma de estas dos formas de arrastre genera la curva del C_D observada en la Figura 3.13 donde se aprecia claramente un mínimo, denotado por $C_{D, \min}$. La medición de la eficiencia aerodinámica de una geometría de cuerpo se construye tomando la razón entre las curvas de sustentación y arrastre, como se muestra en la Figura 3.14. El ángulo de ataque para el cual se maximiza esta curva entrega la mejor relación entre sustentación y arrastre para una geometría.

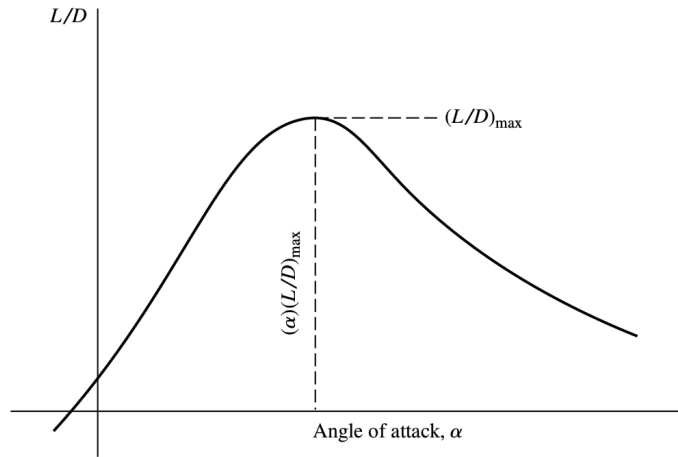


Figura 3.14: Gráfico cualitativo de la variación de la razón C_L/C_D en función de α [24].

La relación entre el coeficiente de momento aerodinámico y el ángulo de ataque depende del punto desde el cual se calcula el momento aerodinámico. En la Figura 3.9 se presentó el centro de presión, punto en el cual el momento aerodinámico se anula, sin embargo no es conveniente utilizar este punto, ya que a medida que varía el ángulo de ataque cambia la posición de este.

Entonces se define el *centro aerodinámico*, denotado por x_{ac} como el punto donde el C_M es independiente del ángulo de ataque. Para calcular su posición, a lo largo de la cuerda, se considera la fuerza de sustentación y el momento aerodinámico respecto a un punto arbitrario, en este caso se utilizará el borde de ataque. Si se calcula el momento aerodinámico con respecto al centro aerodinámico se tiene:

$$M_{ac} = Lx_{ac} + M_{LE} \quad (3.143)$$

Dividiendo (3.143) por $q_\infty Sc$ se obtiene:

$$C_{M,ac} = C_L \frac{x_{ac}}{c} + C_{M,LE} \quad (3.144)$$

Diferenciando con respecto a α y recordando que por definición $dC_{M,ac}/d\alpha = 0$, la ecuación (3.144) se convierte en:

$$\frac{x_{ac}}{c} \frac{dC_L}{d\alpha} + \frac{dC_{M,LE}}{d\alpha} = 0 \quad (3.145)$$

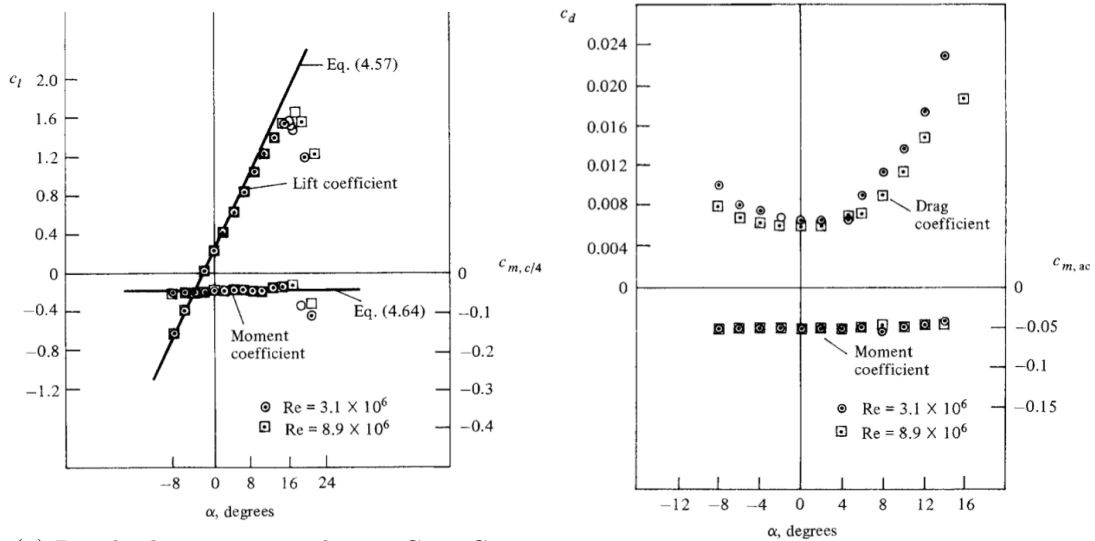
Los términos $dC_L/d\alpha$ y $dC_{M,LE}/d\alpha$ representan la pendiente de la curva de C_L y $C_{M,LE}$ en función del ángulo de ataque respectivamente. Para un α menor al ángulo de $C_{L,max}$ se tiene que ambas pendientes son constantes, por lo tanto, si se denota $a_0 =$

$dC_L/d\alpha$ y $m_0 = dC_{M,LE}/d\alpha$, se obtiene la posición del centro aerodinámico mediante la ecuación:

$$x_{ac} = -\frac{m_0}{a_0}c \quad (3.146)$$

Resultados experimentales para un perfil de ala NACA 2412 de los coeficientes aerodinámicos para distintos números de Reynolds se muestran en la Figura 3.15. En la Figura 3.15a muestran que tanto la pendiente del coeficiente de sustentación y del coeficiente de momento aerodinámico no se ven influenciadas por el número de Reynolds. Sin embargo el valor de $C_{L,max}$ sí es dependiente de Re , dado que la separación de la capa límite se produce por la influencia de los efectos viscosos.

En la Figura 3.15b se observa que el coeficiente de arrastre es influenciado por el número de Reynolds, lo cual es esperable ya que el arrastre es un fenómeno producido por la viscosidad. Además se muestra que el coeficiente de momento con respecto al centro aerodinámico permanece constante y es independiente al ángulo de ataque, lo que corrobora la existencia de dicho punto.



(a) Resultado experimental para C_L y $C_{M, \frac{c}{4}}$. (b) Resultado experimental para C_D y $C_{M, ac}$.

Figura 3.15: Datos de un perfil de ala NACA 2412, fuente: *Abbott and Doenhoff* [24].

Capítulo 4

Metodología

Para diseñar y controlar un sistema mecánico, es importante entender el comportamiento dinámico de este. La simulación de su movimiento se realiza para estudiar la respuesta del sistema frente a cambios de los datos de entrada y/o perturbaciones. El movimiento del sistema depende tanto de los datos de entrada como de su condición inicial, para separar los efectos de esta sobre el comportamiento dinámico se asume que el sistema está inicialmente en reposo. Por lo tanto, interesa en primer lugar obtener una solución estática que entregue una condición inicial estable para la simulación dinámica.

Se desarrolla un modelo matemático de sistema de globo cautivo, que se construye al simular el movimiento y deformación de la estructura flexible, formada por el aerostato y la estructura de cables, sometida a una condición de viento prescrita. El sistema dinámico no lineal de un globo cautivo se considera como un problema de interacción fluido-estructura (FSI), en el cual el perfil geométrico de la estructura flexible se deforma bajo la acción de fuerzas en la superficie de esta, generadas por el campo de flujo atmosférico.

$$\text{Ecuación de movimiento : } \quad \vec{x} = f(\vec{U}, \vec{X}, t)$$

$$\text{Solución Estática : } \quad \vec{x}_{eq} = f_{eq}(\vec{U}_{\infty}, \vec{X}_0) , \quad f_{eq} = \lim_{t \rightarrow \infty} f$$

$$\text{Sistema dinámico : } \quad \vec{x} - \vec{x}_{eq} = f(\vec{U}, \vec{X}, t) - f_{eq}(\vec{U}_{\infty}, \vec{X}_0)$$

$$\text{Método FSI : } \quad f(\vec{U}, \vec{X}, t) = f_{\text{sólido}}(\vec{U}, \vec{X}, t) + f_{\text{fluido}}(\vec{U}, \vec{X}, t)$$

Debido a la interacción en la interfaz, las ecuaciones gobernantes de sólido y fluido deben ser resueltas simultáneamente. Se escoge un método híbrido FEM-FVM particionado para desacoplar los sistemas no lineales del sólido y del fluido y resolverlos de manera iterativa, intercambiando información entre ambos en cada paso de tiempo e iteración. Los principales pasos del algoritmo para la resolución del problema FSI, ver Figura (4.1), se describen a continuación:

1. *Cálculo inicial*: Se definen las condiciones iniciales y los parámetros físicos, y se calcula la solución estática para el tiempo de referencia inicial t .
2. *Cálculo del fluido*: Se resuelve iterativamente el campo de flujo al tiempo $t + \Delta t$ usando la geometría conocida de la estructura, encontrándose una aproximación del campo de velocidades y de presión.
3. *Cálculo del sólido*: Usa la solución del fluido para calcular las fuerzas fluido-dinámicas sobre la superficie de la estructura y se resuelve el desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema.
4. Actualiza la geometría de la estructura flexible y vuelve a calcular el fluido hasta que no haya desplazamiento, luego avanza al siguiente paso de tiempo.

- Dominio del fluido:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_f \vec{U} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_f \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{U} \otimes \vec{U}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{\tau}} - \vec{\nabla} p - \rho_f g \hat{k}\end{aligned}$$

- Dominio del sólido:

$$\rho_s \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{\sigma}} + \rho_s \vec{b}$$

- Condición de borde en la interfaz:

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{\sigma}} + \rho_s \vec{b} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{\tau}} - \vec{\nabla} p - \rho_f g \hat{k}\end{aligned}$$

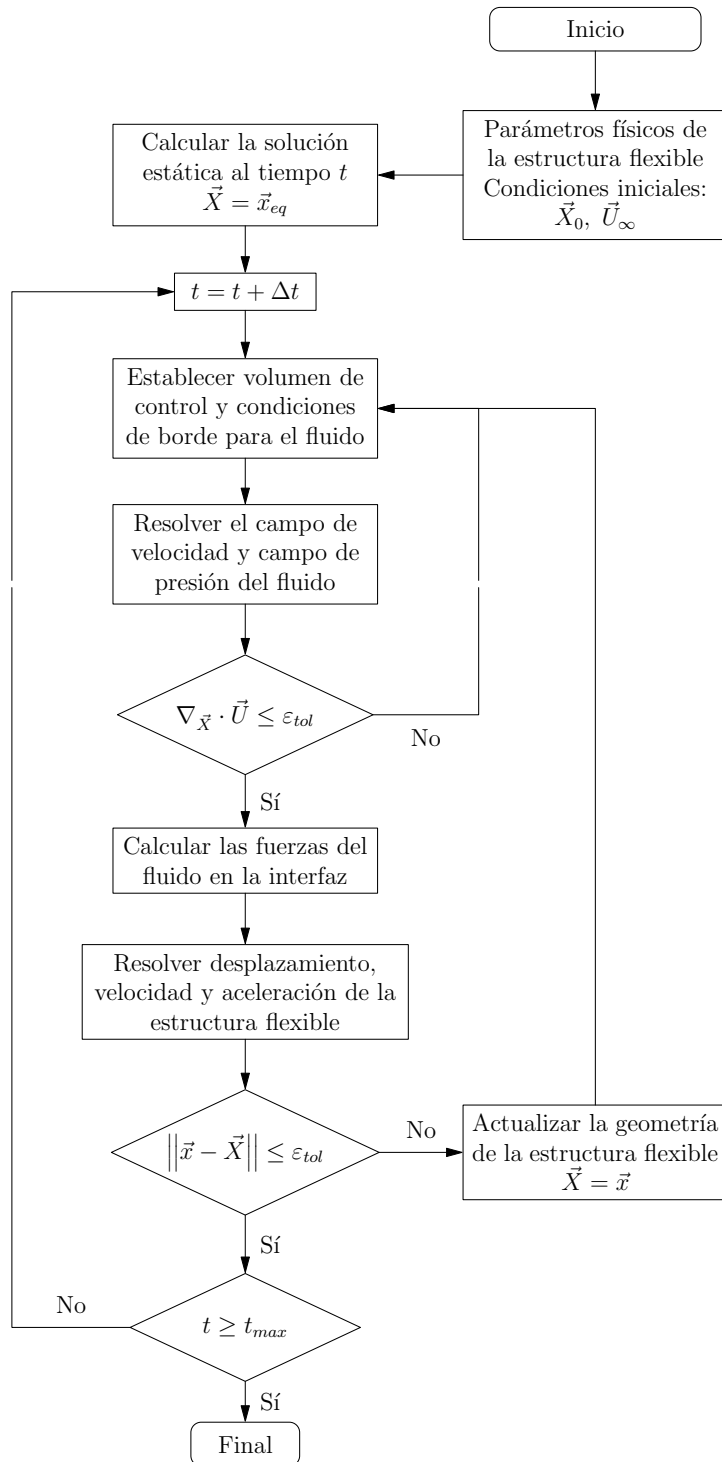


Figura 4.1: Esquema de método iterativo para la solución de problema FSI.

La condición inicial de la simulación dinámica está dada por los parámetros físicos y geométricos de la estructura y un perfil vertical de viento estacionario. La solución estática permite predecir el perfil y distribución de esfuerzos de la estructura de tensión, así como la posición del aerostato para diferentes condiciones atmosféricas. La justificación del desarrollo de la solución estática en primera instancia para el SGC es de doble importancia:

- Permite comparar el rendimiento operativo de distintas configuraciones de SGC a lo largo de un espectro de condiciones de viento promedio, de esta manera es posible determinar un rango de operación óptimo asociado a una configuración en particular.
- Entrega un *instante de referencia* estable, desde el cual iniciar la simulación dinámica del comportamiento del sistema frente a perturbaciones del campo de flujo atmosférico en función del tiempo, como ráfagas de viento.

Dado que las fuerzas aerodinámicas son más significativas sobre el aerostato que en la estructura de tensión, es conveniente concentrar el gasto computacional del método de volúmenes finitos en la interacción del aerostato con el campo de flujo atmosférico, para calcular las fuerzas viscosas. Mientras que las fuerzas del viento sobre los cables son consideradas fuerzas de cuerpo, calculadas mediante coeficientes de arrastre.

El análisis del equilibrio de estructuras de tensión conformadas por uno o más cables es complejo debido a su comportamiento geométrico no lineal, es decir, incluso cuando su elasticidad es lineal, los desplazamientos resultantes pueden ser tan grandes que los cambios en la geometría de la estructura deben ser considerados [51]. Por lo tanto, no es factible resolver el problema explícitamente, invirtiendo una matriz de rigidez global linealizada, como en el método de elementos finitos, sino que necesita ser resuelto iterativamente.

Se utiliza entonces el método de masas concentradas (“lumped-mass method”) para discretizar los cables de la estructura de tensión y poder resolver el sistema de manera iterativa hasta converger a la solución estática. Utilizando el segundo análisis estático propuesto por Fitzsimmons [23], la estructura de tensión es discretizada en elementos de cable y las fuerzas externas son ubicadas en el punto medio de cada uno.

El modelo de SGC se construye a partir de la definición de sus componentes: estructura de tensión, aerostato y campo de flujo atmosférico. La ubicación de la carga en el sistema y su interacción con el viento dependen exclusivamente de la naturaleza

de esta y la aplicación para la cual se diseña el sistema. En el análisis no se considera la influencia de la carga y se define el concepto de capacidad de carga, el cual denota el máximo peso que puede aerotransportar el sistema antes de perder toda rigidez de la estructura, condición conocida como “slack”, sin considerar la fuerza de arrastre de la carga.

A continuación se detalla el modelamiento de los diferentes componentes del sistema de globo cautivo utilizados en la construcción del modelo teórico-matemático de su solución estática.

4.1. Modelo de estructura de tensión

La estructura de tensión se construye por medio de la unión de cables mecánicos tensionados. Los elementos mecánicos de las uniones pueden ser descritos como masas concentradas en los puntos de acoplamiento y confluencia. Sin embargo, para el análisis estructural solo se considerarán las líneas de tensión y, por lo tanto, el efecto del peso e interacción con el viento, de las uniones de la estructura, deberá ser incluido en un trabajo posterior.

El modelo físico del cable se construye bajo los siguientes supuestos:

- El material del cable es homogéneo, posee un área transversal circular y está completamente sumergido en un flujo estacionario.
- El cable admite sólo esfuerzos de tracción, se deforma elásticamente mediante la ley de Hooke en la dirección axial y se desprecia la disminución del diámetro.
- El número de Reynolds de flujo cruzado del cable es sub-crítico.

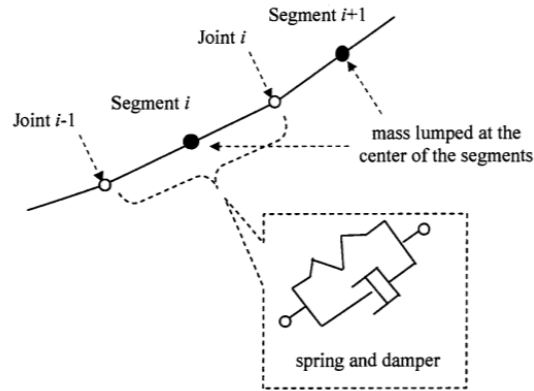


Figura 4.2: Esquema de segmento de cable con masas concentradas [23].

El método utilizado para determinar la solución estática del perfil geométrico de la estructura, consiste en discretizar cada cable en $n + 1$ nodos que conforman n elementos elásticos lineales, denominados segmentos, unidos entre sí por articulaciones mecánicas sin fricción. Cada segmento es equivalente a un sistema de resorte con masa amortiguado, y todas las fuerzas externas sobre el elemento son concentradas en el punto medio (CM) entre ambos nodos, ver Figura 4.2.

Para una condición de viento estacionario ($\partial \vec{U} / \partial t = 0$), todo elemento de la estructura flexible se encuentra en estado de equilibrio. Esto requiere que la suma de todas las fuerzas que actúan en cada componente de la estructura sea cero ($\Sigma \vec{F} = 0$). Además, para elementos con 6 grados de libertad, se debe cumplir también que el vector resultante de la suma de todos los momentos debe ser nulo ($\Sigma \vec{M} = 0$).

Cada perfil de cable se resuelve de manera independiente y su longitud inicial L_0 (sin tensión) divide en n segmentos de largo Δs . La solución estática para una velocidad de corriente libre estacionaria, se obtiene resolviendo segmento por segmento el perfil del cable, comenzando por el extremo donde la tensión es conocida. Dada la naturaleza no lineal del problema, el sistema de equilibrio de cada segmento se resuelve mediante el método de Newton-Raphson, utilizando como aproximación inicial el perfil de catenaria elástica.

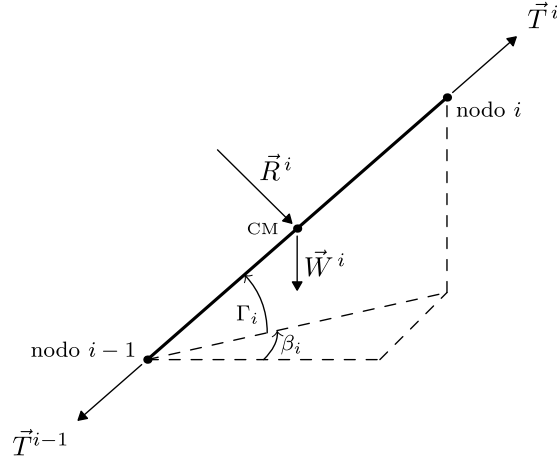


Figura 4.3: Diagrama de cuerpo libre sobre cada segmento de cable.

Las fuerzas a considerar en el equilibrio estático de un cable son: el peso \vec{W} , el arrastre generado por el viento \vec{R} y la distribución de la tensión en su longitud $\vec{T}(s)$. En la Figura 4.3 se muestra el equilibrio de fuerzas sobre un segmento i del cable discretizado, la tensión del nodo $i - 1$ se denota por el vector \vec{T}^{i-1} , mientras que la tensión del nodo i por el vector \vec{T}^i .

La posición de un nodo se describe mediante sus coordenadas cartesianas (x, y, z) en un sistema inercial georreferenciado. La orientación del segmento i , en el sistema de referencia, se describe mediante sólo dos ángulos β_i y Γ_i , ya que el cable no admite esfuerzos de torsión y entonces no gira sobre su eje axial.

$$\Gamma_i = \arctan \left[\frac{-(z_i - z_{i-1})}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \right] \quad (4.1)$$

$$\beta_i = \arctan \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] \quad (4.2)$$

La deformación elástica del segmento i , denotada por ε_i , se calcula comparando la distancia entre ambos nodos y la longitud inicial. Como medida de precaución al momento realizar los cálculos, en el código desarrollado se verifica a que la deformación sea siempre no negativa, es decir, $\varepsilon_i \geq 0$, sin embargo dicha condición no ocurrió en ninguna de las simulaciones realizadas.

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}}{\Delta s} - 1 \quad (4.3)$$

La fuerza gravedad \vec{W}^i ejercida sobre el centro de masa del segmento, actúa en la dirección vertical del sistema de coordenadas, y su sentido está dado por la diferencia entre la densidad del cable ρ_t y la densidad de la corriente libre ρ_∞ . Se define el parámetro λ_t , para caracterizar la distribución lineal del peso a lo largo del cable. Pueden utilizarse segmentos con distinto peso para modelar cables con densidad variable.

$$\vec{W}^i = -\lambda_t \Delta s \hat{k} \quad (4.4)$$

$$\lambda_t = A_0 g (\rho_t - \rho_\infty) \quad (4.5)$$

La fuerza aerodinámica resultante \vec{R}^i sobre el segmento, es concentrada y aplicada en el centro de masa, y sus componentes se calculan utilizando el principio de flujo cruzado (4.7). Donde F_i , G_i y H_i corresponden a la resistencia al arrastre en las direcciones principales del segmento, dados por las ecuaciones (3.44), (3.45) y (3.46) respectivamente:

$$\vec{R}^i = R_x^i \hat{i} + R_y^i \hat{j} + R_z^i \hat{k} \quad (4.6)$$

$$\vec{R}^i = \Delta s (1 + \varepsilon_i) (F_i \hat{\tau}^i + G_i \hat{n}_1^i + H_i \hat{n}_2^i) \quad (4.7)$$

Donde las direcciones principales del segmento i se calculan, utilizando los ángulos de la orientación (4.1) y (4.2), de la siguiente manera:

$$\hat{\tau}^i = \cos \Gamma_i \cos \beta_i \hat{i} + \cos \Gamma_i \sin \beta_i \hat{j} + \sin \Gamma_i \hat{k} \quad (4.8)$$

$$\hat{n}_1^i = -\sin \beta_i \hat{i} + \cos \beta_i \hat{j} \quad (4.9)$$

$$\hat{n}_2^i = -\sin \Gamma_i \cos \beta_i \hat{i} - \sin \Gamma_i \sin \beta_i \hat{j} + \cos \Gamma_i \hat{k} \quad (4.10)$$

Luego las componentes de la fuerza aerodinámica resultante sobre el segmento de cable, en el sistema de coordenadas cartesianas, quedan de la forma:

$$R_x^i = \frac{1}{2} \rho_\infty C_N d_t \Delta s (1 + \varepsilon_i) [\pi \gamma \cos \Gamma_i \cos \beta_i |U_\tau^i| U_\tau^i + \dots \\ \dots - \sin \beta_i |U_{n_1}^i| U_{n_1}^i - \sin \Gamma_i \cos \beta_i |U_{n_2}^i| U_{n_2}^i] \quad (4.11)$$

$$R_y^i = \frac{1}{2} \rho_\infty C_N d_t \Delta s (1 + \varepsilon_i) [\pi \gamma \cos \Gamma_i \sin \beta_i |U_\tau^i| U_\tau^i + \dots \\ \dots + \cos \beta_i |U_{n_1}^i| U_{n_1}^i - \sin \Gamma_i \sin \beta_i |U_{n_2}^i| U_{n_2}^i] \quad (4.12)$$

$$R_z^i = \frac{1}{2} \rho_\infty C_N d_t \Delta s (1 + \varepsilon_i) [\pi \gamma \sin \Gamma_i |U_\tau^i| U_\tau^i + \cos \Gamma_i |U_{n_2}^i| U_{n_2}^i] \quad (4.13)$$

Donde d_t es el diámetro del cable y γ corresponde a la razón entre los coeficientes de arrastre tangencial y normal al perfil de cable. El coeficiente de arrastre varía con respecto al número de Reynolds y el valor del C_{DN} para cilindros oscila entre 0,8 y 2,0. Por otra parte, el C_{DT} es generalmente una pequeña fracción del C_{DN} ($0,01 < \gamma < 0,03$) y en la mayoría de los casos se omite la componente tangencial de la fuerza de arrastre (F), sin embargo en este análisis se considera γ constante.

Las componentes de la velocidad del viento en las direcciones principales del segmento, se describen en función de las componentes cartesianas de $\vec{U}_\infty(z)$ calculado a la altura del centro de masa, como sigue:

$$\vec{U}_\infty \left(\frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right) = U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k} \quad (4.14)$$

$$U_\tau^i = U_x \cos \Gamma_i \cos \beta_i + U_y \cos \Gamma_i \sin \beta_i + U_z \sin \Gamma_i \quad (4.15)$$

$$U_{n_1}^i = -U_x \sin \beta_i + U_y \cos \beta_i \quad (4.16)$$

$$U_{n_2}^i = -U_x \sin \Gamma_i \cos \beta_i - U_y \sin \Gamma_i \sin \beta_i + U_z \cos \Gamma_i \quad (4.17)$$

Reemplazando los resultados de (4.15-4.17) en las ecuaciones (4.11-4.13) se obtienen los valores de las componentes de \vec{R}^i en el sistema de coordenadas cartesianas georreferenciadas.

Finalmente al sumar cada una de las fuerzas aplicadas al segmento y los momentos con respecto al centro de masa en el sistema inercial georreferenciado, ver Figura 4.3, se obtiene el siguiente sistema de equilibrio para el segmento de cable:

$$T_x^{i-1} + T_x^i + R_x^i = 0 \quad (4.18)$$

$$T_y^{i-1} + T_y^i + R_y^i = 0 \quad (4.19)$$

$$T_z^{i-1} + T_z^i + R_z^i - \lambda_t \Delta s = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{2} \Delta s (1 + \varepsilon_i) [(T_y^{i-1} - T_y^i) \sin \Gamma_i - (T_z^{i-1} - T_z^i) \sin \beta_i \cos \Gamma_i] = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2} \Delta s (1 + \varepsilon_i) [(T_z^{i-1} - T_z^i) \cos \beta_i \cos \Gamma_i - (T_x^{i-1} - T_x^i) \sin \Gamma_i] = 0 \quad (4.22)$$

Al conocer la tensión en el nodo $i - 1$, el sistema no lineal constituido por las ecuaciones (4.18-4.22), se resuelve numéricamente para las tres componentes cartesianas del vector \vec{T}^i y los valores de los ángulos β_i y Γ_i utilizando el método de Newton-Raphson.

Debido a que se prescribe tanto la deformación como la orientación del segmento i , una vez se resuelve el sistema de equilibrio, se calcula la nueva deformación del segmento a partir de la magnitud de las tensiones en los nodos y se actualiza la posición del nodo i de acuerdo a los nuevos valores de ε_i , β_i y Γ_i . El proceso se repite hasta que la nueva posición deje de cambiar y converja a un valor fijo, bajo cierto margen de tolerancia.

$$\varepsilon_i = \frac{i \left\| \vec{T}^i \right\| - (i - 1) \left\| \vec{T}^{i-1} \right\|}{EA} \quad (4.23)$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta s (1 + \varepsilon_i) \cos \Gamma_i \cos \beta_i \quad (4.24)$$

$$y_i = y_{i-1} + \Delta s (1 + \varepsilon_i) \cos \Gamma_i \sin \beta_i \quad (4.25)$$

$$z_i = z_{i-1} + \Delta s (1 + \varepsilon_i) \sin \Gamma_i \quad (4.26)$$

Donde $A = \frac{1}{4} \pi d_t^2$ es el área de la sección transversal y E es el módulo de elasticidad del cable. Una vez que se obtiene la posición final del nodo i , el sistema de equilibrio del siguiente segmento $i + 1$ se resuelve utilizando como dato de entrada, el resultado la tensión en el nodo i en sentido opuesto. Cuando se resuelven cada uno de los segmentos del cable discretizado se determina el perfil geométrico del cable.

La solución estática de la estructura flexible, se obtiene iterativamente al forzar el equilibrio en los puntos donde se unen los distintos cables, que conforman la estructura de tensión. Las condiciones de borde que impone la estructura flexible en su estado de equilibrio sobre los perfiles de los cables, para SGC simple y multi-anclaje, se pueden

definir en dos categorías:

- *Extremo fijo*: La posición del nodo del extremo del cable es conocida y su tensión está dada por el equilibrio estático. Esta condición se utiliza para puntos de anclaje y de confluencia, de las líneas de tensión.
- *Extremo libre*: La posición del nodo del extremo del cable es desconocida en el estado de equilibrio pero su tensión sí es conocida. Esta condición se utiliza para puntos de acoplamiento de carga, entre cables y del aerostato.

4.2. Modelo de aerostato

Un aerostato típico tiene un envoltorio de perfil aerodinámico alargado, relleno de un gas liviano y aletas traseras que estabilizan su vuelo y lo orientan de frente al viento. Se une a la estructura de tensión en su punto de acoplamiento, por medio de cuerdas que se atan a parches pegados a lo largo de este. El modelamiento del aerostato incluye solamente los efectos aerodinámicos de su envoltorio, y el análisis de las aletas traseras podrá ser añadido, una vez se defina una metodología para seleccionar su número, tamaño, ubicación y perfil de ala.

El modelo físico del aerostato se construye bajo los siguientes supuestos:

- El aerostato es considerado un cuerpo rígido, cuya forma geométrica es la de un sólido de revolución.
- El centro de flotación y de masa se ubican en el eje axial del aerostato.
- Las cuerdas que unen al aerostato al punto de acoplamiento, son consideradas ideales, es decir, sin masa, inextensibles y no interactúan con el viento.
- El aerostato puede girar libremente pivoteado en el punto de acoplamiento, se orienta de manera que su eje axial es coplanar a la velocidad del viento, en condición de flujo estacionario.

Dado que el aerostato se supone auto-orientable, su equilibrio estático puede definirse en un plano xz paralelo a la dirección del viento. El ángulo α , que forman la velocidad del viento \vec{U}_∞ y el eje axial del aerostato, es denominado ángulo de ataque. Las fuerzas que actúan sobre el aerostato son: la fuerza de empuje \vec{B} sobre el centro de flotación, el peso \vec{W} sobre el centro de masa, la fuerza aerodinámica \vec{R} , el momento sobre el centro aerodinámico \vec{M}_a , y la tensión resultante \vec{T} en el punto de acoplamiento.

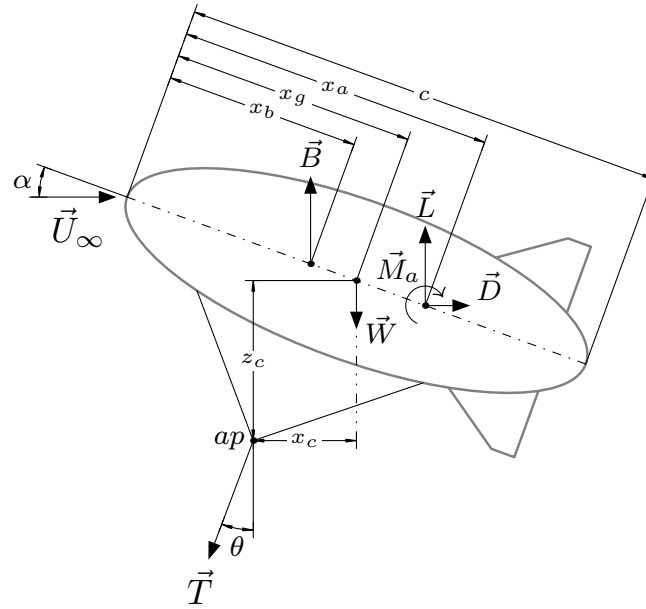


Figura 4.4: Fuerzas que actúan sobre el aerostato.

Al aplicar la condición de equilibrio al aerostato de la Figura 4.4 y separando la fuerza aerodinámica resultante, en sus componentes de arrastre \vec{D} y de sustentación \vec{L} , se obtiene:

$$\sum \vec{F}_x = 0 : \quad D - T \sin \theta = 0 \quad (4.27)$$

$$\sum \vec{F}_z = 0 : \quad L + B - W - T \cos \theta = 0 \quad (4.28)$$

- Suma de momentos con respecto al punto de acoplamiento:

$$\frac{M_a + D((x_a - x_g) \sin \alpha - z_c) + L(x_c - (x_a - x_g) \cos \alpha)}{(W - B)x_c - B(x_b - x_g) \cos \alpha} - 1 = 0 \quad (4.29)$$

Tanto B como W son independientes de la velocidad del viento, y dependen del tamaño y forma del aerostato. Sin embargo D , L , M_a , x_a y α deben calcularse en función de U_∞ . Por lo tanto, antes de resolver el sistema de ecuaciones (4.27-4.28), para las incógnitas T y θ es necesario determinar las dependencias de las variables involucradas en la ecuación (4.29).

La distancia del centro de masa x_g y la distancia del centro de flotación x_b , con respecto al borde de ataque, son parámetros de diseño del aerostato y dependen de la forma geométrica de este y no cambian con el viento. Si se considera el caso sin viento (*), para eliminar los efectos aerodinámicos, todas fuerzas restantes actúan paralelas al

eje vertical. Por lo tanto el sistema (4.27-4.29) se reduce a:

$$\theta^* = 0 \quad (4.30)$$

$$T^* = B - W \quad (4.31)$$

$$x_c^* = \frac{(x_b - x_g) B \cos \alpha^*}{W - B} \quad (4.32)$$

Donde α^* es el ángulo de ataque en equilibrio para el caso sin viento. La posición relativa (x_c, z_c) , del centro de masa con respecto al punto de acoplamiento, tiene un efecto importante sobre el comportamiento aerodinámico del aerostato. La ecuación (4.32) entrega la relación para x_c^* , dejando a α^* y z_c^* como parámetros de diseño.

Ante la existencia de viento, el momento aerodinámico producido sobre el borde de ataque del aerostato \vec{M}_{LE} tiende a aumentar el ángulo de ataque. Sin embargo, la distancia $\sqrt{x_c^2 + z_c^2}$ se mantiene constante, debido al supuesto de movimiento de cuerpos rígidos, por lo que una vez alcanzado el equilibrio, la nueva posición relativa del punto de acoplamiento puede ser descrita en función de α , utilizando como referencia el caso sin viento.

$$x_c = \sqrt{x_c^{*2} + z_c^{*2}} \sin(\alpha - \alpha^*) \quad (4.33)$$

$$z_c = \sqrt{x_c^{*2} + z_c^{*2}} \cos(\alpha - \alpha^*) \quad (4.34)$$

Para mejorar la estabilidad, se recomienda utilizar $\alpha \approx 5^\circ - 10^\circ$, y que la distancia vertical z_c sea igual o mayor a 1,5 veces el diámetro mayor del aerostato [5].

El momento M_a calculado en el centro aerodinámico, y la distancia x_a , entre este último y el borde de ataque, son independientes de α por definición. No obstante, la magnitud del arrastre D y sustentación L dependerán tanto de U_∞ como de α . Las fuerzas aerodinámicas pueden ser calculadas mediante una simulación de CFD, sin embargo al momento de definir la geometría, es necesario conocer *a priori* el ángulo de ataque en equilibrio.

Con el fin de encontrar una relación que estime los efectos aerodinámicos sobre el aerostato, en términos de α y U_∞ , se hace uso de la teoría aerodinámica y se definen las fuerzas y momento en función de sus coeficientes adimensionales, siendo la distancia c

y área frontal A la longitud y superficie característica respectivamente:

$$D = \frac{1}{2}\rho_{\infty}AU_{\infty}^2C_D(Re_c, Ma, \alpha) \quad (4.35)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho_{\infty}AU_{\infty}^2C_L(Re_c, Ma, \alpha) \quad (4.36)$$

$$M_{LE} = \frac{1}{2}\rho_{\infty}AcU_{\infty}^2C_{M_{LE}}(Re_c, Ma, \alpha) \quad (4.37)$$

En el caso de que, para una geometría de aerostato en particular, no se conozcan las funciones, de las ecuaciones (3.140-3.142), que caracterizan las curvas de los coeficientes aerodinámicos, se utilizan múltiples simulaciones transientes en el programa de código abierto OpenFOAM, hasta alcanzar el estado estacionario del aerostato inmerso en un flujo uniforme, variando el ángulo de ataque para calcular D , L y M_{LE} , y aproximar las curvas de los coeficientes aerodinámicos, a una velocidad U_{∞} de interés, utilizando polinomios de α :

$$C_L = a_0 + a_1 \alpha \quad (4.38)$$

$$C_D = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 \quad (4.39)$$

$$C_{M,LE} = m_0 + m_1 \alpha \quad (4.40)$$

A partir de las ecuaciones (4.38-4.40) se puede calcular la posición del centro aerodinámico, con respecto al borde de ataque, utilizando la ecuación (3.146). Entonces es posible determinar el momento resultante sobre el centro aerodinámico como sigue:

$$M_a = Lx_a + M_{LE} \quad \text{con} \quad \alpha = 0 \quad (4.41)$$

Finalmente se reemplazan en (4.29) los valores de M_a , D y L , utilizando las ecuaciones (3.135)-(3.138), y se obtiene una ecuación que relaciona el ángulo de ataque en equilibrio, con la magnitud de la velocidad promedio de viento U_{∞} .

$$\frac{1}{2}\rho_{\infty}AU_{\infty}^2 = \frac{(W - B)\bar{x}_c - B(\bar{x}_b - \bar{x}_g)\cos\alpha}{C_{M_a} + C_D[(\bar{x}_a - \bar{x}_g)\sin\alpha - \bar{z}_c] + C_L[\bar{x}_c - (\bar{x}_a - \bar{x}_g)\cos\alpha]} \quad (4.42)$$

Donde la barra sobre las distancias (\bar{x}) indica que estas han sido adimensionalizadas utilizando la longitud de la cuerda c . La ecuación (4.42) es no lineal para α , por lo que se utiliza el método de Newton-Raphson para resolverla numéricamente. Una vez determinado α , la magnitud de la tensión T y su ángulo θ , pueden calcularse a partir

de las ecuaciones (4.27) y (4.28) de la siguiente manera:

$$T = \sqrt{D^2 + (L + B - W)^2} \quad (4.43)$$

$$\cot \theta = \frac{L + B - W}{D} \quad (4.44)$$

De esta manera se obtiene la magnitud y dirección de la tensión, ejercida por el aerostato sobre el punto de acoplamiento, en equilibrio estático que entrega la condición de borde en el extremo libre de la estructura de tensión.

4.3. Modelo de campo de flujo atmosférico

En aplicaciones meteorológicas es común hacer algunas simplificaciones para el modelamiento del flujo en la subcapa superficial de la PBL. Para el cálculo de las propiedades físicas atmosféricas se utiliza el modelo internacional de atmósfera estándar [14]. En el cual se asume que el aire se comporta como un gas ideal, y basados en valores convencionales de las características físicas de la atmósfera a nivel del mar.

Los supuestos utilizados para definir el modelo de campo de flujo atmosférico son:

- El aire es considerado un gas ideal, libre de humedad y material particulado. Su composición molecular es prácticamente constante hasta altitudes de $\sim 90 [km]$.
- Una capa límite atmosférica, dominada por vientos geostrofos, sobre una superficie razonablemente plana y uniforme, puede considerarse horizontalmente homogénea para una escala horizontal de hasta $\sim 100 [km]$.
- Sobre periodos de tiempo del orden de $\sim 1 [hr]$ la PBL puede ser considerada cuasi-estacionaria cuando se consideran promedios temporales de sus propiedades físicas.
- La atmósfera es estáticamente estable y su temperatura varía linealmente con la altura geopotencial.

En una atmósfera estática con respecto a la Tierra, la única fuerza que actúa sobre el aire es la fuerza de gravedad. La distribución de las presiones en equilibrio hidroestático con respecto a la altura dependerá de la aceleración gravitacional.

Considerando un sistema de referencia georreferenciado de coordenadas cartesianas (x, y, z) , donde z representa la altura geométrica, se define la altura geopotencial h , en

adelante altitud, como la distancia (vertical) entre dos superficies isóbaras:

$$h = \frac{1}{g_0} \int_0^z g(z^*) dz^* \quad (4.45)$$

Donde g_0 es la aceleración gravitacional, correspondiente a la latitud $\phi = 45^\circ 32' 33''$ a nivel del mar ($z = h \equiv 0$). La temperatura entonces se describe en función de la altitud como sigue:

$$T_\infty = T_0 + \beta \Delta h \quad (4.46)$$

Donde $\beta = dT/dh$ es el gradiente adiabático y T_0 es la temperatura a la altitud de referencia. Utilizando la ecuación de estado de un gas ideal se construye la expresión para la presión en equilibrio hidrostático:

$$p_\infty = p_0 \left(1 + \frac{\beta \Delta h}{T_0} \right)^{-g_0/R\beta} \quad (4.47)$$

Donde p_0 es la presión atmosférica a la altitud de referencia y R es la constante de gas ideal. Finalmente, la densidad atmosférica se calcula de la ecuación de estado de gas ideal:

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{R \cdot T_\infty} \quad (4.48)$$

Para alturas menores a 100 [m], las propiedades físicas de la atmósfera pueden considerarse constantes y se utilizan los valores de la atmósfera estandar a nivel del mar, ver Tabla 4.1, sin incurrir en un error significativo. Sin embargo, si las propiedades atmosféricas en la altura de interés difiere considerablemente del valor de atmósfera estándar, deben considerarse variaciones con respecto a la altitud.

Tabla 4.1: Propiedades físicas de la atmósfera estándar a nivel del mar [14].

Símbolo	Valor	Unidades	Descripción
g_0	9,80665	[m/s^2]	Aceleración gravitacional
T_0	288,15	[K]	Temperatura absoluta
β	-6,5	[K/km]	Gradiente adiabático
R	287,05287	[$J/kg \cdot K$]	Cte. de gas ideal para aire seco
p_0	101,325	[kPa]	Presión hidrostática
ρ_0	1,225	[kg/m^3]	Densidad
μ_0	17,894	[$\mu Pa \cdot s$]	Viscosidad molecular
a_0	340,294	[m/s]	Velocidad del sonido

La distribución de la velocidad promedio horizontal del campo de flujo atmosférico, bajo condiciones de atmósfera neutra, puede modelarse mediante la ley de perfil logarítmico del viento hasta alturas de 20 – 200 [m], según la altura de la PBL [47].

Asumiendo que el viento horizontal es paralelo al eje x , la componente promedio U , en función de la altura es:

$$U_{\infty}(z) = U_{ref} \cdot \left[1 + \frac{\ln(z/z_{ref})}{\ln(z_{ref}/z_0)} \right] \quad (4.49)$$

Donde U_{ref} es la velocidad de referencia medida a una altura de referencia z_{ref} . Mientras que z_0 corresponde al parámetro de rugosidad de la superficie del terreno, algunos valores utilizados para distintos tipos de superficie se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.2: Valores típicos de parámetros de rugosidad del terreno [40].

Descripción del terreno	z_0 [mm]
Muy liso con hielo o lodo	0,01
Superficie nevada	3
Campo barbechado	30
Plantaciones	50
Suburbios	1500

Para las condiciones de viento a analizar se utilizan las definiciones de la norma internacional IEC 61400-1:2005 [8], que especifica los requerimientos de diseño esenciales para asegurar la integridad de turbinas de viento. Estas incluyen un viento promedio constante combinado con turbulencia.

$$\vec{U}(z, t) = \vec{U}_{\infty}(z) + \vec{u}(z, t) \quad (4.50)$$

Donde u denota variaciones aleatorias en la velocidad de viento con respecto al valor promedio. Las tres componentes del vector de la velocidad de viento turbulento se definen como:

- *Longitudinal*: En la dirección de la velocidad promedio del viento.
- *Lateral*: Paralela al plano horizontal y normal a la dirección longitudinal.
- *Ascendente*: Normal a ambas direcciones longitudinal y lateral.

La turbulencia se cuantifica mediante la intensidad de turbulencia IT , que denota el porcentaje de la razón entre la desviación estándar de la componente turbulenta del viento y la velocidad promedio.

$$IT = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{U_{\infty}} \cdot 100 \% \quad (4.51)$$

Donde σ_1 , σ_2 y σ_3 se refieren a la desviación estándar de \vec{u} , en las direcciones longitudinal, lateral y ascendente respectivamente, en un periodo de tiempo de 10 minutos. El valor de la desviación estándar en la dirección longitudinal se calcula mediante la ecuación:

$$\sigma_1 = I_{ref} (0,75U_\infty + 5,6) \quad (4.52)$$

La intensidad de referencia I_{ref} , se escoge de acuerdo al valor de las tres categorías de turbulencia: baja, media y alta; dadas en la Tabla 4.3 que se muestra a continuación.

Tabla 4.3: Categorías de turbulencia del viento [8].

Intensidad de turbulencia	I_{ref}
Baja	0,12
Media	0,14
Alta	0,16

Las componentes lateral y ascendente, de la desviación estándar de la velocidad turbulenta, se calculan de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$\sigma_2 \geq 0,7\sigma_1 \quad (4.53)$$

$$\sigma_3 \geq 0,5\sigma_1 \quad (4.54)$$

4.4. Modelo de sistema de globo cautivo

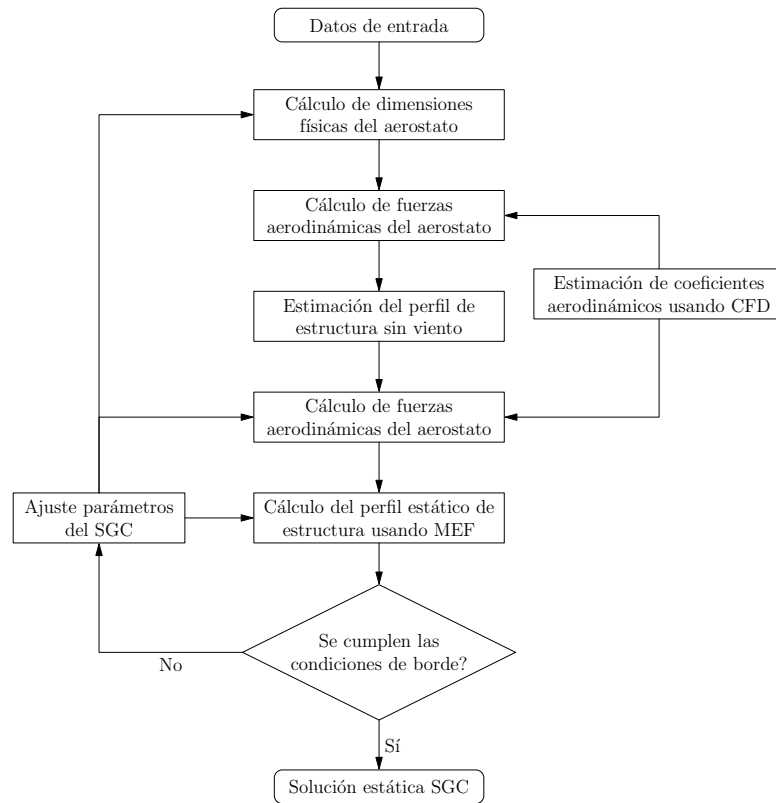


Figura 4.5: Diagrama de flujo de algoritmo para encontrar la solución estática de sistema de globo cautivo.

La solución estática del sistema obtiene calculando el estado de equilibrio de la estructura flexible utilizando los modelos de aerostato, viento y estructura de tensión. En la Figura 4.5 se muestra el diagrama de flujo del modelo de SGC desarrollado para encontrar el estado de equilibrio, en el que se observa esquemáticamente cómo interactúan los modelos de los distintos elementos que componen el sistema.

El sistema de globo cautivo simple o de una línea de anclaje (“single-tethered”), se compone de un cable y un aerostato. Se denomina punto de acoplamiento a la posición donde la línea de anclaje se une al conjunto de cuerdas que mantienen cautivo al aerostato, y punto de anclaje a la posición donde se fija el extremo inferior del cable.

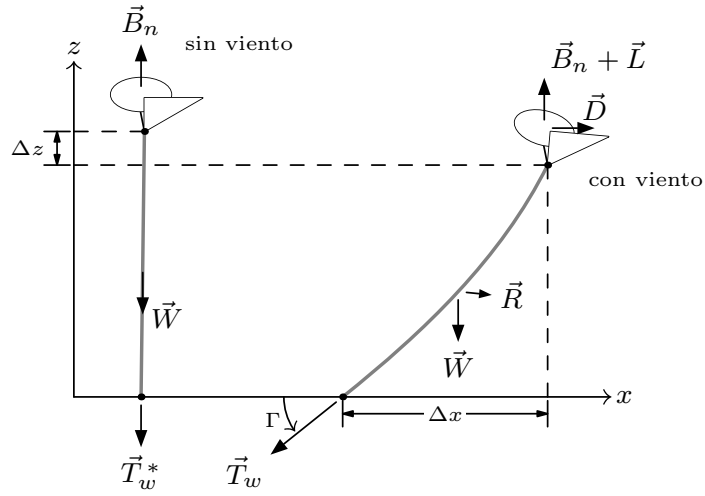


Figura 4.6: Esquema de operación del sistema de globo cautivo simple y las fuerzas involucradas.

En el caso sin viento (*) de la Figura 4.6, en una atmósfera establemente estratificada, todas las fuerzas externas sobre la estructura flexible de un SGC simple son paralelas al eje vertical. Estas son la fuerza de empuje neto del aerostato \vec{B}_n , la fuerza de gravedad sobre el cable \vec{W} y la tensión en el punto de anclaje \vec{T}_w^* .

El peso de la línea de anclaje W se calcula multiplicando la longitud inicial L_0 (sin deformación) por el peso lineal específico λ_t del cable. De esta manera, la magnitud de la tensión en el punto de anclaje se obtiene aplicando la condición de equilibrio al cable y el aerostato.

$$\sum \vec{F}_{cable} = 0 : \quad -T_w^* \hat{k} - \lambda_t L_0 \hat{k} + \vec{T}_{ap}^* = 0 \quad (4.55)$$

$$\sum \vec{F}_{aero} = 0 : \quad -\vec{T}_{ap}^* + B_n \hat{k} = 0 \quad (4.56)$$

$$\Rightarrow T_w^* = B_n - \lambda_t L_0 \quad (4.57)$$

Ante la existencia de viento, sobre el aerostato de la Figura 4.6 se producen fuerzas aerodinámicas, clasificadas como de arrastre D en la dirección horizontal y de sustentación L en la dirección vertical. Sobre la línea de anclaje también se produce una fuerza aerodinámica \vec{R} . El valor de la tensión en el anclaje \vec{T}_w aumenta para contrarrestar

las nuevas fuerzas sobre la estructura y alcanzar así una nueva condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_{cable} = 0 : \quad \vec{T}_w + \vec{R} - \lambda_t L_0 \hat{k} + \vec{T}_{ap} = 0 \quad (4.58)$$

$$\sum \vec{F}_{aero} = 0 : \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_{ap} = D \hat{i} + (B_n + L) \hat{k} \quad (4.59)$$

$$\vec{T}_w = -T_w \left(\cos \Gamma \hat{i} + \sin \Gamma \hat{k} \right) \quad (4.60)$$

$$\Rightarrow \quad T_w = \sqrt{(D + R_x)^2 + (B_n + L + R_z - \lambda_t L_0)^2} \quad (4.61)$$

$$\Rightarrow \quad \tan \Gamma = \frac{B_n + L + R_z - \lambda_t L_0}{D + R_x} \quad (4.62)$$

En el caso con viento, se produce un desplazamiento horizontal Δx , hacia afuera de la vertical, y una pérdida de altura Δz del punto de acoplamiento debido principalmente de la interacción del viento con el aerostato. La estimación de la variación de la altura entrega información valiosa para determinar si el sistema puede operar como una estación fija. No obstante la exactitud de la predicción dependerá tanto del modelo del cable, como del cálculo de las fuerzas aerodinámicas sobre el aerostato.

Para calcular el valor de las fuerzas aerodinámicas sobre el aerostato se necesita saber previamente la altura del punto de acoplamiento z_{ap} , dado que el ángulo de ataque del aerostato en equilibrio α depende de la magnitud de la velocidad U_∞ . Por lo tanto, si se decide utilizar un perfil de velocidad de viento en función de la altura, el cálculo de D y L se vuelve necesariamente iterativo.

La posición del punto de acoplamiento se estima antes de calcular el perfil estático de la línea de anclaje. Como primera aproximación se utiliza la posición del punto de acoplamiento del caso sin viento z_{ap}^* , luego se calculan las componentes (x_{ap}, z_{ap}) al considerar un perfil de catenaria elástica para el cable, utilizando las ecuaciones (3.66) y (3.67).

$$\varepsilon^* = \frac{T_w^* + \lambda_t L_0}{EA_0} \quad z_{ap}^* = (1 + \varepsilon^*) L_0 \quad (4.63)$$

$$H = T_w \cos \Gamma \quad V = T_w \sin \Gamma \quad (4.64)$$

Donde E es el módulo de elasticidad y A_0 el área de la sección transversal del cable. El cálculo del perfil estático comienza desde el punto de acoplamiento donde la tensión es conocida. Luego se verifica que la posición del extremo fijo del aerostato coincida con el punto de anclaje. Normalmente en la primera iteración no coinciden estos puntos, el error se utiliza para modificar (x_{ap}, z_{ap}) y calcular nuevamente el perfil estático del cable, hasta que se cumpla la condición de borde en el extremo fijo.

La rigidez de la estructura de tensión depende de la diferencia entre la componente vertical de la tensión en el punto de acoplamiento, y el peso total de los cables que la conforman. Mientras mayor sea esta diferencia, mayor será la componente vertical de la tensión en el anclaje y el perfil geométrico de la línea de anclaje se asemejará más a una línea recta, esto generará una mayor resistencia al desplazamiento horizontal del punto de acoplamiento frente a cambios en la velocidad del viento.

Al agregar una carga de masa m al sistema, disminuye la rigidez de la estructura por el peso extra de la carga, como se muestra ecuación (4.65). La capacidad de carga m_p de la estructura se define como la masa de carga que hace que el sistema entre en “slack”, condición que ocurre cuando la componente vertical de la tensión en el anclaje se anula.

$$T_w \sin \Gamma = B_n + L - R_z - \lambda_t L_0 - mg \quad (4.65)$$

$$\text{slack : } \Gamma \rightarrow 0 \quad (4.66)$$

$$\Rightarrow m_p = \frac{B_n + L - R_z - \lambda_t L_0}{g} \quad (4.67)$$

La condición de mínima capacidad de carga m_p^* , ocurre en el caso sin viento dado que $\vec{L}, \vec{R} \rightarrow 0$. Por lo tanto, el análisis del estado de equilibrio sin viento de la estructura flexible permite cuantificar empuje neto aerostato requerido, para una asegurar una mínima capacidad de carga en particular.

$$m_p^* = \frac{B_n - \lambda_t L_0}{g} \quad (4.68)$$

$$\Rightarrow B_n = m_p^* g + \lambda_t L_0 \quad (4.69)$$

El valor empuje neto se utiliza para dimensionar el aerostato, conociéndose la densidad superficial del envoltorio ρ_{env} , la densidad del gas de relleno ρ_{gas} y la densidad del viento ρ_∞ a la altura del aerostato.

$$B_n = B - W \quad (4.70)$$

$$B = (\rho_\infty - \rho_{gas}) g V_{env} \quad (4.71)$$

$$W = \rho_{env} g S_{env} \quad (4.72)$$

Donde V_{env} y S_{env} corresponden al volumen y superficie total del envoltorio del aerostato respectivamente. Las dimensiones del aerostato, que dependen de la forma geométrica del envoltorio y son parametrizadas en función de la longitud de su cuerda

c , se calculan reemplazando (4.70) en la ecuación (4.69).

$$V_{env}(c)(\rho_{\infty} - \rho_{gas}) - S_{env}(c)\rho_{env} - m_p^* - \frac{\lambda_t}{g}L_0 = 0 \quad (4.73)$$

Una vez se calcula la raíz de c para la ecuación (4.73), se obtienen las dimensiones físicas del aerostato que aseguran una mínima capacidad de carga de la estructura flexible. Si se considera $m_p^* = 0$, la ecuación (4.73) entrega el mínimo valor de la cuerda c_{min} para mantener elevada la estructura flexible en condición de “slack”. De esta manera se obtiene el volumen mínimo del aerostato V_{min} .

En el caso del SGC simple sólo es posible controlar el resultado de z_{ap} modificando la longitud L_0 , ya que el desplazamiento en el plano horizontal está dado por el sentido de la dirección del viento, si se requiere un control sobre la posición de los elementos del sistema en más de una dimensión, es necesario utilizar múltiples líneas de anclaje.

Para entender como opera un SGC multi-anclaje, en la Figura 4.7 se muestra un esquema simplificado de la estructura de tensión de un aerostato con dos líneas de anclaje. Debido a que el cable sólo soporta esfuerzos de tracción, la tensión siempre es tangente al perfil de este. Asumiendo que las líneas de anclaje no poseen masa y no se ven afectados por fuerzas aerodinámicas; su perfil geométrico serán dos líneas rectas, siendo razonables tales supuestos iniciales, ya que se espera que los cables esten lo más tensionado posible.

En el caso sin viento de la Figura 4.7a, la tensión en los cables se debe sólo a la fuerza de empuje neta del aerostato \vec{B}_n . Luego ante la existencia de viento horizontal, como se muestra en la Figura 4.7b, además de la fuerza de empuje sobre la estructura actúa la fuerza de arrastre aerodinámico del viento sobre el aerostato \vec{D} .

A medida que aumenta la velocidad del viento, ver Figura 4.7c, llega un punto en que la tensión vertical del cable derecho se vuelve cero, entonces la estructura pierde su rigidez y toda la tensión de la estructura queda soportada por una línea de anclaje. Esto ocurre cuando la tensión del aerostato en el punto de acoplamiento es colinear con el perfil de alguno de los cables. Por lo tanto el rango de operación del sistema debe corresponder al área achurada de la Figura 4.7d, para así evitar el “slack”.

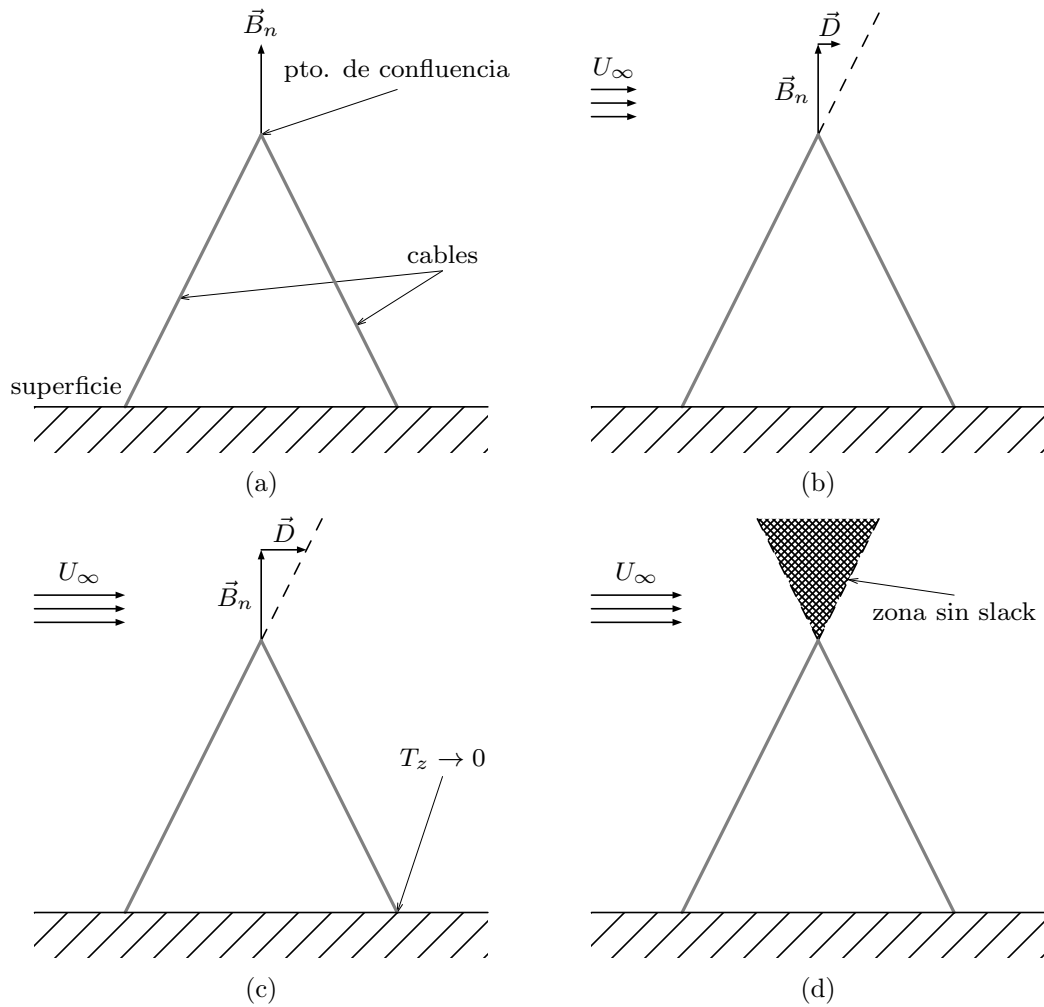


Figura 4.7: Representación en 2D del rango de operación del sistema de globo cautivo.

En el modelo idealizado de la estructura flexible, la posición del punto de confluencia en su estado de equilibrio, queda determinada por las características físicas, tensión y perfil geométrico de las líneas de anclaje, y la magnitud de la velocidad del viento. Descartando las simplificaciones del ejemplo de la Figura 4.7, un modelo realístico del sistema debe considerar los siguientes factores:

- Al menos 3 líneas de anclaje para mantener control sobre la posición de la carga en tres dimensiones.
- Sistema de coordenadas georreferenciadas en tres dimensiones.
- Las propiedades mecánicas (densidad, elasticidad, amortiguamiento y coef. de arraste) de los cables.

- Variación de las características atmosféricas (densidad, velocidad y dirección del viento) en función de la altitud.
- Las fuerzas aerodinámicas resultantes sobre el aerostato y la estructura de tensión.
- Variación de la fuerza de empuje debido a la pérdida de gas de relleno y cambios de volumen.

La estructura de un sistema de globo cautivo de triple-anclaje (“tri-tethered”) como el de la Figura 4.8b, se compone de tres líneas de anclaje, unidas por su extremo superior al punto de confluencia (cp), y un cable denominado correa que separa al punto de confluencia del punto de acoplamiento del aerostato (ap).

La longitud de la correa sin tensión L_0^l debe escogerse *a priori*, y su longitud óptima debe ser analizada. Existen dos razones para utilizar una correa: amortigua la transmisión del movimiento del aerostato al punto de confluencia y mejora la estabilidad del aerostato. Sin embargo una correa muy larga incrementará el arrastre aerodinámico en la estructura.

Para la disposición espacial de los puntos de anclaje se decide ubicarlos de manera equidistante a lo largo de una circunferencia de radio l , como se observa en la Figura 4.8a. El punto de confluencia se ubica a una altura h al centro de la circunferencia circunscrita por los anclajes, y la razón óptima entre h/l debe analizarse, ya que al aumentar esta disminuye el peso total de la estructura de tensión, aumentando así la capacidad de carga, pero también se ve disminuida su resistencia al desplazamiento frente a fuerzas horizontales.

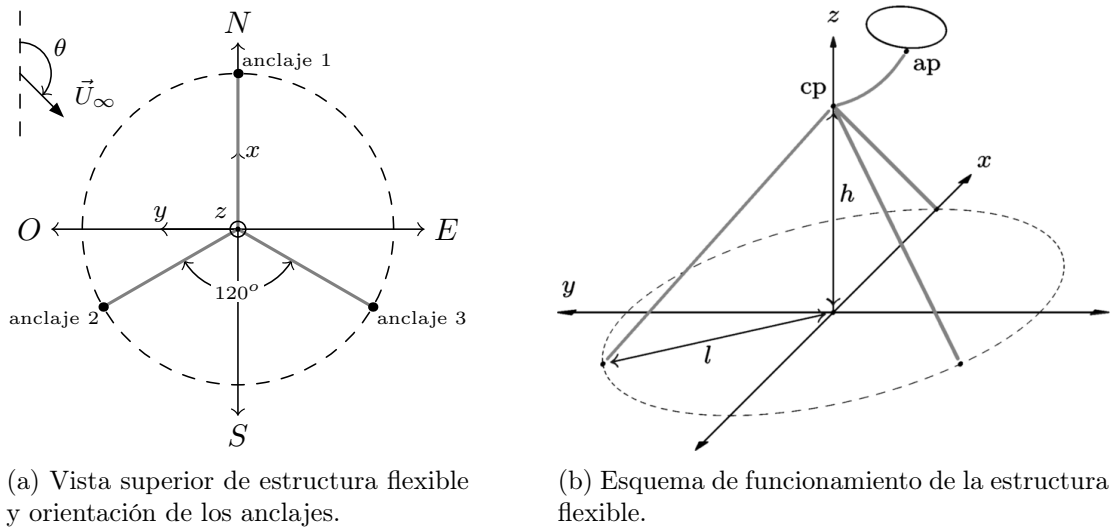


Figura 4.8: Configuración de sistema de globo cautivo de triple anclaje.

Cuando la estructura flexible alcanza su estado de equilibrio la suma de las fuerzas sobre el punto de confluencia debe anularse. Las fuerzas que se ejercen sobre este punto, ver Figura 4.9, corresponden a las tensiones de las líneas de anclaje y de la correa.

$$\sum \vec{F}_{cp} = 0 : \quad \vec{T}^1 + \vec{T}^2 + \vec{T}^3 + \vec{T}^l = 0 \quad (4.74)$$

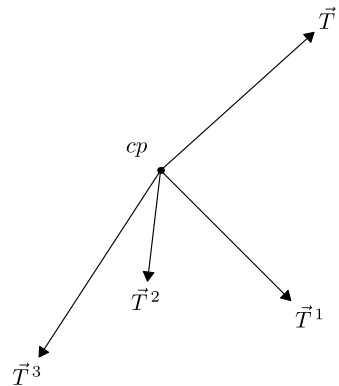


Figura 4.9: Equilibrio de fuerzas en el punto de acoplamiento de SGC triple-anclaje.

La correa acoplada al aerostato se comporta como un SGC simple con un extremo fijo al punto de confluencia, por lo tanto, la posición del punto de acoplamiento (x_{ap}, y_{ap}, z_{ap}) y la tensión de la correa en el punto de confluencia \vec{T}^l se obtienen mediante la solución estática del perfil de la correa.

$$\sum \vec{F}_{aero} = 0 : \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_{ap} = D (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) + (B_n + L) \hat{k} \quad (4.75)$$

$$\sum \vec{F}_{correa} = 0 : \quad \Rightarrow \quad \vec{T}^l = \vec{T}_{ap} + \vec{R}^l - \lambda_t L_0^l \quad (4.76)$$

Donde θ es el ángulo de la dirección del viento en el plano horizontal. En el caso de no utilizar un cable correa para el aerostato, la tensión del aerostato \vec{T}_{ap} se aplica directamente en el punto de confluencia.

Al aplicar la condición de equilibrio a la estructura de tensión y describir las tensiones de los puntos de anclaje \vec{T}_w^i , utilizando los ángulos β_i y Γ_i para describir sus direcciones principales, se obtiene una expresión para las tensiones de las líneas de anclaje en el punto de confluencia.

$$\sum \vec{F}_{cable\ i} = 0 : \quad \Rightarrow \quad \vec{T}^i = \vec{T}_w^i + \vec{R}^i - \lambda_t L_0^i \quad (4.77)$$

$$\vec{T}_w^i = -T_w^i \left(\cos \Gamma_i \cos \beta_i \hat{i} + \cos \Gamma_i \sin \beta_i \hat{j} + \sin \Gamma_i \hat{k} \right) \quad (4.78)$$

Finalmente al reemplazar las tensiones de los cables en la ecuación (4.74) se obtiene el siguiente sistema de equilibrio para las tensiones en los puntos de anclaje de un SGC triple-anclaje:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{T}_w^i \cos \Gamma_i \cos \beta_i = T_x^l + \sum_{i=1}^3 R_x^i \quad (4.79)$$

$$\sum_{i=1}^3 \vec{T}_w^i \cos \Gamma_i \sin \beta_i = T_y^l + \sum_{i=1}^3 R_y^i \quad (4.80)$$

$$\sum_{i=1}^3 \vec{T}_w^i \sin \Gamma_i = T_z^l + \sum_{i=1}^3 (R_z^i - \lambda_t L_0^i) \quad (4.81)$$

Si todas las líneas de anclaje están tensionadas, la capacidad de carga m_p de la estructura en el punto de confluencia se calcula a través de la suma de las componentes verticales de la tensión en cada punto de anclaje.

$$\text{Si} \quad \Gamma_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.82)$$

$$\Rightarrow \quad m_p = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^3 T_w^i \sin \Gamma_i \quad (4.83)$$

La pérdida de rigidez de la estructura de tensión de tres cables se generará cuando $\Gamma \rightarrow 0$ para la tensión en uno de los anclajes. Para el caso sin viento, dada la disposición

equidistante de los puntos de anclaje, la tensión de la correa se reparte equitativamente entre las tres líneas de anclaje, por lo tanto todas entran en “slack” al mismo tiempo y entonces la mínima capacidad de carga se calcula como la diferencia entre la tensión del aerostato y el peso de la estructura.

$$m_p^* = \frac{B_n - \lambda_t \left(L_0^l + \sum_{i=1}^3 L_0^i \right)}{g} \quad (4.84)$$

La condición de “slack” para el caso con viento puede analizarse al escoger una dirección desfavorable del viento y aumentar la velocidad hasta que se cumpla que $\Gamma_i \rightarrow 0$ en (4.81) para alguna línea de anclaje. En el caso de dirección del viento en el sentido de x positivo ($\theta = 0$), dada la disposición de los anclajes, puede generar que el cable 1 entre en “slack”. El mismo análisis puede realizarse para la condición de “slack” del cable 2 ($\theta = 2\pi/3$) y del cable 3 ($\theta = -2\pi/3$).

Al despejar B_n de la ecuación (4.84) se pueden conocer las dimensiones del aerostato y calcular el perfil estático de la estructura flexible. Sin embargo las longitudes iniciales de cada cable L_0^i se desconocen, por lo tanto, se realiza una primera estimación del perfil de las líneas de anclaje sin incluir la influencia del viento sobre estas, es decir, con un perfil de catenaria elástica.

La estimación de las tensiones en los anclajes y la longitud inicial de cada cable, considerando un “layout” como el de la Figura 4.8a, se obtiene al resolver el sistema equilibrio (4.79-4.81) con $\vec{R}^i \rightarrow 0$.

$$\beta_i = \frac{2\pi}{3}(i-1) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.85)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Gamma_1 & -\frac{1}{2} \cos \Gamma_2 & -\frac{1}{2} \cos \Gamma_3 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \Gamma_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \Gamma_3 \\ \sin \Gamma_1 & \sin \Gamma_2 & \sin \Gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_w^{*1} \\ T_w^{*2} \\ T_w^{*3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x^l \\ T_y^l \\ T_z^l - \sum_{i=1}^3 \lambda_t L_0^i \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Entonces para cada cable se tienen 3 incógnitas: T_w^{*i} , Γ_i y L_0^i . El sistema de equilibrio (4.86) entrega 3 ecuaciones, y de las ecuaciones de catenaria elástica (3.66) y (3.67) para cada cable, se obtienen las 6 ecuaciones restantes que definen un sistema no-lineal de 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Para ello se utilizan las ecuaciones (4.87) que relacionan las componentes horizontal H_i y vertical V_i , de la tensión de los cables en el punto de

anclaje, con T_w^{*i} y Γ_i .

$$T_w^{*i} = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \tan \Gamma_i = \frac{V_i}{H_i} \quad (4.87)$$

El sistema 9x9 se resuelve numéricamente con el método de Newton-Raphson y necesita una aproximación inicial cercana a la solución para asegurar la convergencia del método, por lo tanto, en primer lugar se consideran el perfil de cada cable como una línea recta entre el punto de confluencia y el punto de anclaje correspondiente. La tensión de cada cable en el punto de confluencia se calculan al del siguiente sistema:

$$\tan(\Gamma_i) = \frac{h}{l} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.88)$$

$$\frac{1}{\sqrt{l^2 + h^2}} \begin{bmatrix} l & -\frac{l}{2} & -\frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l\sqrt{3}}{2} & -\frac{l\sqrt{3}}{2} \\ -h & -h & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{*1} \\ T^{*2} \\ T^{*3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x^l \\ T_y^l \\ T_z^l \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Donde l y h corresponden a las distancias señaladas en la Figura 4.8b. Luego de resolver (4.89), la aproximación inicial de las variables de cada línea de anclaje, para resolver el sistema no lineal, quedan de la forma:

$$L_0^i = 0,99\sqrt{l^2 + h^2} \quad (4.90)$$

$$H_i = T^{*i} \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} \quad (4.91)$$

$$V_i = T^{*i} \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} - \lambda_t L_0^i \quad (4.92)$$

Cuando se resuelve el sistema para los perfiles de catenaria elástica de las líneas de anclaje, se utilizan las longitudes sin deformar de cada cable en la ecuación (4.93) para calcular el valor de la cuerda c y dimensionar el aerostato en una primera instancia.

$$V_{env}(c) (\rho_\infty - \rho_{gas}) - S_{env}(c) \rho_{env} = m_p^* + \frac{\lambda_t}{g} \left(L_0^l + \sum_{i=1}^3 L_0^i \right) \quad (4.93)$$

A partir del perfil de catenaria elástica para cada línea de anclaje, se calcula el perfil estático de cada cable comenzando por el punto de confluencia, verificando que el extremo inferior coincida con el punto de anclaje correspondiente. Cuando se resuelve el perfil estático de cada línea de anclaje, se verifica que se cumpla la condición de equilibrio en el punto de confluencia.

Al utilizar las longitudes iniciales calculadas con perfil de catenaria elástica, en un primer cálculo lo más probable es que no se cumpla la condición dada por la

ecuación (4.74), debido a esto el sistema debe resolverse iterativamente, modificando L_0^i hasta cumplir la condición de equilibrio. Luego se obtiene la solución estática del SGC triple-anclaje, si es necesario se puede dimensionar nuevamente el aerostato considerando las nuevas longitudes sin deformación de cada cable.

A continuación se detallan los algoritmos desarrollados para la aplicación del modelo de globo cautivo simple a un perfil de una línea de anclaje y un perfil de tres líneas de anclaje más correa. Los datos de entrada para que el problema de SGC quede bien definido son los siguientes:

1. Parámetros de aerostato:

- ρ_{env} : Densidad superficial del envoltorio del aerostato en $[kg/m^2]$.
- ρ_{gas} : Densidad volumétrica del gas de relleno del envoltorio del aerostato en $[kg/m^3]$.
- α^* : Ángulo de ataque del aerostato para la condición sin viento.
- z^* : Distancia vertical entre el punto de acoplamiento y el centro de masa del aerostato para la condición sin viento en $[m]$.
- Ecuaciones parametrizadas para la forma geométrica del envoltorio del aerostato.

2. Parámetros de cables:

- n : Número de segmentos que discretizan el cable.
- d_t : Diámetro de la sección transversal del cable mecánico sin tensión en $[m]$.
- ρ_t : Densidad volumétrica del material con el que se construye el cable mecánico en $[kg/m^3]$.
- E : Módulo de elasticidad del material con el que se construye el cable mecánico en $[GPa]$.
- C_{DN} : Coeficiente de arrastre normal a la dirección longitudinal del cable mecánico.

3. Parámetros de viento:

- U_∞ : Magnitud de la velocidad horizontal promedio del viento a la altura de interés en $[m/s]$.
- θ : Ángulo de la dirección de la dirección del viento en el plano horizontal.

- ρ_∞ : Densidad volúmetrica del campo de flujo atmosférico a la altura de interés en $[kg/m^3]$.
- μ_∞ : Viscosidad dinámica del campo de flujo atmosférico a la altura de interés en $[Pa \cdot s]$.

4.4.1. SGC simple

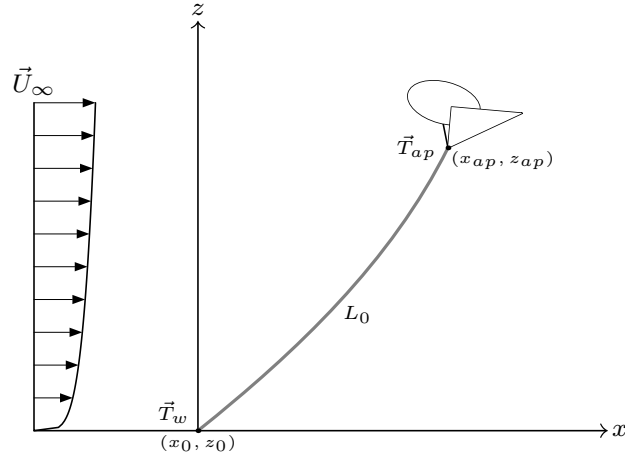


Figura 4.10: Sistema de referencias para problema de SGC simple.

Para el SGC simple se utiliza el sistema de referencia de la Figura 4.10, ubicando el origen del sistema de coordenadas cartesianas en el punto de anclaje y siendo el eje horizontal paralelo a la dirección del viento. En la Figura 4.11 se muestra un diagrama de flujo del algoritmo y sus pasos se detallan a continuación.

1. Inicializa los datos de entrada:
 - Altura de operación del ap: h en $[m]$.
 - Mínima capacidad de carga: m_p^* en $[kg]$.
2. Dimensionamiento del aerostato:
 - a) Estima la longitud inicial del cable: $L_0 = 0,99 h$.
 - b) Calcula B_n de la ecuación (4.69).
 - c) Resuelve la ecuación (4.73) y calcula c .
 - d) Computa las dimensiones físicas del aerostato V_{env} , S_{env} y A_{env} .
3. Estimación de perfil sin viento de la línea de anclaje:
 - a) Calcula z_{ap}^* de la ecuación (4.63).

- b) Calcula T_{ap} de la ecuación (4.59) a la altura z_{ap}^* .
 - c) Con $\vec{R} = 0$ calcula T_w de la ecuación (4.61) y Γ de la ecuación (4.62).
 - d) Calcula z_{ap} con las ecuaciones (4.64) y (3.67).
 - e) Verifica $|z_{ap} - z_{ap}^*| \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $z_{ap}^* = z_{ap}$ y vuelve a 3.b).
 - f) Calcula x_{ap} con las ecuaciones (4.64) y (3.66).
 - g) Define la posición del ap : (x_{ap}, z_{ap}) .
4. Cálculo del perfil estático de la línea de anclaje:
- a) Discretiza el largo del cable en n segmentos iguales.
 - b) Calcula T_{ap} de la ecuación (4.59) a la altura z_{ap} .
 - c) Resuelve el sistema (4.18-4.22) para cada segmento del cable comenzando por el ap .
 - d) Computa la posición del último nodo (x_0, z_0) .
 - e) Verifica $\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \leq \varepsilon$, si no cumple modifica la posición del ap : $(x_{ap} + \Delta x, z_{ap} + \Delta z)$ y vuelve a 4.b).
5. Aplicación de las condiciones de borde:
- a) Verifica $|h - z_{ap}| \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $L_0 = L_0 + \Delta L_0$ y vuelve a 4.a).
 - b) Calcula m_p con la ecuación (4.67).
 - c) Opcional: verifica $m_p \geq m_p^*$, si no cumple modifica $B_n = B_n + \Delta B_n$ y vuelve a 2.c).
6. Solución estática de SGC simple

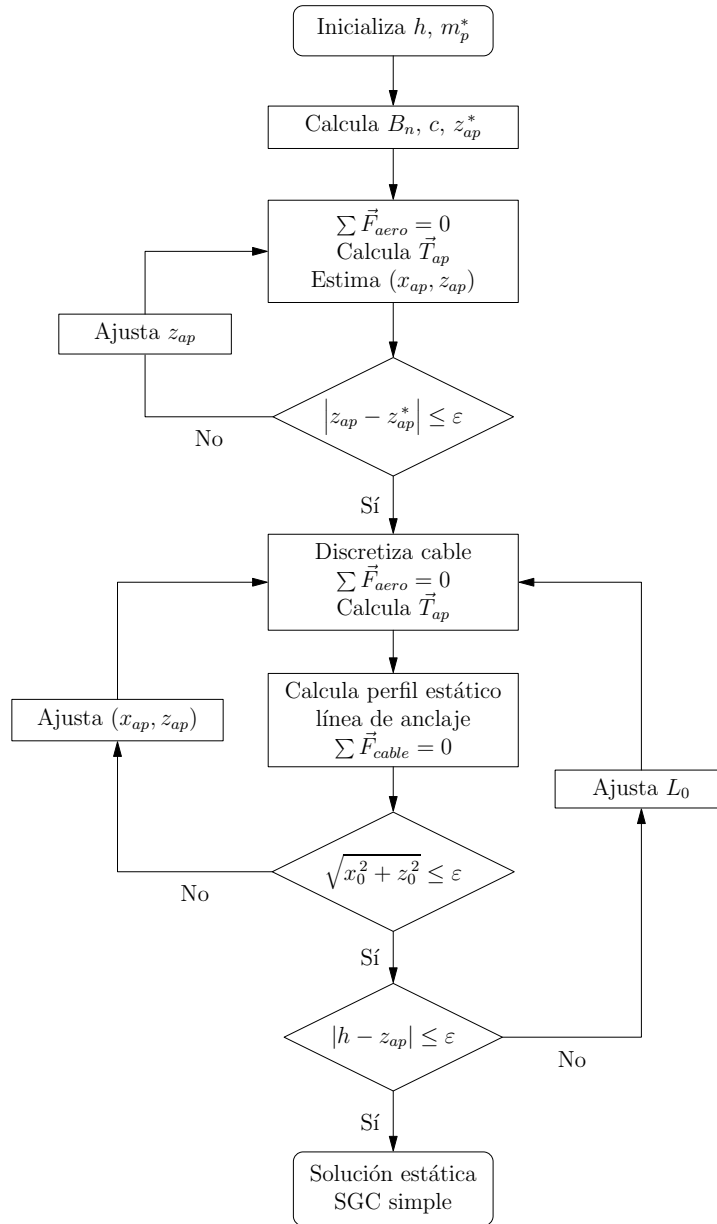


Figura 4.11: Diagrama de flujo de solución estática de SGC simple

4.4.2. SGC triple-anclaje

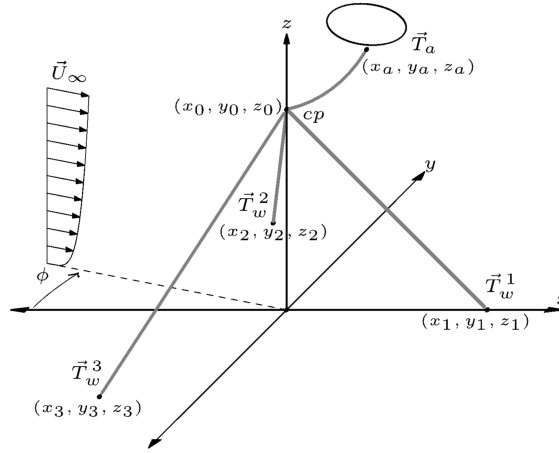


Figura 4.12: Sistema de referencias para problema de SGC triple-anclaje.

Para el SGC triple anclaje se utiliza el sistema de referencia de la Figura 4.12, cuyo origen del sistema de coordenadas georreferenciadas se ubica en el centro de la circunferencia que circunscribe a los tres puntos de anclaje a nivel del suelo. En la Figura 4.13 se muestra un diagrama de flujo del algoritmo y sus pasos se detallan a continuación.

1. Inicializa los datos de entrada:
 - Altura de operación del cp : h en $[m]$.
 - Radio de circunferencia pto. de anclaje: l en $[m]$.
 - Longitud inicial de correa: L_0^l en $[m]$.
 - Mínima capacidad de carga: m_p^* en $[kg]$.
2. Dimensionamiento del aerostato:
 - a) Estima las longitudes iniciales de las líneas de anclaje: $L_0^i = 0,99\sqrt{l^2 + h^2}$.
 - b) Calcula B_n de la ecuación (4.84).
 - c) Resuelve la ecuación (4.93) y calcula c .
 - d) Computa las dimensiones físicas del aerostato V_{env} , S_{env} y A_{env} .
3. Cálculo del perfil estático de la correa:
 - a) Calcula z^* con la ecuación (4.63).
 - b) Calcula T_{ap} de la ecuación (4.75) a la altura $z^* + h$.

- c) Con $\vec{R}^l = 0$ calcula \vec{T}^l de la ecuación (4.76).
 - d) Calcula z con las ecuaciones (4.64) y (3.67).
 - e) Verifica $z - z^* \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $z^* = z$ y vuelve a 3.b).
 - f) Calcula x con las ecuaciones (4.64) y (3.66).
 - g) Define la posición del *ap*: $(x \cos \theta, -x \sin \theta, h + z)$.
 - h) Discretiza el largo de la correa en n segmentos iguales.
 - i) Calcula T_{ap} de la ecuación (4.75) a la altura z_{ap} .
 - j) Resuelve el sistema (4.18-4.22) para cada segmento de la correa comenzando por el *ap*.
 - k) Computa la posición del último nodo (x_0, y_0, z_0) .
 - l) Verifica $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (h - z_0)^w} \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $(x_{ap} + \Delta x, y_{ap} + \Delta y, z_{ap} + \Delta z)$ y vuelve a 3.i).
4. Estimación de perfil sin viento de la estructura de tensión:
- a) Computa T^l del perfil estático de la correa.
 - b) Resuelve el sistema (4.89) para T_w^{*1} , T_w^{*2} y T_w^{*3} .
 - c) Calcula H_i de la ecuación (4.91) y V_i de la ecuación (4.92), para cada cable.
 - d) Resuelve el sistema (4.86), (3.66) y (3.67) para H_i, V_i, L_0^i de cada cable.
 - e) Calcula T_w^{*i} y Γ_i de la ecuación (4.87), para cada cable.
 - f) Calcula \vec{T}^i de la ecuación (4.77) con $\vec{R}^i = 0$.
5. Cálculo de perfil estático de la estructura de tensión:
- a) Discretiza el largo de cada cable en n segmentos iguales.
 - b) Resuelve el sistema (4.18-4.22) para cada segmento del cable comenzando por el *cp*.
 - c) Computa la posición del último nodo (x_i, y_i, z_i) .
 - d) Verifica $\sqrt{(l \cos \beta_i - x_i)^2 + (l \sin \beta_i - x_i)^2 + z_0^2} \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $\vec{T}^i = \vec{T}^i + \Delta \vec{T}^i$ y vuelve al paso 5.b).
6. Aplicación de las condiciones de borde:
- a) Verifica $\sum \vec{F}_{cp} \leq \varepsilon$, si no cumple modifica $L_0^i = L_0^i + \Delta L_0^i$ y vuelve a 5.a).
 - b) Calcula m_p con la ecuación (4.83).
 - c) Opcional: verifica $m_p \geq m_p^*$, si no cumple modifica $B_n = B_n + \Delta B_n$ y vuelve a 2.c).
7. Solución estática de SGC triple-anclaje

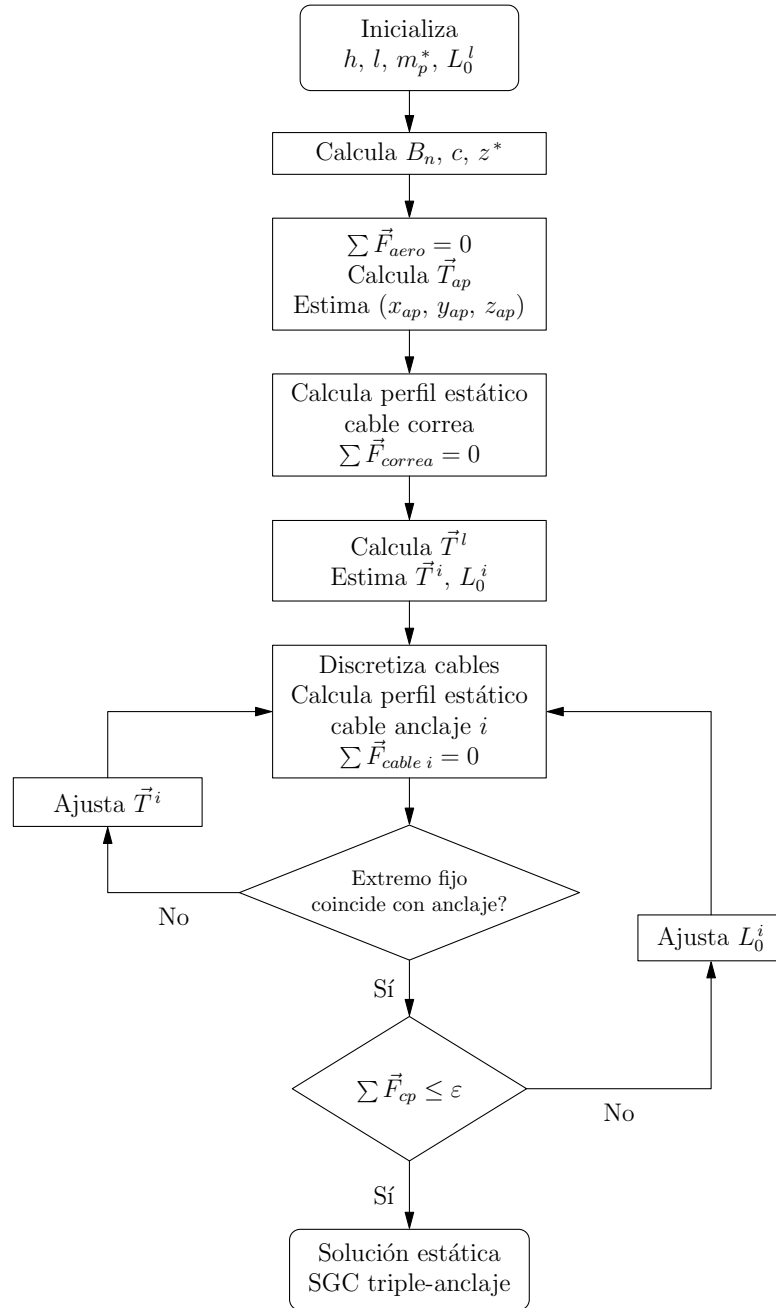


Figura 4.13: Diagrama de flujo de solución estática de SGC multi-anclaje.

4.5. Recursos para la investigación

Los recursos de “hardware” utilizados son los obtenidos para el proyecto FONDEF ID16I10105. Las simulaciones numéricas se realizan un servidor con las siguientes características:

- Servidor HPE Proliant ML150 Gen9 E5-2609v4 (formato Torre)
- 4 Procesadores Intel Xeon E5-2609v4 (c/u con 1,7 GHz, 20 MB caché L3, 8-Core)
- 64 GB de memoria DDR4 2133 MHz ECC (ampliable a 512 GB)
- 4 bahías SATA/SAS Hot-Plug 3,5”, ampliable a 8
- 2 discos HPE SATA 1TB 7.2K 6G 3.5”
- Controlador SATA B140i. RAID 0, 1, 1+0, 5
- 2 Puertos Ethernet 10/100/1000
- Fuente de poder 900w redundante

Los “software” utilizados son programas de código abierto. En las simulaciones de dinámica de fluidos computacional se utiliza *OpenFOAM 2.3.1*, y para crear las mallas se utiliza la aplicación *SnappyHexMesh*, creando las superficies de los aerostatos en *gmsh 2.10.1*. Por último, para la visualización de los datos se utiliza el programa *gnuplot 5.0*.

Capítulo 5

Solución Estática de la Estructura Flexible de un Sistema de Globo Cautivo

En primer lugar se calcula el rango dentro del que se mueven los parámetros adimensionales relevantes para el estado de equilibrio del SGC: el número de Reynolds con respecto a la cuerda y el número de Mach.

Si se considera un aerostato cuya longitud de cuerda c es de un orden de magnitud de ≈ 10 [m], utilizando los valores de la atmósfera a nivel del mar de la Tabla 4.1, dentro de un rango de velocidades de $1 - 15$ [m/s] se tiene que los parámetros de similitud están dentro de los siguientes rangos:

$$0,00294 < Ma < 0,0441$$
$$6,85 \cdot 10^5 < Re_c < 1,03 \cdot 10^7$$

De acuerdo al resultado anterior, y considerando una altura de operación no mayor a 100 [m], se aplican las siguientes simplificaciones al modelo de viento al momento de realizar los cálculos:

- El flujo puede considerarse incompresible, ya que se cumple $Ma < 0,3$, y por lo tanto la densidad se mantiene constante.
- Para velocidades de viento menores a 2 [m/s] el flujo se encuentra en transición a la turbulencia, mientras que para el resto de las velocidades se tiene flujo turbulento completamente desarrollado.

- En la condición estacionaria se anula la componente turbulenta de la velocidad del viento, por lo que se trabaja solo con valores de velocidad promedio.

El uso del método de elementos finitos para la estructura flexible, permite incorporar fácilmente perfiles de velocidad horizontal promedio del viento U_∞ , presión p_∞ , densidad ρ_∞ y viscosidad ν_∞ en función de la altitud, en el cálculo de las fuerzas aerodinámicas. Sin embargo para las simulaciones realizadas se utiliza un perfil uniforme para la velocidad del viento y los valores de atmósfera estándar para el resto de los parámetros, con el fin de simplificar la comparación de los resultados obtenidos.

5.1. Funciones de geometría del envoltorio

Para comparar el efecto del cambio, de la geometría del envoltorio del aerostato en el rendimiento del sistema, se estudiaron 5 formas distintas de globos:

- *Globo esférico*: Figura geométrica más simple y altamente estudiada, se utiliza como “benchmark” para el análisis de sensibilidad de malla.
- *Globo cilíndrico*: Forma de esfera alargada, propuesto para ensayos de laboratorio.
- *Globo ovoidal*: Forma de esférica en el borde de ataque, con disminución de diámetro a lo largo del borde de salida, propuesto para ensayos de laboratorio.
- *Globo NPL*: Diseño de aerostato de gran altitud, creado por *National Physical Laboratory* (UK).
- *Globo GNVR*: Diseño de aerostato de gran altitud, creado por *National Aerospace Laboratories* (India).

Dado que las formas del envoltorio del aerostato corresponden a sólidos de revolución, se parametrizan sus dimensiones físicas utilizando el largo de cuerda del aerostato como longitud característica, para describir las funciones que definen su geometría.

5.1.1. Geometría de globo esférico

Para la geometría esférica, la cuerda equivale al diámetro de la esfera, por lo tanto, las funciones de sus parámetros geométricos son conocidas y se entregan a continuación:

- Área frontal:

$$A = \frac{1}{4}\pi \cdot c^2$$

- Superficie total:

$$S = \pi \cdot c^2$$

- Volumen:

$$V = \frac{1}{6}\pi \cdot c^3$$

El centro de masa se y de flotación se asume en el centro de la esfera del globo.

5.1.2. Geometría de globo cilíndrico

La geometría cilíndrica, ver Figura 5.1, está conformada por dos arcos de circunferencia en cada extremo de la cuerda, y se genera a partir de la revolución con respecto al eje x de la función (5.1), cuyos parámetros geométricos en función de la longitud de su cuerda c se entregan en la Tabla 5.1.

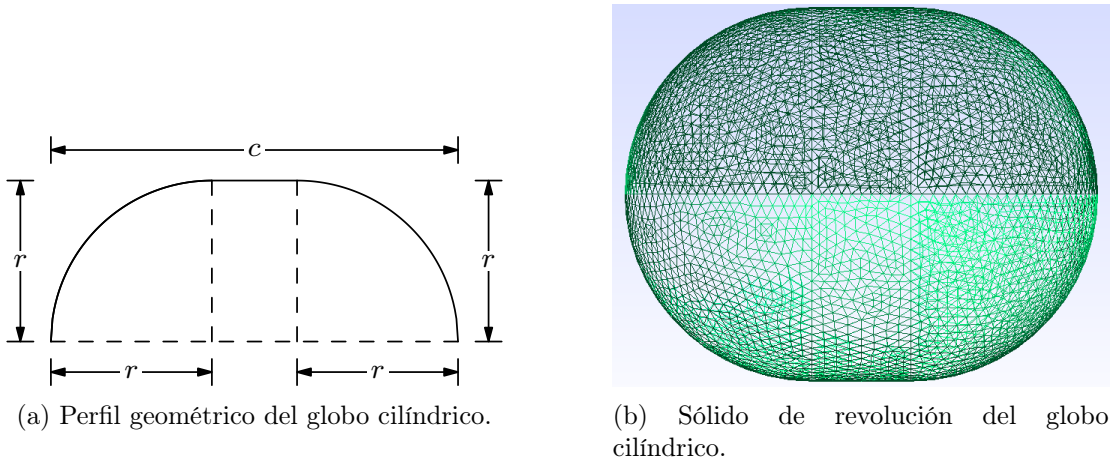


Figura 5.1: Envoltorio de aerostato de globo cilíndrico.

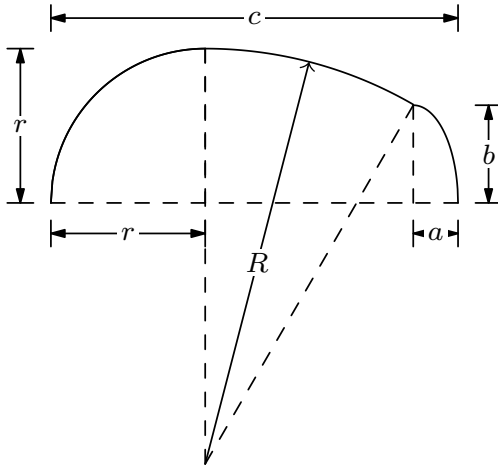
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - (x - r)^2} & \text{con } 0 \leq x < r \\ r & : r \leq x < (c - r) \\ \sqrt{r^2 - (x - (c - r))^2} & \text{con } (c - r) \leq x \leq c \end{cases} \quad (5.1)$$

Tabla 5.1: Parámetros geométricos del aerostato de forma cilíndrica.

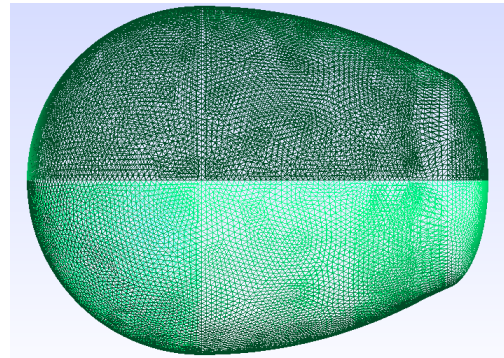
Símbolo	Función	Descripción
r	$0,3954 \cdot c$	Radio de arcos de circunferencia
\bar{x}	$0,5 \cdot c$	Posición del centro de masa respecto al borde de ataque
S	$2,06276 \cdot c^2$	Superficie del sólido de revolución
A	$0,49116 \cdot c^2$	Área frontal del sólido de revolución
V	$0,36169 \cdot c^3$	Volumen del sólido de revolución

5.1.3. Geometría de globo ovoidal

La geometría ovoidal, ver Figura 5.2, está conformada a lo largo de su cuerda por un arco de circunferencia, luego cambia a un arco de circunferencia con un radio mayor y termina con un perfil elíptico en el borde de salida; y es generada a partir de la revolución con respecto al eje x de la función (5.2), cuyos parámetros geométricos en función de la longitud de su cuerda c se entregan en la Tabla 5.2.



(a) Perfil geométrico del globo ovoidal.



(b) Sólido de revolución del globo ovoidal.

Figura 5.2: Envoltorio de aerostato de globo ovoidal.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - (x - r)^2} & \text{con } 0 \leq x < r \\ \sqrt{R^2 - (x - r)^2} - (R - r) & \text{con } r \leq x < (c - a) \\ b\sqrt{1 - \left(\frac{x - (c - a)}{a}\right)^2} & \text{con } (c - a) \leq x \leq c \end{cases} \quad (5.2)$$

Tabla 5.2: Parámetros geométricos del aerostato de forma ovoidal.

Símbolo	Función	Descripción
r	$0,378958 \cdot c$	Radio del primer arco de circunferencia
R	$1,01898 \cdot c$	Radio del segundo arco de circunferencia
a	$0,100213 \cdot c$	Semieje menor del arco de elipse
b	$0,235796 \cdot c$	Semieje mayor del arco de elipse
\bar{x}	$0,4815 \cdot c$	Posición del centro de masa respecto al borde de ataque
S	$1,91392 \cdot c^2$	Superficie del sólido de revolución
A	$0,451162 \cdot c^2$	Área frontal del sólido de revolución
V	$0,309638 \cdot c^3$	Volumen del sólido de revolución

5.1.4. Geometría de globo NPL

La geometría del globo NPL, ver Figura 5.3, es un diseño aerodinámico altamente estable creado para operaciones de gran altitud. Se genera a partir de la revolución con respecto al eje x de la función (5.3), cuyos parámetros geométricos en función de la longitud de su cuerda c se entrega en la Tabla 5.3.

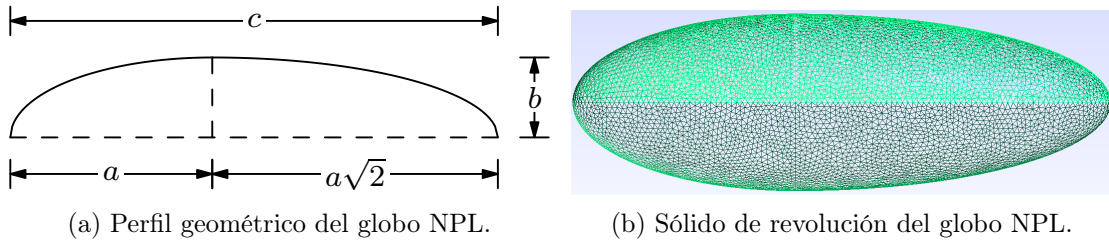


Figura 5.3: Envoltorio de aerostato de globo NPL.

$$f(x) = \begin{cases} b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} & \text{con } -a \leq x < 0 \\ b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2} & \text{con } 0 \leq x < a\sqrt{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

Tabla 5.3: Parámetros geométricos del aerostato NPL.

Símbolo	Función	Descripción
a	$0,414214 \cdot c$	Semieje mayor del arco de elipse
b	$0,163934 \cdot c$	Semieje menor del arco de elipse
\bar{x}	$0,478553 \cdot c$	Posición del centro de masa respecto al borde de ataque
S	$0,898586 \cdot c^2$	Superficie del sólido de revolución
A	$0,0844287 \cdot c^2$	Área frontal del sólido de revolución
V	$0,0562858 \cdot c^3$	Volumen del sólido de revolución

5.1.5. Geometría de globo GNVR

La geometría del globo GNVR, ver Figura 5.4, es un diseño aerodinámico altamente estable más reciente que el NPL. Se genera a partir de la revolución con respecto al eje x de la función (5.4), cuyos parámetros geométricos en función de la longitud de su cuerda c se entrega en la Tabla 5.4.

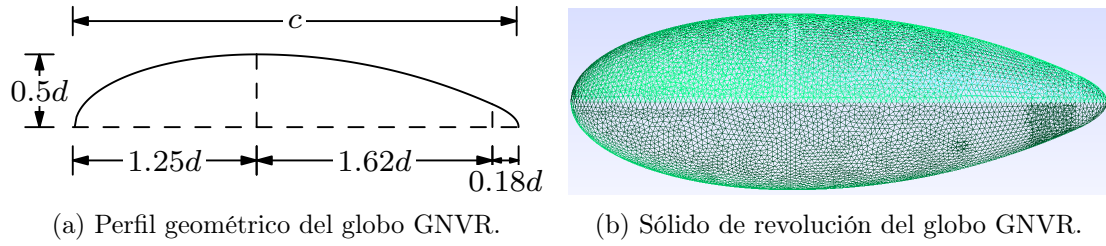


Figura 5.4: Envoltorio de aerostato de globo GNVR.

$$f(x) = \begin{cases} 0,5d \sqrt{1 - \left(\frac{x}{1,25d}\right)^2} & \text{con } -1,25d \leq x < 0 \\ -3,5d + \sqrt{16d^2 - x^2} & \text{con } 0 \leq x < 1,62d \\ \sqrt{0,1374d(1,8d - x)} & \text{con } 1,62d \leq x \leq 1,8d \end{cases} \quad (5.4)$$

Tabla 5.4: Parámetros geométricos del aerostato GNVR.

Símbolo	Función	Descripción
d	$0,327869 \cdot c$	Diámetro mayor del sólido de revolución
\bar{x}	$0,4536 \cdot c$	Posición del centro de masa respecto al borde de ataque
S	$0,84843 \cdot c^2$	Superficie del sólido de revolución
A	$0,0844287 \cdot c^2$	Área frontal del sólido de revolución
V	$0,0521372 \cdot c^3$	Volumen del sólido de revolución

5.2. Coeficientes aerodinámicos para flujo estacionario

En el caso de que para una forma de envoltorio de globo en particular, sus coeficientes aerodinámicos sean desconocidos, se pueden estimar las curvas en función del ángulo de ataque utilizando CFD, realizando simulaciones transientes de un prototipo de aerostato sumergido en un fluido dinámicamente equivalente al atmosférico.

Para ejemplificar, se procede a estimar el comportamiento aerodinámico de las geometrías propuestas: globo cilíndrico y globo ovoidal, en un flujo en transición a la turbulencia; y para los globos NPL y GNVR considerando distintos niveles de intensidad de turbulencia y velocidades de viento, de flujo turbulento completamente desarrollado.

Las solución de las ecuaciones dinámicas se realizan utilizando un modelo de ecuaciones de Navier-Stokes Reynolds Promediadas (*RANS*), implementadas en el programa de código abierto OpenFOAM. Con un tiempo de simulación suficiente para

alcanzar la solución estacionaria. De los resultados se obtienen valores para C_D , C_L y $C_{M,LE}$. Como parámetro de convergencia de la solución estacionaria se escoge el coeficiente de arrastre.

Se utiliza un modelo de aerostato a escala, cuyo largo de cuerda es 1 [m], inmerso en un flujo dinámicamente similar a la atmósfera. Para cumplir la condición de similaridad, el número de Reynolds y el número de Mach deben ser iguales, tanto para el aerostato simulado como para el aerostato a escala real. Entonces, manteniendo la velocidad del fluido simulado igual a la del viento (para mantener la equivalencia de números de Mach), la viscosidad cinemática del flujo en la simulación se ajusta para igualar los Reynolds.

$$Re_c^{escala} = Re_c^{real} \quad Ma^{escala} = Ma^{real} \quad (5.5)$$

$$\Rightarrow \quad v_\infty^{escala} = \frac{\nu_\infty^{real}}{c^{real}} \quad (5.6)$$

El volumen de control corresponde al prisma rectangular de la Figura 5.5 y sus dimensiones se entregan en función del largo de la cuerda c . La entrada del flujo se localiza en la pared lateral izquierda, mientras que la salida en la pared lateral derecha. El borde de ataque del aerostato se ubica a una distancia de $5c$ de la pared de entrada, en el centro del área transversal al volumen de control.

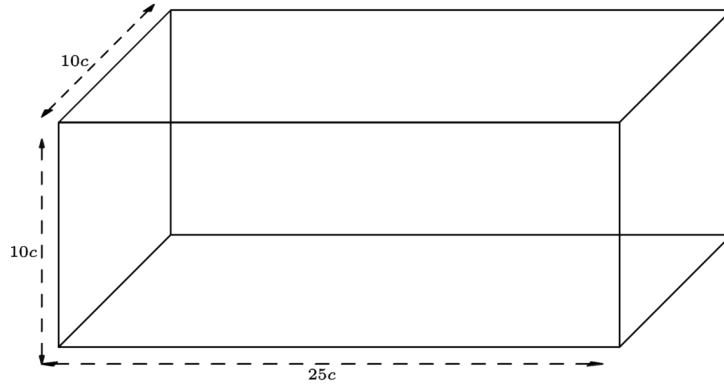


Figura 5.5: Volumen de control de la simulación del flujo sobre el aerostato.

Para el enmallado se utiliza una malla estructurada, con distintos niveles de refinamiento según la zona del volumen de control. El refinamiento más profundo se realiza en la zona de la interfaz del aerostato, donde se desarrolla la capa límite del campo de flujo, y otro nivel de refinamiento para la zona de la estela, que logre captar el desprendimiento de vórtices.

Las condiciones de borde utilizadas, para las paredes del volumen de control, son

las condiciones de corriente libre que dependen del sentido del flujo en cada pared. Si el flujo es saliente, se aplica una condición de gradiente cero (típica para una frontera de salida o “outlet”), mientras que si el flujo es entrante, se aplica una condición de Dirichlet (típica para una frontera de entrada o “inlet”) con el valor de la corriente lejos del aerostato.

El rango de Re_c se encuentra casi en su totalidad dentro de la zona de flujo turbulento, por lo que se decide utilizar el modelo de turbulencia K-Omega SST [7]. Sean U_∞ la magnitud de la velocidad del fluido, y α el ángulo de ataque del aerostato, se tienen los siguientes valores para la velocidad, energía cinética y tasa de disipación de la turbulencia, de la corriente libre, en la frontera del volumen de control.

- Velocidad ambiente:

$$\vec{U}_\infty = U_\infty \cos \alpha \hat{i} + U_\infty \sin \alpha \hat{j} \quad (5.7)$$

- Energía cinética turbulenta:

$$k_\infty = \frac{3}{2} \left(U \cdot \frac{IT}{100} \right)^2 \quad (5.8)$$

Donde IT es el porcentaje de intensidad de turbulencia.

- Tasa de disipación de la turbulencia:

$$w_\infty = 5 \frac{U}{c} \quad (5.9)$$

La condición de borde en la superficie del aerostato, denominada interfaz, es de no deslizamiento y además se utilizan funciones de pared para k y w , por lo que la distancia adimensional y^+ debe mantenerse dentro de la subcapa logarítmica ($300 < y^+ < 3000$).

5.2.1. Análisis de sensibilidad de malla

Para verificar que los resultados obtenidos en las simulaciones son independientes de la malla utilizada, se realiza un análisis de sensibilidad, donde se comparan los resultados del coeficiente de arrastre aerodinámico de un globo de forma esférica de tres niveles de refinamiento de malla, con el valor teórico obtenido por un ajuste de curva sobre resultados empíricos [13] dado en la ecuación (5.10).

La forma esférica se utiliza debido a que está bien estudiada en la literatura y además en su análisis dinámico se aprecia claramente el fenómeno de desprendimiento de capa

límite, el que se espera minimizar en los demás aerostatos. La curva para el C_D en función del número de Reynolds, utilizando como largo de referencia el diámetro de la esfera y válida sólo para $Re < 10^6$, es la siguiente :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{2,6 \left(\frac{Re}{5,0}\right)}{1 + \left(\frac{Re}{5,0}\right)^{1,52}} + \frac{0,411 \left(\frac{Re}{2,63 \cdot 10^5}\right)^{-7,94}}{1 + \left(\frac{Re}{2,63 \cdot 10^5}\right)^{-8,0}} + \frac{0,25 \left(\frac{Re}{10^6}\right)}{1 + \left(\frac{Re}{10^6}\right)} \quad (5.10)$$

Para mayores valores de número de Reynolds se puede utilizar la aproximación $C_D \approx 0,2$. Los valores de los coeficiente de sustentación y momento son nulos, al ser un globo esférico independiente del ángulo de ataque. La intensidad de turbulencia se escoge de acuerdo a las recomendaciones para cálculos de aplicaciones aerodinámicas [34].

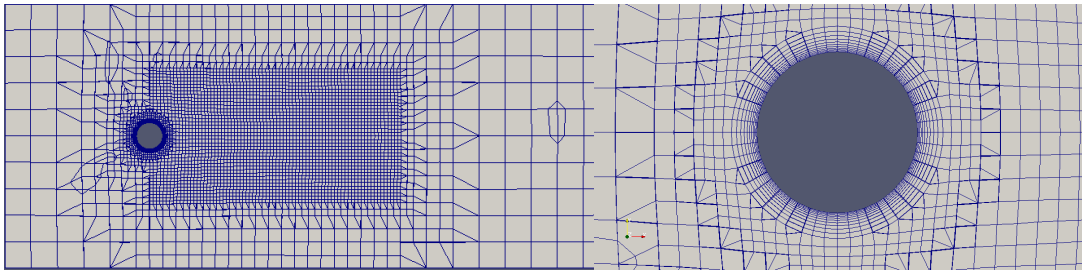
Los parámetros de la simulación se muestran en la Tabla 5.5, y los distintos niveles de refinamiento malla se muestran en las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8.

Tabla 5.5: Parámetros de simulación de globo esférico.

Parámetro	Valor	Unidad
Tiempo simulado	50	[s]
C_o máximo	1,0	[-]
c	1	[m]
A	0,785398	[m ²]
Re_c	10^5	[-]
ρ_∞	1,225	[kg/m ³]
ν_∞	$1 \cdot 10^{-5}$	[m ² /s]
k_∞	$1,5 \cdot 10^{-6}$	[m ² /s ²]
w_∞	5	[s ⁻¹]

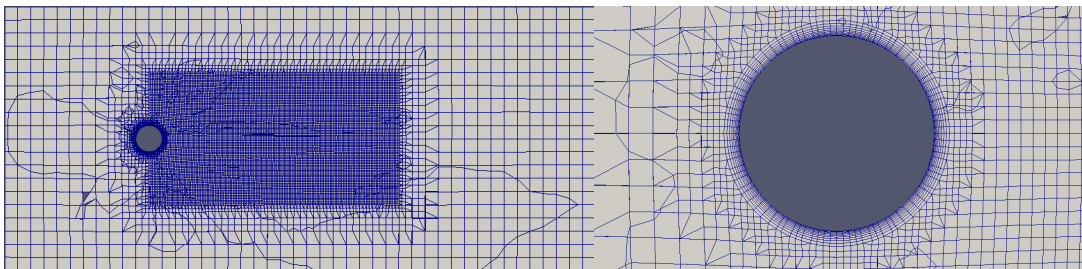
Tabla 5.6: Características de la malla del volumen de control para cada nivel de refinamiento.

Parámetro	Malla L1	Malla L2	Malla L3
Número de celdas	150 466	1 079 579	8 146 015
Altura de celda más cercana a pared [mm]	6,05646	3,02823	1,51411
Máximo “aspect ratio”	6,16436	8,38863	9,77039
Máxima no-ortogonalidad [°]	42,3631	41,7173	39,9846
Máxima “skewness”	0,563366	0,518273	0,629284



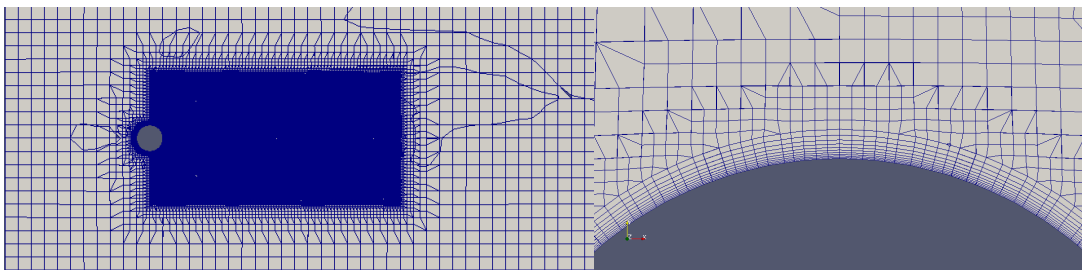
(a) Refinamiento de malla en la zona de la estela. (b) Refinamiento de malla en la zona cercana a la pared.

Figura 5.6: Malla L1



(a) Refinamiento de malla en la zona de la estela. (b) Refinamiento de malla en la zona cercana a la pared.

Figura 5.7: Malla L2



(a) Refinamiento de malla en la zona de la estela. (b) Refinamiento de malla en la zona cercana a la pared.

Figura 5.8: Malla L3

Los resultados obtenidos para el coeficiente de arrastre y su error relativo con respecto al valor teórico se muestran en la Tabla 5.7, en la Figura 5.9 se puede observar que los valores de C_D convergen claramente dentro del tiempo de la simulación.

Se observa que para el nivel de malla más fina (L3) la ganancia en la exactitud del coeficiente de arrastre no es capaz de contrarrestar el aumento del tiempo de ejecución de la simulación, por lo que se decide utilizar el nivel medio de refinamiento (L2).

Tabla 5.7: Resultados de análisis de sensibilidad de malla.

Malla	Coef. de arrastre [-]	Tiempo de ejecución [s]	Error [%]
L1	0,270355	18 948	36,49
L2	0,311369	111 259	26,86
L3	0,324786	1 288 220	23,71

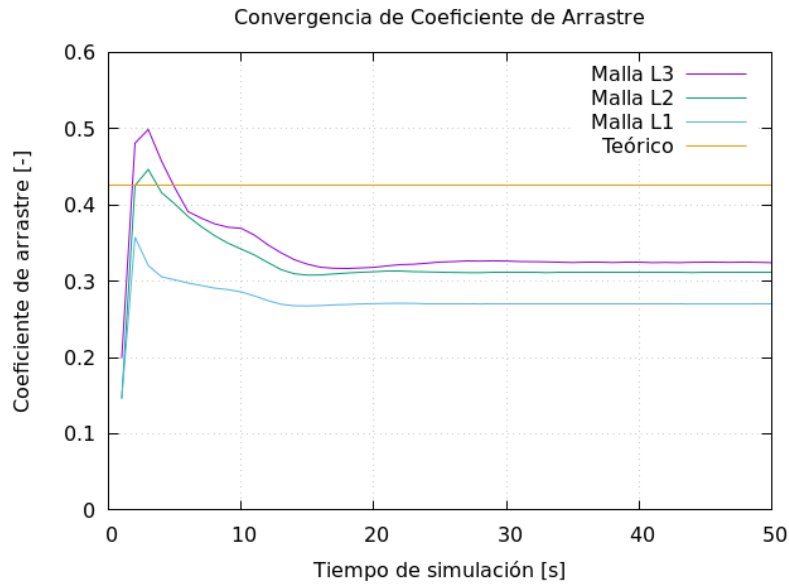


Figura 5.9: Coeficiente de arrastre para cada malla a lo largo de la simulación, comparados con el valor teórico $C_D = 0,425712$ [13].

5.2.2. Simulación de globo cilíndrico

Para determinar las curvas de ajuste para C_L , C_D y $C_{M,\frac{c}{4}}$ de las ecuaciones (4.38-4.40) se realizan 10 simulaciones, para una velocidad de viento de $10 [m/s]$, variando el ángulo de ataque en un rango de $0^\circ - 20^\circ$, midiendo valores de fuerza de arrastre, sustentación y momento aerodinámico. Los parámetros de la geometría y del flujo simulado se entregan la Tabla 5.17.

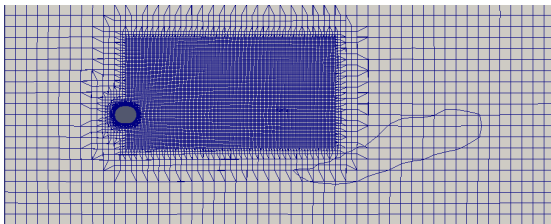
Tabla 5.8: Datos de entrada la simulación del globo cilíndrico.

Parámetro	Valor	Unidad
Tiempo simulado	10	[s]
C_o máximo	0,8	[-]
c	1	[m]
A	0,491160	[m ²]
Re_c	125 746	[-]
ρ_∞	1,225	[kg/m ³]
ν_∞	$79,52548 \cdot 10^{-6}$	[m ² /s]
k_∞	0,375	[m ² /s ²]
ω_∞	50	[s ⁻¹]

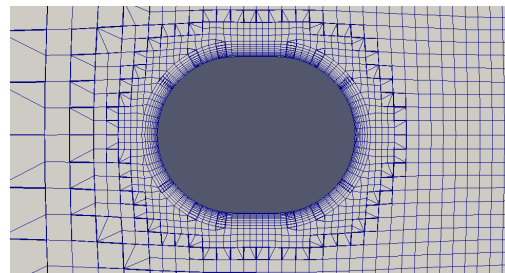
El enmallado del volumen de control se compone de 1 071 674 celdas (1 039 209 hexaedros y 32 051 poliedros), con refinamiento en las cercanías del globo y en la zona de la estela.

Tabla 5.9: Características de la malla del volumen de control para globo cilíndrico.

Parámetro	Valor
Número de celdas	1 071 674
Altura de celda más cercana a pared [mm]	3,02823
Máximo “aspect ratio”	10,4118
Máxima no-ortogonalidad [°]	43,6192
Máxima “skewness”	0,532845



(a) Refinamiento de malla en la zona de la estela.



(b) Refinamiento de malla en la zona cercana a la pared.

Figura 5.10: Malla de globo cilíndrico

Los resultados se muestran en la Tabla 5.10, con el programa Gnuplot se determinan las curvas de ajuste de los coeficientes aerodinámicos de la geometría del globo cilíndrico en función del ángulo de ataque.

$$C_L = 0,0734755 + 1,19278 \alpha \quad (5.11)$$

$$C_D = 0,191579 + 0,832061 \alpha - 0,617022 \alpha^2 \quad (5.12)$$

$$C_{M,\frac{c}{4}} = -0,0212261 - 0,219079 \alpha \quad (5.13)$$

Tabla 5.10: Resultados de simulación para globo cilíndrico.

Parámetro	Valor
Pos. centro aerodinámico	$0,433671 \cdot c$
C_M centro aerodinámico	$-0,00773074$
Ángulo de máximo C_L	14°
Ángulo de C_L nulo	$-3,53^\circ$

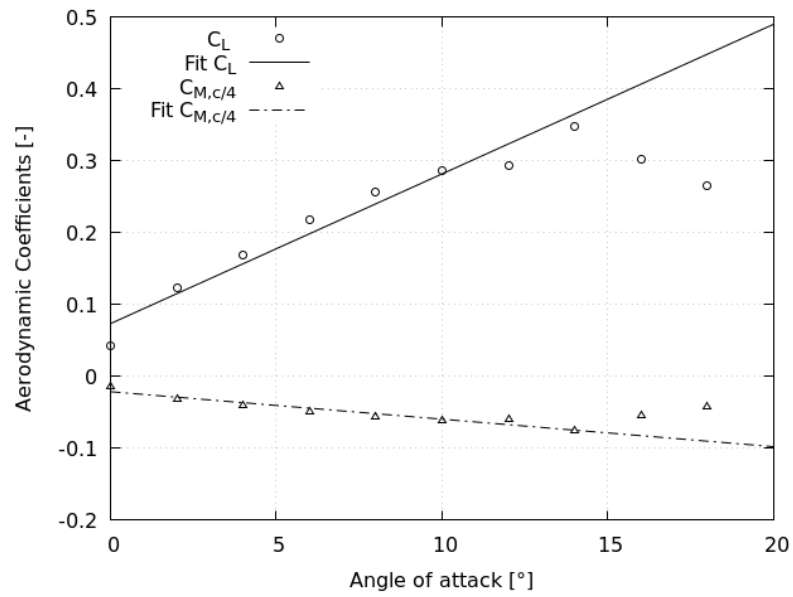


Figura 5.11: Curvas C_L y $C_{M,\frac{c}{4}}$ en función de α para globo cilíndrico.

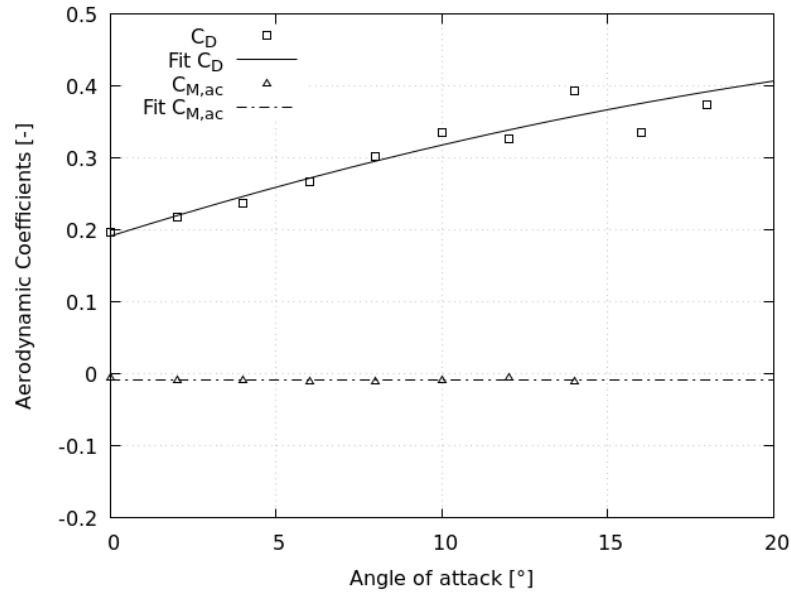


Figura 5.12: Curvas C_D y $C_{M,ac}$ en función de α para globo cilíndrico.

5.2.3. Simulación de globo ovoidal

Para determinar las curvas de ajuste para C_L , C_D y $C_{M,\frac{c}{4}}$ de las ecuaciones (4.38-4.40) se realizan 10 simulaciones, para una velocidad de viento de $10 [m/s]$, variando el ángulo de ataque en un rango de $0^\circ - 20^\circ$, midiendo valores de fuerza de arrastre, sustentación y momento aerodinámico. Los parámetros de la geometría y del flujo simulado se entregan la Tabla 5.11.

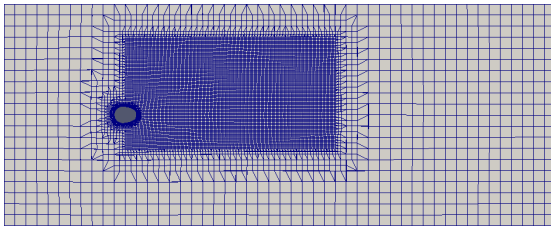
Tabla 5.11: Datos de entrada de la simulación del globo ovoidal.

Parámetro	Valor	Unidad
Tiempo simulado	10	[s]
C_o máximo	0,8	[-]
c	1	[m]
A	0,451162	[m ²]
Re_c	125 746	[-]
ν_∞	$79,52548 \cdot 10^{-6}$	[m ² /s]
k_∞	0,375	[m ² /s ²]
ω_∞	50	[s ⁻¹]

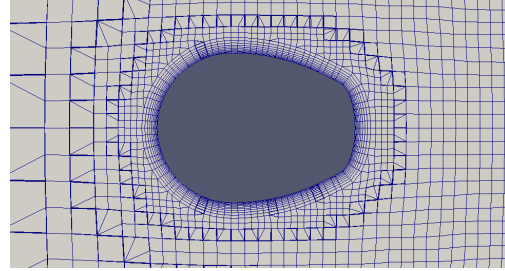
El enmallado del volumen de control se compone de 1068 873 celdas (1036 159 hexaedros y 32 495 poliedros), con refinamiento en las cercanías del globo y en la zona de la estela.

Tabla 5.12: Características de la malla del volumen de control para globo ovoidal.

Parámetro	Valor
Número de celdas	1 068 873
Altura de celda más cercana a pared [mm]	3,02823
Máximo “aspect ratio”	9,39164
Máxima no-ortogonalidad [°]	43,3797
Máxima “skewness”	0,607221



(a) Refinamiento de malla en la zona de la estela.



(b) Refinamiento de malla en la zona cercana a la pared.

Figura 5.13: Malla de globo ovoidal

Con los resultados de las simulaciones (Tabla 5.13), utilizando el programa *Gnuplot* se determinan las curvas de los coeficientes aerodinámicos de la geometría del globo ovoidal en función del ángulo de ataque. De esta manera se tiene:

$$C_L = 0,111597 + 0,618341 \alpha \quad (5.14)$$

$$C_D = 0,132153 + 0,724946 \alpha - 0,37823 \alpha^2 \quad (5.15)$$

$$C_{M, \frac{c}{4}} = -0,0323926 - 0,0173176 \alpha \quad (5.16)$$

Tabla 5.13: Resultados de simulación para globo ovoidal.

Parámetro	Valor
Pos. centro aerodinámico	$0,278007 \cdot c$
C_M centro aerodinámico	$-0,0292671$
Ángulo de máximo C_L	12°
Ángulo de C_L nulo	$-10,34^\circ$

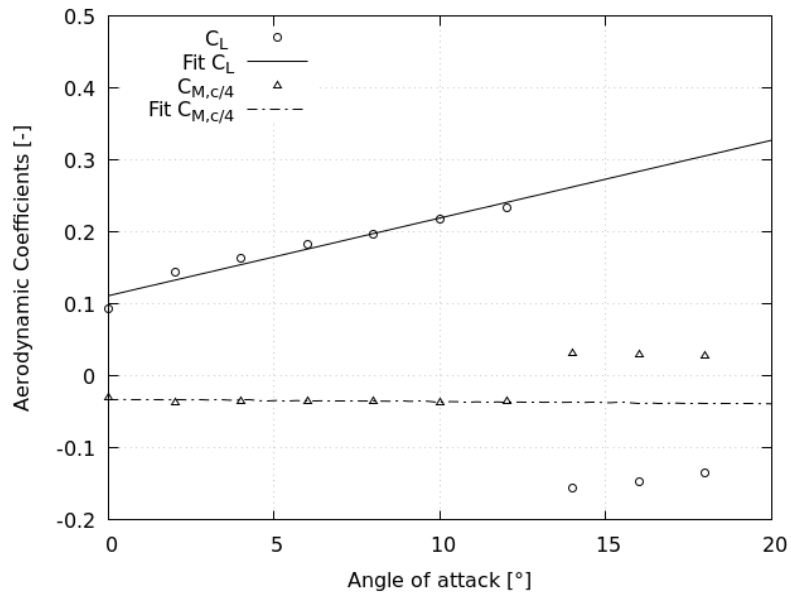


Figura 5.14: Curvas C_L y $C_{M,\frac{c}{4}}$ en función de α para globo ovoidal.

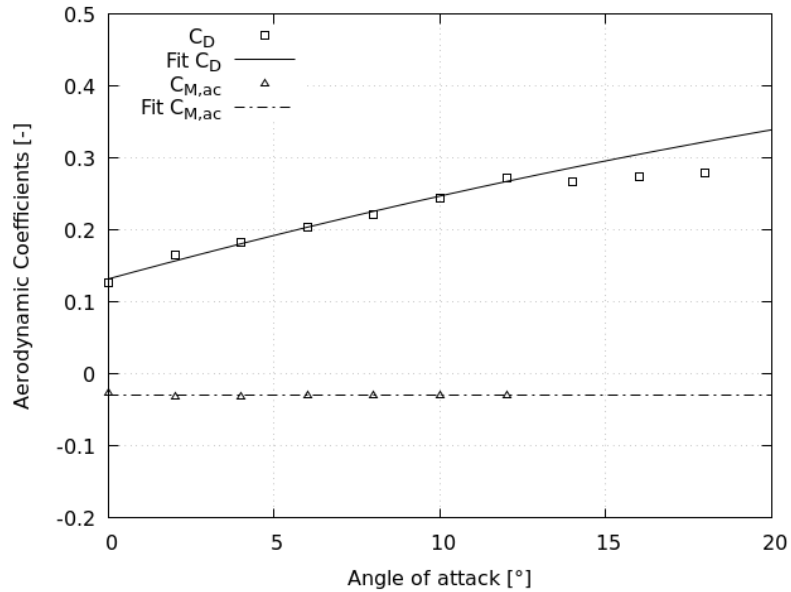


Figura 5.15: Curvas C_D y $C_{M,ac}$ en función de α para globo ovoidal.

5.2.4. Globos NPL y GNVR

Las curvas de C_L y C_D en función de α , aproximadas en estudios previos mediante dinámica de fluidos computacional [36], se entregan a continuación:

$$C_L = 0,0061 + 1,28 \alpha \quad (5.17)$$

$$C_{M,LE} = -0,01 - 0,9167 \alpha \quad (5.18)$$

$$C_D = 0,0396 + 0,0651 \alpha + 0,7354 \alpha^2 \quad (\text{GNVR}) \quad (5.19)$$

$$C_D = 0,0282 + 0,0557 \alpha + 0,6574 \alpha^2 \quad (\text{NPL}) \quad (5.20)$$

Tabla 5.14: Datos para globo NPL y GNVR.

Parámetro	Valor
Pos. centro aerodinámico	$0,716197 \cdot c$
C_M centro aerodinámico	$-0,00563120$
Ángulo de máximo C_L	13°

Además, durante el trabajo se propuso comparar los globos NPL y GNVR a distintas velocidades de viento y niveles de turbulencia. Para ello se utilizaron las condiciones de viento normal de la norma IEC 61400-1, donde los tres niveles de intensidad de turbulencia de referencia están dados en la Tabla 4.3. De esta manera, se escogieron tres velocidades de viento distintas, para caracterizar la curva de los coeficientes aerodinámicos, en un amplio rango de velocidades y para cinco ángulos de ataque distintos: 0° , 5° , 10° , 13° y 15° .

Tabla 5.15: Matriz de combinaciones posibles, para cada globo y ángulo de ataque.

Viento [m/s]	Re	IT [%]		
		Baja	Media	Alta
5	$2,5 \cdot 10^6$	17,09	19,94	22,79
10	$5,0 \cdot 10^6$	11,97	13,97	15,96
15	$7,5 \cdot 10^6$	10,27	11,98	13,69

Los valores de la intensidad de turbulencia de cada caso de la Tabla 5.15, son utilizados para definir el valor de la energía cinética turbulenta de la corriente libre, según la ecuación (5.8). De esta manera, se definen las condiciones iniciales del modelo de turbulencia para cada uno de los 9 casos:

Tabla 5.16: Valores iniciales de los parámetros turbulentos de cada caso a simular.

Parámetro	U_∞ [m/s]	k_∞ [m^2/s^2]	w_∞ [s^{-1}]
Caso 1	5,0	1,09522908	25,0
Caso 2	5,0	1,49072847	25,0
Caso 3	5,0	1,94707392	25,0
Caso 4	10,0	2,14993008	50,0
Caso 5	10,0	2,92629372	50,0
Caso 6	10,0	3,82209792	50,0
Caso 7	15,0	3,55698108	75,0
Caso 8	15,0	4,84144647	75,0
Caso 9	15,0	6,32352192	75,0

Se realizan las simulaciones en transiente hasta alcanzar el estado estacionario, y medir el valor de la fuerza aerodinámica resultante, para los cinco valores del ángulo de ataque mencionados, esperando que el ángulo de máximo C_L esté entre los 10° y 15° . De esta manera se construyen nueve curvas de coeficientes distintas, para calcular con mayor precisión las fuerzas aerodinámicas en el estado de equilibrio y comparar como se ven modificadas las curvas al aumentar la IT.

Tabla 5.17: Datos de entrada de la simulación de los globos NPL y GNVR.

Parámetro	Valor	Unidad
Tiempo simulado	6	[s]
C_o máximo	0,8	[—]
c	1	[m]
A	0,084428720	[m^2]
ρ_∞	1,225	[kg/m^3]
ν_∞	$2,0 \cdot 10^{-6}$	[m^2/s]

Las simulaciones a realizar para completar todos los casos son 90 en total, sin embargo, tal gasto computacional significa que se debe utilizar un servidor para correr las simulaciones en paralelo. Dada la envergadura del trabajo, no fue posible realizar todas las simulaciones a tiempo, por lo tanto, los resultados de la comparación de ambos globos quedarán para un trabajo futuro.

5.3. Verificación del modelo SGC simple

La verificación de modelos es de gran importancia para estudios de simulación computacional, ya que las conclusiones basadas en un modelo impreciso no serán las adecuadas. Al incorporar el modelo estático de Fitzsimmons [23] es necesario asegurarse de que no se están introduciendo errores por lo que la verificación realizada se detalla a

continuación.

Se define el sistema de equilibrio en un plano xy que se utiliza para verificar el algoritmo, con cables inelásticos cuyo perfil es coplanar a un perfil uniforme de velocidad del viento U_∞ en la dirección de x positivo.

$$\vec{T} = T \cos \Gamma \hat{i} + T \sin \Gamma \hat{j} \quad (5.21)$$

$$\frac{dT}{ds} = P \sin \Gamma - F \quad (5.22)$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{P \cos \Gamma + D}{T} \quad (5.23)$$

Donde T es la magnitud de la tensión del cable y Γ es el ángulo que el perfil del cable forma con el eje x . La variable P denota la distribución lineal de la fuerza de gravedad a lo largo del cable, F y D denotan la fuerza de arrastre por unidad de longitud en las direcciones normal y tangencial respectivamente, a la dirección del perfil del cable.

$$P = \frac{1}{4}\pi d^2 g (\rho_t - \rho_\infty) \quad (5.24)$$

$$D = R \sin^2 \Gamma \quad (5.25)$$

$$F = \gamma \pi R \cos^2 \Gamma \quad (5.26)$$

$$R = \frac{1}{2}\rho_\infty d C_{DN} U_\infty^2 \quad (5.27)$$

Para verificar que el algoritmo desarrollado simula de manera fiel la física del problema se comparan los resultados que entrega el programa cuando se simula bajo los parámetros, de propiedades de cable, velocidad del fluido y tensión en el extremo libre, de tres ejemplos de modelos de estática de líneas de boyas que se encuentran en [15].

5.3.1. Caso 1: Cable flexible pesado en corriente uniforme

Considerando un cable relativamente corto ($F \approx 0$) y de un material muy denso sumergido en una corriente uniforme de baja intensidad ($P \gg D$), la fuerza de gravedad es la predominante en las ecuaciones de equilibrio y su solución está dada por las

ecuaciones de catenaria:

$$\vec{T} = T_x \hat{i} + Ps \hat{j} \quad (5.28)$$

$$x = \frac{T_x}{P} \sinh^{-1} \left(\frac{Ps}{T_x} \right) \quad (5.29)$$

$$z = \frac{T_x}{P} \left(\cosh \left(\frac{Ps}{T_x} \right) - 1 \right) \quad (5.30)$$

En la Figura 5.16 se tiene el ejemplo de una boya anclada, cuyo perfil puede ser modelado por las ecuaciones de catenaria. Al resolver el problema se determina que el largo del cable es 54,901 [m], las componentes horizontal y vertical de la tensión en la boya son 1,001 [kN] y 2,581 [kN] respectivamente, y el desplazamiento horizontal de la boya es 30,909 [m]. La densidad del agua utilizada es de 1000 [kg/m³].

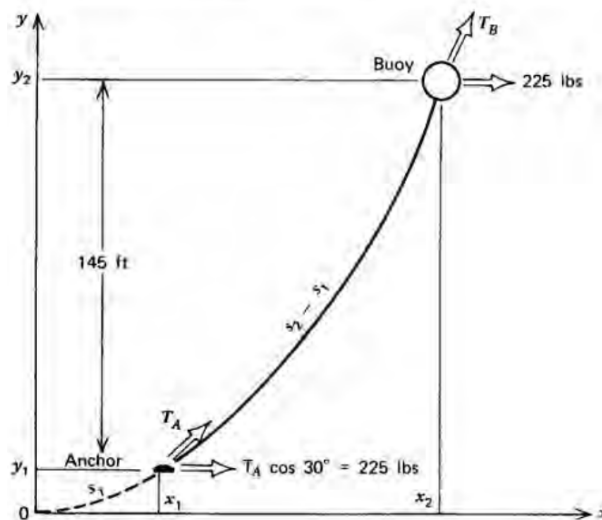


Figura 5.16: Una boya es anclada con una cadena que pesa 2,5 [lb/ft], la profundidad es 145 [ft] y el arrastre sobre la boya es 225 [lb]. Calcular la posición horizontal de la boya, el largo de la cadena y la tensión en la boya cuando el ángulo máximo permitido en el anclaje es de 30° [15].

Utilizando los valores del largo total del cable y la tensión en la boya, se calcula el perfil del cable mediante el algoritmo de Fitzsimmons, variando la cantidad de elementos con los que se discretiza el cable. Los resultados del error absoluto de la posición de la boya y de los ángulos en ambos extremos del cable se muestran en la Figura 5.17. En la Tabla 5.18 se muestran los resultados para tres discretizaciones distintas: gruesa (n=5), normal (n=50) y fina (n=500).

Tabla 5.18: Comparación de resultados para el caso 1.

Parámetro	Un.	Solución analítica	Solución de cable discretizado		
			n=5	n=50	n=500
Largo	[m]	54,901134	54,576612	54,899951	54,901122
Pos Boya x	[m]	30,909411	30,861730	30,908520	30,909402
Pos Boya y	[m]	44,196000	44,196000	44,196000	44,196000
Ángulo Ancla	[rad]	0,52359878	0,66059432	0,53847855	0,52509849
Ángulo Boya	[rad]	1,2008584	1,172231	1,198219	1,200597
T Boya x	[kN]	1,000850	1,000850	1,000850	1,000850
T Boya y	[kN]	2,580895	2,576612	2,580852	2,580895

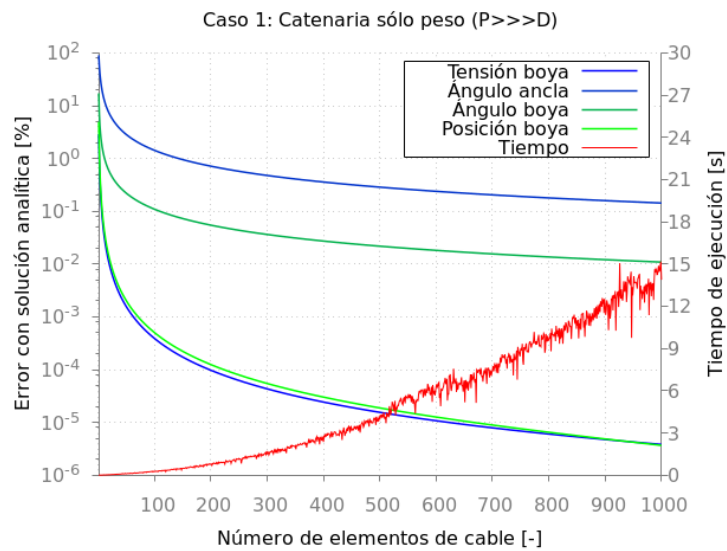


Figura 5.17: Error porcentual de parámetros del caso 1 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.

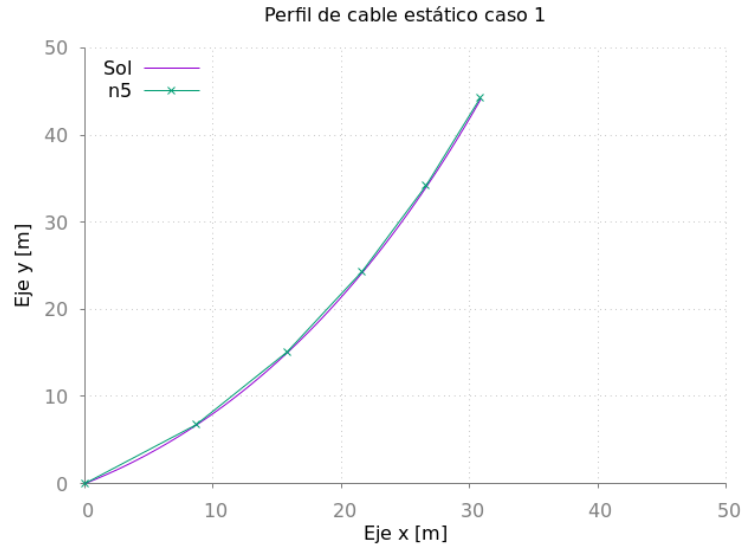


Figura 5.18: Comparación entre el perfil de cable de la solución analítica y de un cable discretizado ($n=5$).

5.3.2. Caso 2: Cable flexible con flotabilidad neutra en corriente uniforme

Considerando ahora un cable relativamente corto ($F \approx 0$) y de un material con flotabilidad neutra sumergido en una corriente de velocidad alta ($D \gg P$), se pueden desestimar los términos del peso y el arrastre tangencial en las ecuaciones de equilibrio. Por lo tanto, la solución del perfil está dada por las siguientes ecuaciones:

$$T = cte \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{T}{R \sin^2 \Gamma} d\Gamma \quad (5.31)$$

$$s - s_0 = -\frac{T}{R} (\cot \Gamma - \cot \Gamma_0) \quad (5.32)$$

$$x - x_0 = -\frac{T}{R} (\csc \Gamma - \csc \Gamma_0) \quad (5.33)$$

$$z - z_0 = \frac{T}{R} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\Gamma}{2} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\Gamma_0}{2} \right) \right) \right] \quad (5.34)$$

En el ejemplo de la Figura 5.19, al resolverlo se tiene que el largo del cable es $245,82 [m]$, las componentes horizontal y vertical de la tensión en el extremo libre son respectivamente $1,779 [kN]$ y $4,077 [kN]$, y el desplazamiento horizontal de la boya es $140,567 [m]$.

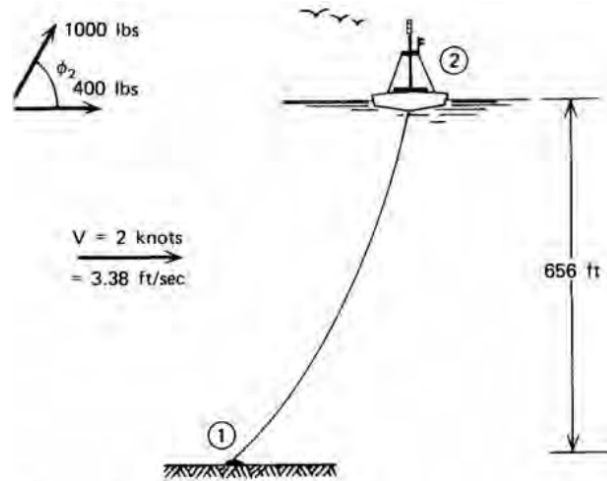


Figura 5.19: Una boya es instalada bajo una corriente de $3,38 [ft/s]$ con un cable de diámetro $0,5 [in]$ cuyo peso es despreciable, el arrastre sobre la boya es $400 [lb]$ y la profundidad es $656 [ft]$. Calcular la posición horizontal de la boya y el largo del cable si la tensión en la boya no debe superar las $1000 [lb]$ y $C_{DN} = 1,5 [15]$.

Usando los valores del largo total del cable y la tensión en la boya, se realiza el cálculo del perfil del cable mediante el algoritmo de Fitzsimmons modificando la cantidad de elementos con los que se discretiza el cable. Los resultados del error absoluto de la posición de la coordenada x e y del extremo libre y de los ángulos en el anclaje y la boya se muestran en la Figura 5.20. En la Tabla 5.19 se muestran los resultados para tres discretizaciones distintas: gruesa ($n=5$), normal ($n=50$) y fina ($n=500$).

Tabla 5.19: Comparación de resultados para el caso 2.

Parámetro	Un.	Solución analítica	Solución de cable discretizado		
			n=5	n=50	n=500
Largo	[m]	245,819880	245,686692	245,824443	245,825818
Pos Boya x	[m]	140,566682	140,430452	140,574821	140,576261
Pos Boya y	[m]	199,948800	199,948800	199,948800	199,948800
Ángulo Ancla	[rad]	0,78862284	0,81801146	0,79138708	0,78885028
Ángulo Boya	[rad]	1,159279	1,114390	1,154618	1,158812
T Ancla x	[kN]	3,135209	3,136083	3,135383	3,135376
T Ancla y	[kN]	3,155494	3,154625	3,155321	3,155328

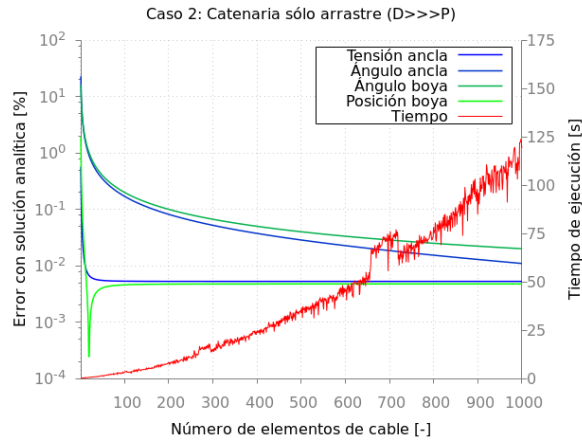


Figura 5.20: Error porcentual de parámetros del caso 2 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.

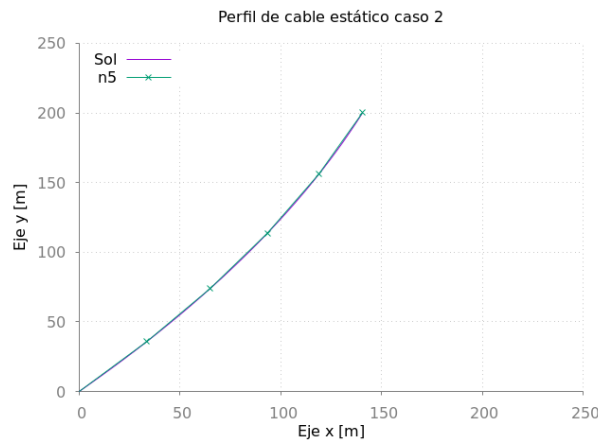


Figura 5.21: Comparación entre el perfil de cable de la solución analítica y de un cable discretizado (n=5).

5.3.3. Caso 3: Cable flexible en corriente uniforme (Análisis de Pode)

Cuando los cables son largos y las fuerzas de gravedad son importantes, todas las fuerzas que influyen en el equilibrio estático deben considerarse. Cuando esto ocurre, las ecuaciones del sistema de equilibrio no pueden integrarse explícitamente y se requiere el uso de métodos de integración numérica. Uno de ellos es el análisis de Pode [28], el cual publicó tablas de integración para las funciones del cable considerando la componente tangencial del arrastre constante a lo largo del cable ($F = cte$).

$$\frac{dT}{T} = \frac{\frac{P}{R} \sin \Gamma - \frac{F}{R}}{\sin^2 \Gamma + \frac{P}{R} \cos \Gamma} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \exp \left(\int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{\frac{P}{R} \sin \tilde{\Gamma} - \frac{F}{R}}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} d\tilde{\Gamma} \right) \quad (5.35)$$

$$s - s_0 = \frac{T_0}{R} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{\exp \left(\int_{\Gamma_0}^{\tilde{\Gamma}} \frac{\frac{P}{R} \sin \tilde{\Gamma} - \frac{F}{R}}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} d\tilde{\Gamma} \right)}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} d\tilde{\Gamma} \quad (5.36)$$

$$x - x_0 = \frac{T_0}{R} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{\exp \left(\int_{\Gamma_0}^{\tilde{\Gamma}} \frac{\frac{P}{R} \sin \tilde{\Gamma} - \frac{F}{R}}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} d\tilde{\Gamma} \right)}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} \cos \tilde{\Gamma} d\tilde{\Gamma} \quad (5.37)$$

$$z - z_0 = \frac{T_0}{R} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \frac{\exp \left(\int_{\Gamma_0}^{\tilde{\Gamma}} \frac{\frac{P}{R} \sin \tilde{\Gamma} - \frac{F}{R}}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} d\tilde{\Gamma} \right)}{\sin^2 \tilde{\Gamma} + \frac{P}{R} \tilde{\Gamma}} \sin \tilde{\Gamma} d\tilde{\Gamma} \quad (5.38)$$

Al resolver el ejemplo de la Figura 5.22, se tiene que el largo del cable es 915,534 [m], las componentes horizontal y vertical de la tensión en la boya son respectivamente 7,286 [kN] y 12,127 [kN], el desplazamiento horizontal de la boya es 665,938 [m] y la profundidad es 614,098 [m].

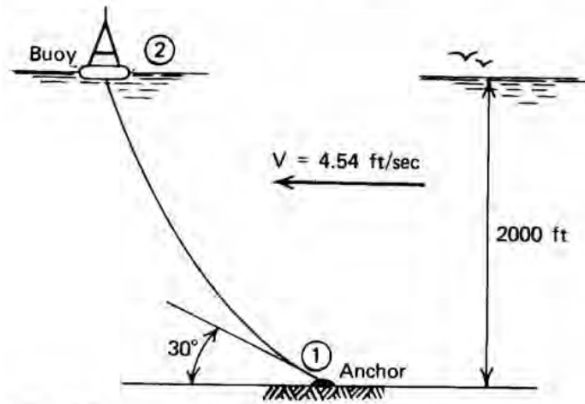


Figura 5.22: Una boya es instalada en aguas de 2000 [ft] de profundidad, el diámetro del cable es 0,315 [in] y su peso es 0,124 [lb/ft]. La velocidad de la corriente es 4,54 [ft/s]. Calcular el largo del cable y la tensión en la boya si la tensión máxima en el anclaje es 3000 [lb] y el ángulo máximo permitido en el anclaje es de 30°, utilizando $C_{DN} = 1,8$ y $\gamma = 0,02$ [15].

Con los valores del largo total del cable y la tensión en la boya, se determina el perfil del cable usando el algoritmo de Fitzsimmons mientras se varía la cantidad de elementos con los que se discretiza el cable. Los resultados del error absoluto de la posición de la

boya y de los ángulos en ambos extremos del cable se muestran en la Figura 5.23. En la Tabla 5.20 se entregan los resultados para tres discretizaciones distintas: gruesa ($n=5$), normal ($n=50$) y fina ($n=500$).

Tabla 5.20: Comparación de resultados para el caso 3.

Parámetro	Un.	Solución analítica	Solución de cable discretizado		
			n=5	n=50	n=500
Largo	[m]	915,534268	904,933197	906,868226	906,887556
Pos Boya x	[m]	665,938225	655,981132	658,126196	658,147610
Pos Boya y	[m]	609,600000	609,600000	609,600000	609,600000
Ángulo Ancla	[rad]	0,52359878	0,56042034	0,52703225	0,52393981
Ángulo Boya	[rad]	1,029744	0,96851958	1,028015	1,034433
T Boya x	[kN]	7,286364	7,153993	7,158703	7,158750
T Boya y	[kN]	12,126546	12,065470	12,061454	12,061414

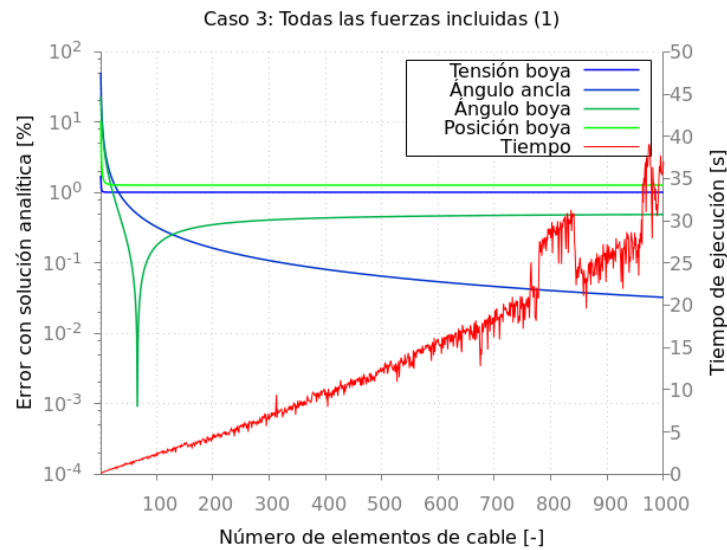


Figura 5.23: Error porcentual de parámetros del caso 3 y tiempo de ejecución del código al aumentar el número de elementos de cable.

5.4. Validación del modelo

La validación del modelo se realiza para los 5 tipos de geometría de globos descritos anteriormente, para los cuales se compara su comportamiento aerodinámico y estabilidad bajo la acción de un perfil de viento uniforme sin turbulencia. Para ello es necesario primero calcular las curvas de coeficientes aerodinámicos para el globo cilíndrico y el globo ovoidal.

Para las simulaciones de los globos, en el análisis de sensibilidad se demostró que con un orden de $\sim 10^6$ celdas se obtienen buenos resultados a un costo computacional razonable, por lo que se utiliza esta discretización espacial en las simulaciones de los globos cilíndrico y ovoidal.

Luego se muestran los resultados obtenidos al comparar las diferentes geometrías de aerostatos en distintas configuraciones de sistemas de globo cautivo simple bajo la acción de un perfil de viento uniforme. Los valores de las propiedades físicas del aerostato, la línea de anclaje y el viento se encuentran en la Tabla 5.21. Se utilizan $n = 100$ elementos para discretizar los cables en cada cálculo y las dimensiones de cada aerostato se calculan para que entreguen el mismo empuje neto sin viento.

Tabla 5.21: Datos de entrada de los elementos del sistema de globo cautivo.

Parámetro	Valor	Unidad
ρ_{env}	0,140	$[kg/m^2]$
ρ_{gas}	0,0841	$[kg/m^3]$
ρ_t	840	$[kg/m^3]$
UTS	0,98	$[GPa]$
E	17	$[GPa]$
C_{DN}	1,2	$[-]$
γ	0,02	$[-]$
ρ_∞	1,225	$[kg/m^3]$
μ_∞	17,894	$[Pa \cdot s]$
g	9,80665	$[m/s^2]$

5.4.1. Comparación de SGC simple

En primer lugar se comparan los aerostatos a escala, con el objetivo de reproducir las condiciones mostradas en la Tabla 5.22 en un posterior ensayo de laboratorio. El número de Reynolds varía entre las distintas geometrías de aerostato, pero en promedio es del orden de $\sim 3,3 \cdot 10^5$ el cual corresponde a la zona de transición a la turbulencia.

En la Figura (5.24) se muestra la razón entre la fuerza de empuje y el arrastre en función del ángulo de ataque inicial (sin viento). Las geometrías NPL y GNVR tienen un rendimiento aerodinámico mucho más eficiente, con un máximo cercano a $-2,5^\circ$, y la forma de sus curvas es similar a la que se esperaría de un perfil de ala como el de la Figura 3.14, aunque para ángulos de ataque inicial mayores a 3° el rendimiento no parece cambiar. En cambio las geometrías cilíndrica y ovoidal generan una curva un orden de magnitud menor y es estrictamente decreciente. A pesar de que el globo

ovoidal genera menos arrastre que el cilíndrico, su comportamiento aerodinámico aún es más cercano al de un cuerpo obtuso que al de un cuerpo aerodinámico.

En la Figura (5.25) se muestra el perfil adimensionalizado, de los cables de cada uno de los aerostatos, con un ángulo de ataque inicial de $-2,5^\circ$. La pérdida de altura, a una velocidad tan baja y con una línea de anclaje corta, es pequeña para todos y es difícil de comparar, siendo la geometría esférica la mayor pérdida con $30 [mm]$. Dónde se observan mayores diferencias es en el desplazamiento horizontal, el cual es de $269 [mm]$ para el globo esférico, $149 [mm]$ para el globo cilíndrico, $98 [mm]$ para el globo ovoidal, $16 [mm]$ para el GNVR y $12 [mm]$ para el NPL.

Tabla 5.22: Configuración de sistema de globo cautivo para $Re \sim 2,5 \cdot 10^5$.

Parámetro	Valor	Unidad
Velocidad del viento	2,0	$[m/s]$
Longitud del cable	1,5	$[m]$
Diámetro del cable	0,005	$[m]$
Empuje neto de aerostatos	9,807	$[kg]$
Volumen esférico	1,733	$[m^3]$
Volumen cilíndrico	2,469	$[m^3]$
Volumen ovoidal	2,571	$[m^3]$
Volumen NPL	2,113	$[m^3]$
Volumen GNVR	2,0997	$[m^3]$
Ángulo de ataque inicial	$-2,5$	$[^\circ]$

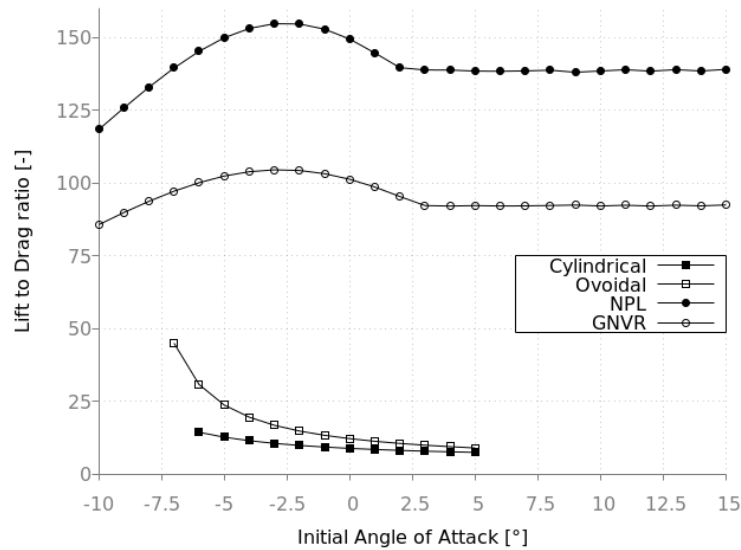


Figura 5.24: Razón sustentación a arrastre en función del ángulo de ataque, con $U_\infty = 2,0 [m/s]$.

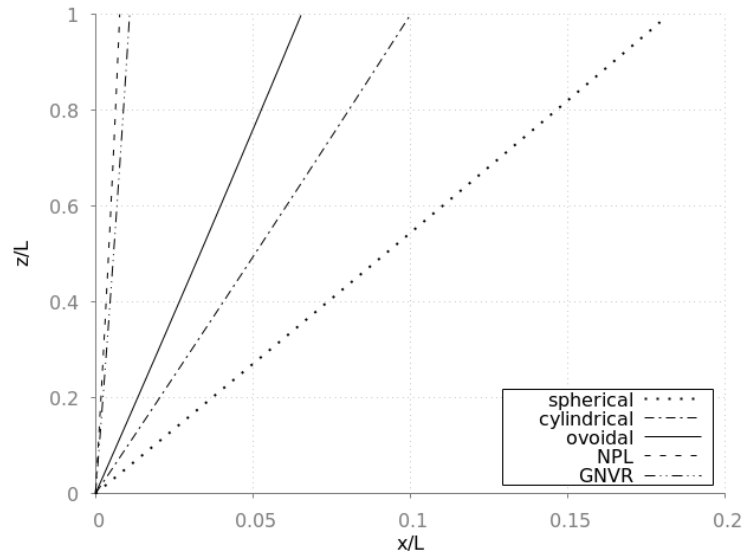


Figura 5.25: Perfil adimensionalizado de líneas de anclaje, con $U_{\infty} = 2,0$ [m/s].

De la Figura (5.25) queda claro que para velocidades bajas, la forma aerodinámica de los globos NPL y GNVR es superior en cuanto a minimizar el arrastre y evitar el desplazamiento de la estructura. Para velocidades más altas de viento y mayor tamaño de aerostato se espera que la diferencia entre los rendimientos aerodinámicos sólo aumente.

Para estudiar la pérdida de altura y el desplazamiento horizontal a escala real, en una condición de flujo turbulento completamente desarrollado ($Re \sim 5 \cdot 10^6$), se comparan los distintos tipos de aerostatos en un rango de velocidades de viento entre 1 [m/s] y 15 [m/s]. Se utiliza un largo de cable constante de 50 [m] y el volumen de cada globo se calcula para que entreguen una capacidad de carga de 15 [kg] sin viento, el resto de los parámetros de la configuración del sistema de globo cautivo se entregan en la Tabla 5.23.

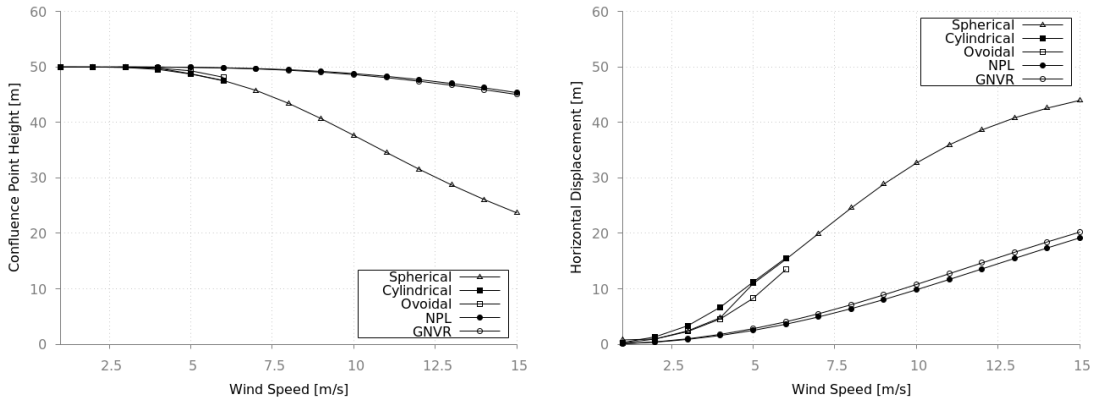
En la Figura (5.26a) se observa cómo se pierde altura del punto de confluencia a medida que aumenta la velocidad del viento y en la Figura (5.26b) se tiene el desplazamiento horizontal. Queda en evidencia que las geometrías esférica, cilíndrica y ovoidal no son adecuadas para este rango de velocidades, ya que para velocidades mayores a 5 [m/s] la pérdida de altura superan el rango aceptado de 5% y sus desplazamientos horizontales son mucho mayores que los del globo NPL y el GNVR.

Para velocidades mayores a 6 [m/s] los ángulos de ataque de los globos ovoidal y cilíndrico se escapan de la curva obtenida anteriormente, así que se remueven esos datos de los resultados. Los datos del globo esférico se dejan para todo el rango de

velocidades, aunque su comportamiento para velocidades mayores a 5 [m/s] podría ser peor al que se muestra, ya que no se incorporan al modelo las oscilaciones debido a la inestabilidad aerodinámica [4].

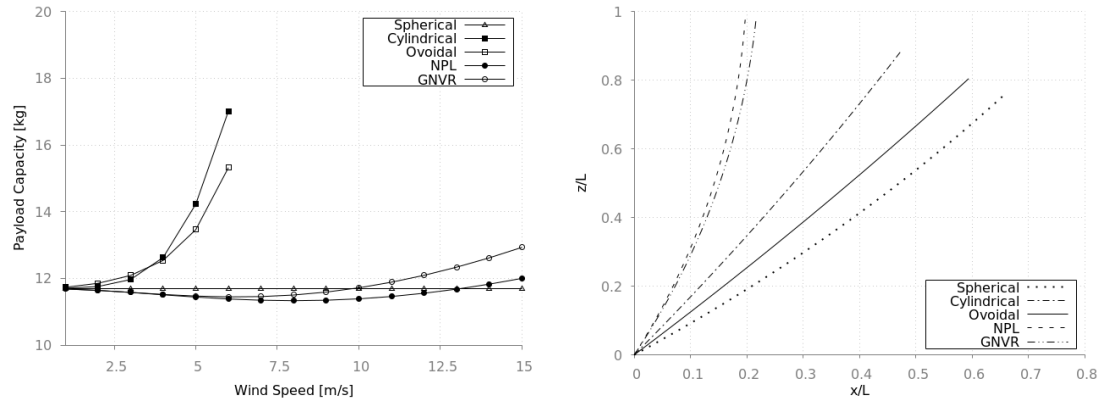
Tabla 5.23: Configuración de SGC simple, con longitud de cable y volumen constantes.

Parámetro	Valor	Unidad
Longitud del cable	50,0	[m]
Diámetro del cable	0,01	[m]
Empuje neto de aerostatos	147,1	[N]
Volumen globo esférico	17,084	[m ³]
Volumen globo cilíndrico	19,452	[m ³]
Volumen globo ovoidal	19,743	[m ³]
Volumen globo NPL	18,375	[m ³]
Volumen globo GNVR	18,334	[m ³]
Ángulo de ataque inicial	-3	[°]



(a) Altura del punto de acoplamiento en función de la velocidad del viento. (b) Desplazamiento horizontal en función de la velocidad del viento.

Figura 5.26: Resultados de altura y desplazamiento de SGC simple, con volumen y longitud de cable constantes.



(a) Máxima capacidad de carga en función de la velocidad del viento. (b) Perfil adimensionalizado de líneas de anclaje para $U_{\infty} = 5,0$ [m/s].

Figura 5.27: Resultados de capacidad de carga y perfiles de SGC simple, con volumen y longitud de cable constantes.

En la Figura (5.27a) se muestra la variación en la capacidad de carga o empuje del aerostato en función de la velocidad del viento, se observa que la capacidad de carga de los globos cilíndrico y ovoidal aumenta rápidamente en un principio, debido a que aumenta su ángulo de ataque con la velocidad del viento, hasta que llega al ángulo de C_L máximo. Mientras que los globos NPL y GNVR se mantienen estable cerca de los 12 [kg] y para velocidades más elevadas el globo GNVR genera más sustentación aerodinámica que el globo NPL.

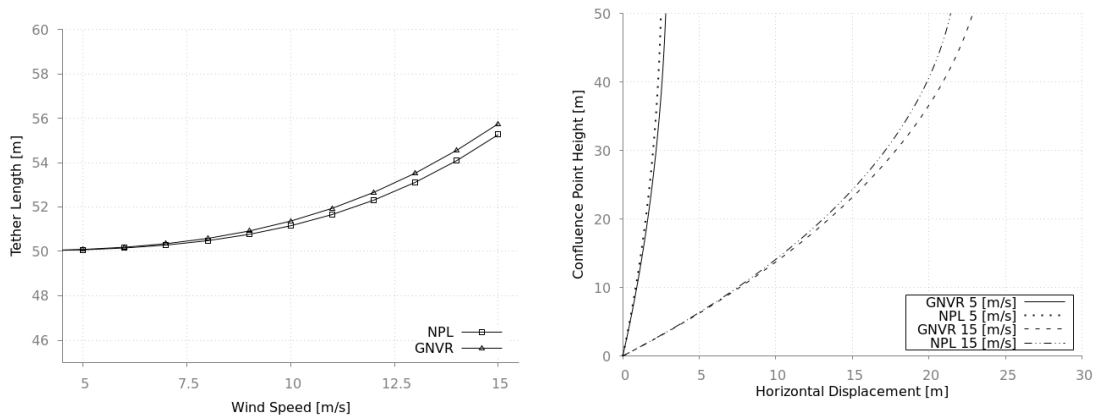
Por último en la Figura (5.27b) se tienen los perfiles adimensionalizados de los cables para una velocidad de viento de 5 [m/s], y se observa claramente lo superior que son las geometrías aerodinámicas en comparación a las propuestas. Donde el globo NPL se desvía menos de la vertical que el globo GNVR y el globo cilíndrico se comporta mejor que el del globo ovoidal, invirtiéndose lo obtenido para velocidades bajas, cuyo perfil está más cercano al del globo esférico.

Si se desea mantener constante la altura de operación del sistema, bajo la configuración dada en la Tabla 5.24, es necesario aumentar la longitud de la línea de anclaje, a medida que aumente la velocidad del viento. Como se observa en las Figura 5.28a, la longitud del cable es similar para ambas geometrías de globo, siendo la diferencia menor a 1 [m] para una velocidad máxima de 15 [m/s]. El perfil de las líneas de anclaje se muestra en la Figura 5.28b, se observa que este es similar en ambas geometrías hasta una velocidad de viento de 5 [m/s], mientras que para una velocidad de 15 [m/s] se tiene que el globo NPL se desplaza menos de la vertical.

En la Figura 5.29b se muestra el desplazamiento horizontal para todo el rango de velocidades promedio del viento. Donde se observa que la geometría NPL se comporta levemente mejor que el globo GNVR. Para una velocidad de viento de 15 [m/s] el globo NPL se desplaza 21,42 [m], mientras que el aerostato GNVR se desplaza 22,87 [m] de la vertical. Además, aumentar la longitud de la línea de anclaje significa disminuir la capacidad de carga del sistema por el peso extra del cable, afectando negativamente la ganancia generada por la sustentación aerodinámica. En la Figura 5.29a, se observa que el aumento en la capacidad de carga, debido a la fuerza de sustentación aerodinámica, para la geometría GNVR es casi el doble que para el globo NPL. Lo anterior indica que si bien el globo GNVR genera más arrastre que el NPL, también aprovecha mejor la intensidad del viento.

Tabla 5.24: Configuración de SGC simple, con altura de operación y volumen de aerostato constantes.

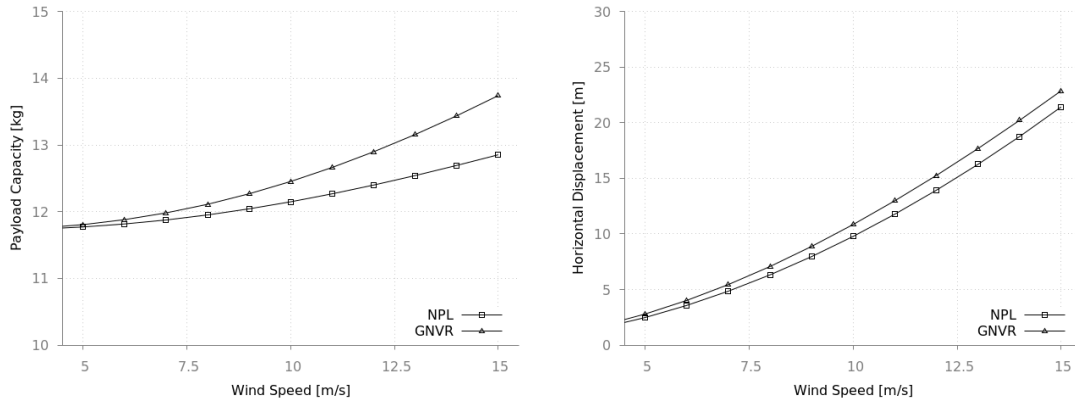
Parámetro	Valor	Unidad
Altura de operación	50,0	[m]
Diámetro del cable	0,01	[m]
Empuje neto de aerostatos	147,1	[N]
Volumen NPL	18,375	[m ³]
Volumen GNVR	18,334	[m ³]
Ángulo de ataque inicial	0	[°]



(a) Largo inicial de línea de anclaje en función de la velocidad del viento.

(b) Perfil adimensionalizado de líneas de anclaje para dos velocidades de viento promedio de 5 y 15 [m/s].

Figura 5.28: Resultados de longitud y perfil de cables de SGC simple, con volumen y altura de operación constantes.



(a) Máxima capacidad de carga en función de la velocidad del viento. (b) Desplazamiento horizontal en función de la velocidad del viento.

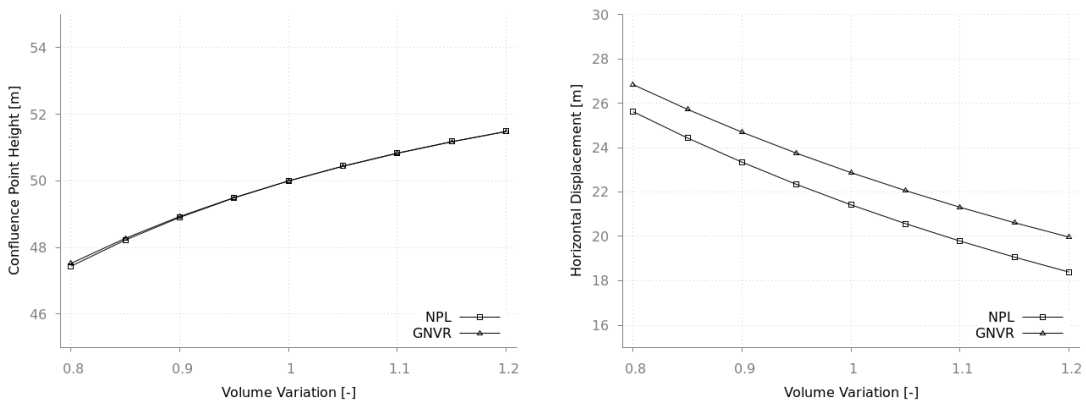
Figura 5.29: Resultados de capacidad de carga y desplazamiento de SGC simple, con volumen y altura de operación constantes.

También es necesario comprobar el comportamiento del sistema, cuando los aerostatos sufren variaciones en su volumen. Bajo la configuración dada por la Tabla 5.25, se comparan los aerostatos GNVR y NPL variando su volumen en un rango de $\pm 20\%$. Se tiene que la altura es proporcional al volumen del aerostato, debido a la fuerza de empuje, y este resultado se observa en la Figura 5.30a, donde ambos aerostatos GNVR y NPL tienen un comportamiento similar, frente a variaciones en el volumen del globo.

En la Figura 5.30b se tiene que el desplazamiento horizontal es inversamente proporcional al volumen, esto puede parecer contra-intuitivo, ya que se esperaría que al disminuir el volumen se disminuye el área frontal del aerostato y por lo tanto el arrastre. Sin embargo, como se observa en la Figura 5.31a, el empuje es proporcional al cambio de volumen y, esto sumado a la ganancia por la fuerza de sustentación aerodinámica, es capaz de vencer el efecto de la fuerza de arrastre añadida, aumentando la tensión de la línea de anclaje. Por último, el ángulo de ataque permanece más o menos invariable frente a cambios en el volumen, como se observa en la Figura 5.31b.

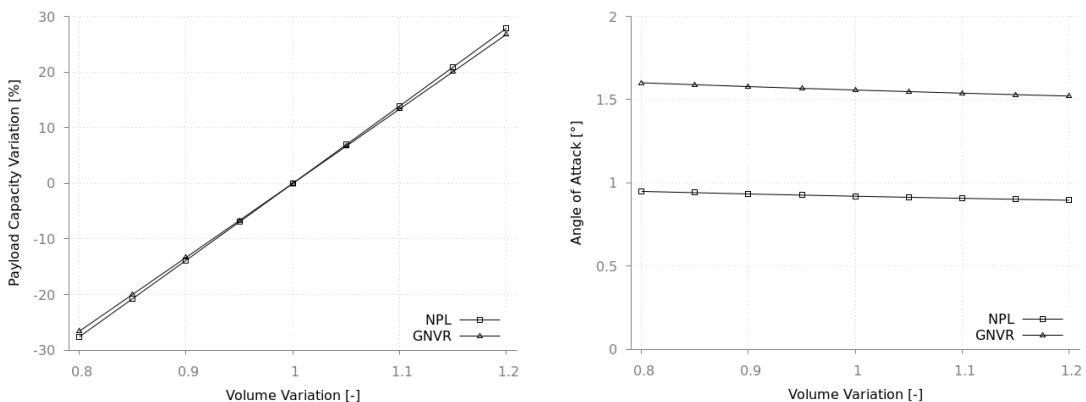
Tabla 5.25: Configuración de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.

Parámetro	Valor	Unidad
Altura de operación	50,0	[m]
Velocidad del viento	15,0	[m/s]
Diámetro del cable	0,01	[m]
Empuje neto de aerostatos	147,1	[N]
Volumen NPL	18,375	[m ³]
Volumen GNVR	18,334	[m ³]
Ángulo de ataque inicial	0	[°]



(a) Altura del punto de confluencia en función del volumen del aerostato. (b) Desplazamiento horizontal en función del volumen del aerostato.

Figura 5.30: Resultados de altura y desplazamiento de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.



(a) Máxima capacidad de carga en función del volumen del aerostato. (b) Ángulo de ataque en función del volumen del aerostato.

Figura 5.31: Resultados de capacidad de carga y ángulo de ataque de SGC simple, con velocidad de viento y longitud de cable constantes.

Capítulo 6

Conclusiones

El diseño de sistemas de globos cautivos para la evaluación del recurso eólico presenta numerosos desafíos que deben superarse para que logre ser una alternativa viable a las “met-mast”. Principalmente preocupan la deformación de la estructura de tensión provocada por la fuerza de arrastre del viento y la incertidumbre en la altura de medición generada por movimientos de la estructura producto de la turbulencia atmosférica. La capacidad de operar como una estación fija dependerá de la respuesta de la estructura frente a cambios en las condiciones ambientales y de viento en terreno.

Una de las ventajas de este tipo de sistema es que el perfil la estructura flexible puede reconfigurarse fácilmente al ajustar las longitudes de las líneas de anclaje. Para ello se necesita desarrollar un sistema de control que a partir de los datos de la misma medición meteorológica, genere una señal electrónica en cada huinche para soltar o recoger los cables según corresponda, y así mantenga estable la posición de las plataformas de medición, utilizando ecuaciones predictoras del movimiento de la estructura.

La interacción del campo de flujo atmosférico con la estructura flexible es más importante en el aerostato, puesto que los cables son delgados y ofrecen menor resistencia al viento. Por lo tanto, una mayor estabilidad dinámica del globo auto-orientable minimiza los desplazamientos producto de ráfagas de viento y tiende a mantener el estado de equilibrio de la estructura en una atmósfera estáticamente estable. Por lo tanto, es clave el comportamiento aerodinámico del globo y su geometría debe optimizarse para minimizar el arrastre y maximizar la sustentación.

El problema es multi-físico e involucra distintas ramas de investigación, tales como la aerodinámica, el análisis de estructuras de tensión y la dinámica atmosférica.

La investigación académica sobre sistemas de globo cautivo ha estado enfocada principalmente en configuraciones de globo tipo “blimp” de un solo anclaje, aunque existen algunos diseños de sistemas multi-anclaje de tres hasta seis cables. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los cables son conocidas desde principios del siglo XX pero dada su complejidad se necesitan métodos numéricos para resolverlas.

El método más utilizado para determinar las fuerzas aerodinámicas sobre el aerostato, ha sido calcular el arrastre generado en el envoltorio y en las aletas traseras por separado, utilizando fórmulas semi-empíricas. Considerando la dificultad y costo de realizar pruebas experimentales de este tipo de sistemas a escala real, es conveniente utilizar CFD en la fase de diseño y selección de la forma del globo.

El estudio realizado en esta tesis se concentró en desarrollar un modelo teórico-matemático que define las ecuaciones que gobiernan el comportamiento estacionario de un sistema de globo cautivo, bajo una condición de viento prescrita. El modelo estático propuesto permite calcular el perfil geométrico y estado de tensión de la estructura flexible, sumergido en un campo de flujo estacionario horizontalmente homogéneo, utilizando un esquema mixto FEM-VFM para determinar la solución de equilibrio.

El desarrollo del código del modelo permite comparar, para SGC simple y triple anclaje, distintas configuraciones de longitud de cables y geometrías de aerostato, bajo un amplio rango de condiciones de viento. Y entrega información sobre la respuesta estática de la estructura frente a la pérdida de volumen del aerostato o cambios en la velocidad y/o dirección del viento. Sin embargo no se consideran en el modelo el peso de la carga ni su interacción con el viento, por lo que el modelo sería válido sólo cuando la incidencia de la carga en la estructura flexible no es significativa.

El modelo de masas concentradas propuesto por Fitzsimmons [23] fue incorporado al modelo de la estructura. Añadiendo cambios que permiten usar perfiles de viento en función de la altura y utilizando dinámica de fluidos computacional para calcular las fuerzas aerodinámicas sobre el aerostato. La verificación del modelo arrojó buenos resultados al compararse con resultados de problemas encontrados en la literatura. Se obtiene que con una discretización de 100 elementos de cable, se tienen resultados con un error relativo menor al 0,01 % y un gasto computacional menor a 10 [s], para cada línea de anclaje independiente.

Utilizando el programa de código abierto OpenFOAM se pudo aproximar las curvas

de los coeficientes aerodinámicos de dos geometrías de envoltorio propuestas, el globo cilíndrico cuyo diámetro no varía a lo largo de la cuerda, y el globo ovoidal que disminuye su diámetro al borde de salida para retrasar el desprendimiento de la capa límite. La comparación de los globos bajo las mismas condiciones de viento y empuje, confirmó la importancia del comportamiento aerodinámico en el desplazamiento de la estructura flexible.

Los globos de gran altitud NPL y GNVR, son geometrías de buen rendimiento aerodinámico y alta estabilidad. Los resultados para velocidades mayores a 5 [m/s] muestra una pequeña ventaja para el globo NPL, aunque el globo GNVR genera más sustentación aerodinámica. Ambas geometrías mantienen una variación de la altura del punto de acoplamiento dentro del margen de 5 % y el desplazamiento horizontal es del orden de los 20 [m] para el SGC simple con altura de operación de 50 [m] a una velocidad de viento máxima de 15 [m/s]. También se verificó la influencia en la variación del volumen en la capacidad de carga, la cual puede disminuir en un 30 % con sólo un 20 % de reducción de volumen de aerostato.

6.1. Trabajo a futuro

El modelo puede ampliarse para más configuraciones de estructura de tensión, que involucren líneas de carga además de líneas de anclaje. Un análisis estructural más exhaustivo, para minimizar el movimiento de las plataformas de medición, debe incorporar la vibración natural de la estructura flexible generada por la turbulencia atmosférica.

Además queda pendiente realizar la comparación del comportamiento aerodinámico de las distintas geometrías, incorporando los distintos niveles de intensidad de turbulencia dados por la norma IEC 61400-1. De esta manera se tendrá un mayor entendimiento del efecto de la turbulencia en la estructura flexible y su relación con la geometría del aerostato.

El cálculo de las fuerzas aerodinámicas puede mejorarse utilizando un modelo de turbulencia híbrido LES-RANS en la simulación computacional del aerostato, ya que captura mejor los efectos viscosos de los vórtices generados por el desprendimiento de la capa límite en la superficie del globo. Además que deben incorporarse las aletas estabilizadoras al modelo en la simulación, una vez se tenga más avanzado el diseño del aerostato.

Por último, un ensayo experimental a escala en un tunel de viento, permitiría validar el modelo estático desarrollado con datos empíricos, lo que generaría una mayor confianza al momento de utilizarlo como condicion inicial de la simulación dinámica del sistema de globo cautivo.

Anexo A

Código de la solución estática

El análisis empleado se basa en el modelo propuesto por Fitzsimmons [23] y permite, a partir de un análisis de cable continuo sin viento, resolver iterativamente las tensiones y perfiles de los cables bajo una velocidad promedio de viento prescrita. El código, en lenguaje Fortran 90, permitirá realizar simulaciones, del comportamiento de un sistema de globo cautivo bajo distintas configuraciones y condiciones de viento; se presenta también la estructura de los algoritmos y de las clases que definen a los objetos que componen el sistema.

El rendimiento de los sistemas de globos cautivos es altamente dependiente del objetivo específico para el cual son diseñados, por lo tanto, la configuración óptima cambiará de aplicación en aplicación. Es necesario entonces desarrollar un programa que, de manera eficiente, nos entregue información crítica del desempeño del sistema y que permita cambiar fácilmente los datos del problema y las condiciones de viento, para poder comparar resultados entre configuraciones.

Las entradas del problema, o datos conocidos a priori, son el conjunto de datos al cual se le llamará configuración, estas son:

- Posición de los anclajes
- Posición esperada del punto de confluencia
- Diámetro y propiedades mecánicas del cable
- Empuje neto y propiedades aerodinámicas del aerostato
- Peso y propiedades aerodinámicas de la carga
- Largo sin tensión del cable correa si es que decide utilizarse

- Número nodos que discretizan el cable de los anclajes y correa

La condición de viento (horizontal), a la cual se someterá el sistema, está dada por:

- Modelo de perfil vertical, puede ser uniforme, logarítmico o exponencial
- Dirección en el plano horizontal
- Magnitud de la velocidad de viento representativa del modelo

Los resultados que se esperan obtener de la simulación de una configuración de globo cautivo bajo una condición de viento específica son:

- Posición, velocidad y aceleración de cada nodo
- Posición, velocidad, aceleración y orientación del aerostato
- Posición, velocidad, aceleración y orientación de la carga
- Tensión máxima, deformación y factor de seguridad de cada cable

Con el objetivo de que la programación sea más abstracta, modular y entendible es que se realiza un código basado en clases de objetos, los cuales al relacionarse entre ellos, construirán la solución del problema. Cada clase está definida en un módulo aislado que determina los atributos o características de un objeto y también los procesos o métodos que se aplican a ellos.

Listing A.1: Código de la solución estática de globo cautivo simple

```
SUBROUTINE sgc_simple(cable,aero,wind,h,mp,pos_ef,tol)
  ! Parametros del cable
  TYPE(tether), INTENT(INOUT)  :: cable
  ! Parametros del aerostato
  TYPE(aerostat), INTENT(INOUT) :: aero
  ! Parametros del viento
  TYPE(wind_model), INTENT(IN)  :: wind
  ! Altura del punto de acoplamiento [m]
  REAL(KIND=8), INTENT(IN)      :: h
  ! Capacidad de carga [N]
  REAL(KIND=8), INTENT(IN), OPTIONAL :: mp
  ! Posicion del extremo fijo [m]
  REAL(KIND=8), INTENT(IN), DIMENSION(3), OPTIONAL :: pos_ef
  ! Tolerancia del error en la posicion [m]
```

```

REAL(KIND=8), INTENT(IN), OPTIONAL :: tol
! Variables auxiliares
TYPE(tether)           :: aux_tether
TYPE(aerostat)        :: aux_aero
REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: ef, ap, t_w, t_ap
REAL(KIND=8)           :: l0, wp, bn, vol, def
REAL(KIND=8)           :: eps, rig, z, x
REAL(KIND=8)           :: e, e0, delta
INTEGER, PARAMETER     :: max_iter=1000
INTEGER                :: i, kk, n
LOGICAL, PARAMETER     :: debug=.TRUE.
LOGICAL                :: flag, debug_loop

! Ingresas los parametros del cable
aux_tether=cable
! Ingresas los parametros del aerostato
aux_aero=aero
! Capacidad de carga por default [N]
wp=0.0d0
IF (PRESENT(mp)) wp=mp*g
! Posicion del extremo por default
ef=0.0d0
IF (PRESENT(tol)) ef=pos_ef
! Tolerancia por default
eps=1.0d-4
IF (PRESENT(tol)) eps=tol
! Estima el largo del cable
l0=0.99d0*h
n=aux_tether%n_seg
DO i=1, n
    aux_tether%seg(:)=l0/n
END DO
! Dimensiona el volumen del aerostato
bn=wp+weight(aux_tether)
vol=min_vol(bn, wind%density, id=aero%shape_id, &
    & rho=aero%rho_env, rho_g=aero%rho_gas)
! Estima la altura del pto. de acoplamiento
rig=aux_tether%seg(1)%mat%young*seg_area(aux_tether%seg(1))

```

```

def=bn/rig
z=10/(1.0d0+def)
ap=ef+(/0.0d0, 0.0d0, z/)
! Calcula la altura del pto. de acoplamiento
! con perfil de catenaria elastica
DO i=1, max_iter
  aux_aero=aerostat_construct(vol, id=aero%shape_id, &
    & rho=aero%rho_env, rho_g=aero%rho_gas, &
    & rho_flow=wind%density, &
    & alpha_0=-aero%zyx%y_rot*1.8d2/pi)
  CALL aerostat_update(aux_aero, wind,ap)
  t_w=(/0.0d0, 0.0d0, weight(aux_tether)/)-aux_aero%tension
  CALL continuous_tether(aux_tether, t0=t_w)
  ap=aux_tether%seg(n)pos_n1
END DO
kk=1
e0=1.0d6
h_loop: DO i=1, max_iter
  IF (i.EQ.max_iter) &
    & WRITE(*,'(8X,A)') "Maximo de iteraciones de h_loop"
  ! Ajuste del largo del cable
  aux_tether%seg(:)%delta_s=1/n
  ! Comprobacion del volumen del aerostato
  IF (flag) THEN
    v0=min_vol((pl+weight(aux_tether)*fs), wind%density, &
      & id=aero%shape_id, rho=aero%rho_env, &
      & rho_g=aero%rho_gas)
    aux_aero=aerostat_construct(v0, id=aero%shape_id, &
      & rho=aero%rho_env, rho_g=aero%rho_gas, &
      & rho_flow=wind%density, &
      & alpha_0=-aero%zyx%y_rot*1.8d2/pi)
  ELSE
    IF (aux_aero%vol.LT.v0) THEN
      WRITE(*,*) &
        & "ERROR: VOLUMEN DEL AEROSTATO MENOR AL MINIMO"
      STOP
    END IF
    v0=aux_aero%vol
  
```

```

        aux_aero=aerostat_construct(v0, id=aero%shape_id,      &
        & rho=aero%rho_env,rho_g=aero%rho_gas,      &
        & rho_flow=wind%density, &
        & alpha_0=-aero%zyx%y_rot*1.8d2/pi)
        fs=NORM2(aux_aero%tension)/(pl+weight(aux_tether))
END IF
! Calcula el perfil del cable
! y la posicion del punto de anclaje
CALL single_tether(aux_tether, aux_aero, wind, wp=pl)
! Condicion de salida de h_loop
e=aux_tether%seg(n)%pos_n1(3)-h
IF (DABS(e).LT.1.0d-6) EXIT h_loop
! Ajuste del largo inicial del cable
IF (DABS(e).GT.e0) THEN
    kk=kk+1
    IF (debug_loop) WRITE(*,'(8X,A,I8)') "k□□:",kk
END IF
e0=DABS(e)
delta=(1/(2.0d0**kk))*(-e/DABS(e))
l=l+delta
END DO h_loop
aero=aux_aero
this=aux_tether
CALL tether_deconstruct(aux_tether)
END SUBROUTINE sgc_simple

```

A.1. Módulos de clases

Se elaboran entonces, a partir del problema, 7 módulos que definen variables de tipo derivada, las cuales representan las distintas estructuras del sistema de globo cautivo. Por ejemplo, el módulo *clase_cable.f90* define una variable tipo cable que representa al cable discretizado, está compuesto una cantidad finita de nodos que estan unidos por segmentos viscoelásticos unidimensionales, ambos tipos de variables estan definidas en los módulos *clase_nodo.f90* y *clase_segmento.f90*, respectivamente.

Además, en los módulos se definen los métodos o procedimientos que se aplican a cada clase de objeto. Por ejemplo, la subrutina *aerodynamic_force*, definida en el

módulo *clase_esfera.f90*, entrega la fuerza aerodinámica resultante sobre una variable de tipo *esfera* bajo una condición de viento dada por una variable de tipo *wind_pm* en la forma de un vector de 3 componentes.

A continuación, del Cuadro A.1 al Cuadro A.7, se presentan los atributos de cada módulo y el tipo de variable que representa en lenguaje Fortran 90.

Tabla A.1: Atributos de un objeto de clase *nodo*.

Módulo <i>clase_nodo</i>	
Atributo	Variable
Posición	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: pos</code>
Velocidad	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: vel</code>
Aceleración	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: acel</code>

Tabla A.2: Atributos de un objeto de clase *angulo_euler*.

Módulo <i>euler_angle</i>	
Atributo	Variable
Ángulo de rotación en eje <i>Z</i>	<code>REAL(KIND=8) :: z_rot</code>
Ángulo de rotación en eje <i>Y</i>	<code>REAL(KIND=8) :: y_rot</code>
Ángulo de rotación en eje <i>X</i>	<code>REAL(KIND=8) :: x_rot</code>

Tabla A.3: Atributos de un objeto de clase *material*.

Módulo <i>clase_material</i>	
Atributo	Variable
Módulo de Young	<code>REAL(KIND=8) :: young</code>
Densidad	<code>REAL(KIND=8) :: rho</code>
Esfuerzo admisible	<code>REAL(KIND=8) :: falla</code>
Coef. de arrastre normal	<code>REAL(KIND=8) :: c_normal</code>
Coef. de amortiguamiento	<code>REAL(KIND=8) :: c_damping</code>

Tabla A.4: Atributos de un objeto de clase *segmento*.

Módulo <i>clase_segmento</i>	
Atributo	Variable
Propiedades mecánicas	<code>TYPE(material) :: prop</code>
Orientación	<code>TYPE(angulo_euler) :: zyx</code>
Posición del extremo 0	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: pos_n0</code>
Posición del extremo 1	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: pos_n1</code>
Tensión en extremo 0	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: t0</code>
Tensión en extremo 1	<code>REAL(KIND=8), DIMENSION(3) :: t1</code>
Largo sin estirar	<code>REAL(KIND=8) :: delta_s</code>
Diámetro sin estirar	<code>REAL(KIND=8) :: diametro</code>

Tabla A.5: Atributos de un objeto de clase *cable*.

Módulo <i>clase_cable</i>	
Atributo	Variable
Número de segmentos	<code>INTEGER :: n_seg</code>
Arreglo de segmentos	<code>TYPE(segmento), & & DIMENSION(n_seg) :: segmentos</code>
Perfil del cable	<code>TYPE(nodo), & & DIMENSION(n_seg+1) :: perfil</code>

Tabla A.6: Atributos de un objeto de clase *esfera*.

Módulo <i>clase_esfera</i>	
Atributo	Variable
Centro de gravedad	<code>TYPE(nodo) :: cg</code>
Masa total	<code>REAL(KIND=8) :: m</code>
Vector resultante de la suma de fuerzas en el centro de gravedad	<code>REAL(KIND=8), & & DIMENSION(3) :: f_cg</code>
Área frontal con respecto al viento	<code>REAL(KIND=8) :: af</code>
Coef. de arrastre aerodinámico	<code>REAL(KIND=8) :: cd</code>
Empuje neto del aerostato	<code>REAL(KIND=8) :: lift</code>

Tabla A.7: Atributos de un objeto de clase *wind_pm*.

Módulo <i>clase_modelo_de_viento</i>	
Atributo	Variable
Identificador de modelo de perfil vertical	<code>INTEGER :: perfil</code>
Ángulo en el plano horizontal que determina la dirección del viento	<code>REAL(KIND=8) :: azimuth</code>
Parámetros del modelo de viento	<code>REAL(KIND=8) :: parametros</code>

A.2. Función `static_sol`

La solución estática del sistema de globo cautivo, bajo cierta configuración y condición de viento, se obtiene a partir de la función `static_sol` definida en el módulo `clase_cable.f90`. En el Cuadro A.8 se muestran las entradas y salidas de la función.

El análisis utilizado es el propuesto por Fitzsimmons en [23], el cual discretiza el cable en segmentos, unidos en sus extremos por articulaciones sin fricción, concentrando toda la masa del segmento en su centro de gravedad y resolviendo el sistema de equilibrio para cada segmento de manera iterativa hasta resolver el cable completo.

Tabla A.8: Lista de entradas y salidas de la función *static_sol*.

Función <i>static_sol</i>	
Entradas	
Posición del pto. de confluencia	<code>REAL(KIND=8), & & DIMENSION(3) :: pos_cp</code>
Posición de cada anclaje	<code>REAL(KIND=8), & & DIMENSION(3,3) :: pos_w</code>
Prop. mecánicas del cable	<code>TYPE(material) :: mat</code>
Diámetro sin estirar del cable	<code>REAL(KIND=8) :: diam</code>
Número de segmentos de cada cable anclaje	<code>INTEGER :: n_seg</code>
Características de la carga	<code>TYPE(esfera) :: payload</code>
Características del aerostato	<code>TYPE(esfera) :: aero</code>
Modelo de perfil de viento	<code>TYPE(wind_pm) :: wind</code>
Largo sin estirar del cable correa	<code>REAL(KIND=8), & & OPTIONAL :: l_leash</code>
Número de segmentos del cable correa	<code>INTEGER, OPTIONAL :: n_l</code>
Salida	
Arreglo de 3 cables anclaje y un cable correa	<code>TYPE(cable), & & DIMENSION(4) :: res</code>

En el algoritmo de la función se utilizan variables de tipo derivada de todas las clases definidas, así como subrutinas y funciones. Este tipo de programación por bloques es fácil de ilustrar en un diagrama de bloques como el que se ve en la Figura A.1.

Una vez se ingresan los datos del problema, primero se revisa si se utiliza un cable correa separe el aerostato del punto de confluencia, en el caso que se utilice se calcula la posición del aerostato y se determina el perfil de cable discreto de la correa bajo la condición de viento prescrita, obteniéndose así la tensión de la correa en el pto. de confluencia; del caso contrario se calcula la fuerza que ejerce el aerostato en el pto. de confluencia bajo la condición de viento prescrita.

Luego se determina la fuerza que ejerce la carga sobre el pto. de confluencia, y se calcula la tensión que tendría cada cable en el sistema, si estos fueran ideales y no hubiera viento. Con la tensión en cada anclaje, y asumiendo el perfil del cable como una línea recta para cada cable, partiendo por el segmento más cercano anclaje, se resuelve el sistema no lineal, que determina la condición de equilibrio en cada segmento

utilizando el método de Newton-Raphson.

Cuando se llega al último segmento de cada cable, se verifica que la posición de su extremo sea la del punto de confluencia, dentro de cierto margen de tolerancia. Si no es así, se ajusta la tensión en el anclaje y se repite el proceso hasta que el extremo del cable se ubique en la posición deseada.

Cabe agregar que el método de Newton-Raphson utiliza una aproximación inicial para echar a andar el ciclo iterativo, y la convergencia será más rápida mientras mejor sea la estimación inicial del perfil del cable. Por lo tanto se utilizan las ecuaciones de catenaria elástica como primera aproximación, lo cual es mejor que suponer cables ideales y rectos.

Luego de que los extremos de los 3 cables alcanzan el pto. de confluencia, se verifica que se cumpla la condición de equilibrio en el pto. de confluencia, es decir, que la suma de todas las fuerzas sea el vector nulo, dentro de cierto margen. Si no es así, se ajusta el largo sin estirar de cada cable, y se repite el proceso desde el inicio.

Cuando se alcanza el equilibrio en el pto. de confluencia, se obtiene entonces la solución estática del sistema de globo cautivo bajo una configuración y condición de viento determinada.

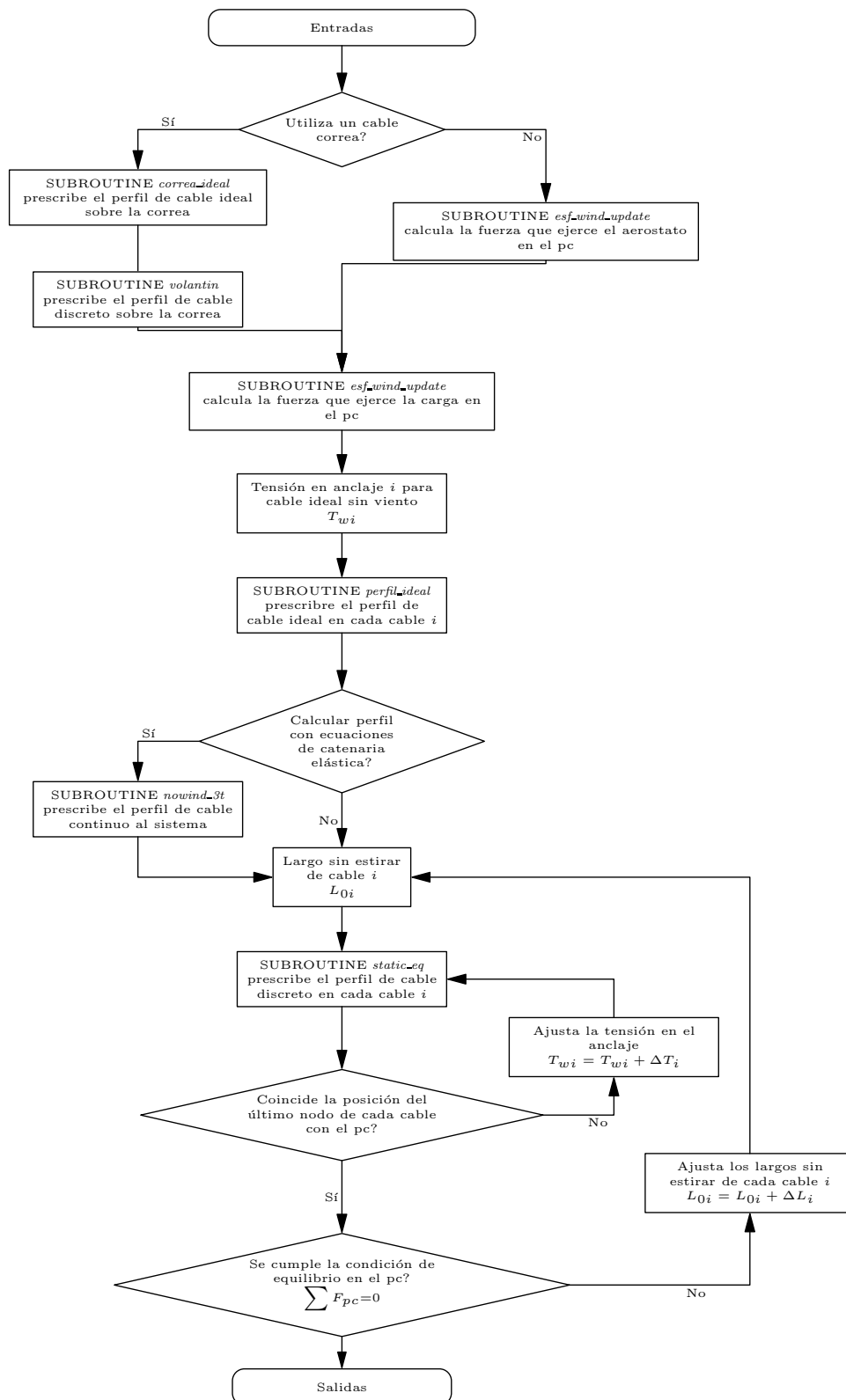


Figura A.1: Diagrama de flujo de función *static_sol*.

Anexo B

Simulaciones CFD en OpenFOAM

2.3.1

B.1. Datos y figuras de simulación de globo esférico

Los esquemas de discretización utilizados para la simulación transiente del globo esférico se muestran en la siguiente tabla:

Tabla B.1: Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.

Discretización	Esquema	Orden
Temporal	CrankNicolson 1,0	2 ^{do} orden
Gradiente espacial	cellMDLimited Gauss linear 0,5	2 ^{do} orden
Divergencia espacial	Gauss linearUpwind	2 ^{do} orden
Laplaciano espacial	Gauss linear limited corrected 1,0	2 ^{do} orden

A continuación se muestran los gráficos de los residuales para los tres niveles de enmallado, ver Figuras B.1-B.3, los campos de velocidades alrededor de la esfera, ver Figuras B.4-B.6, y los campos de presión alrededor de la esfera, ver Figuras B.7-B.9.

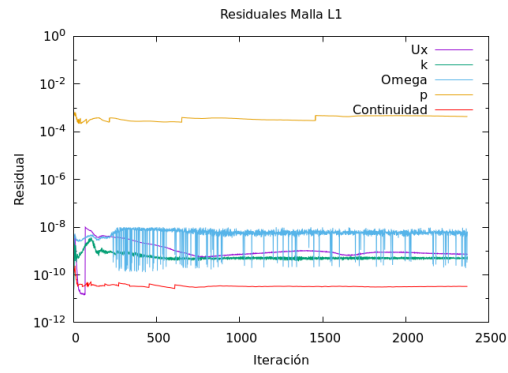


Figura B.1: Gráfico de residuales para Malla L1.

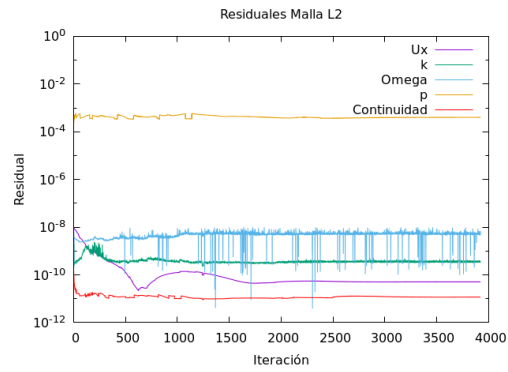


Figura B.2: Gráfico de residuales para Malla L2.

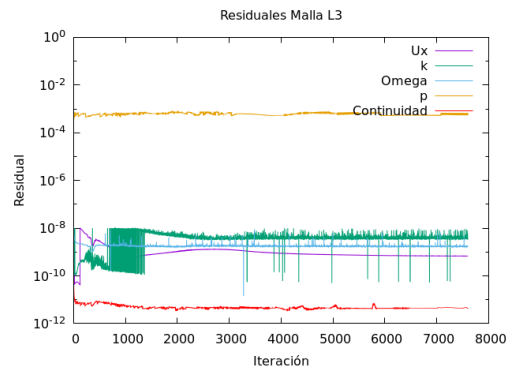


Figura B.3: Gráfico de residuales para Malla L3.

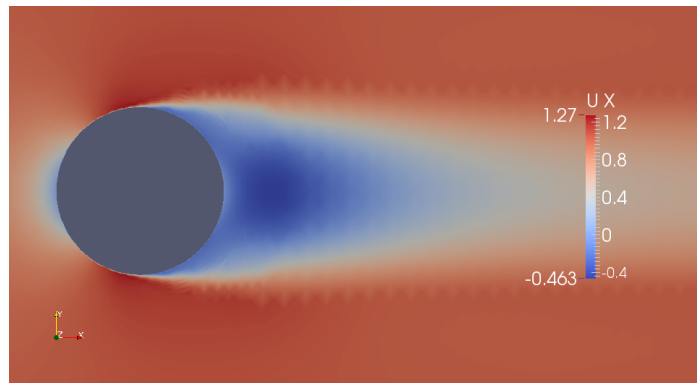


Figura B.4: Campo de velocidades para Malla L1.

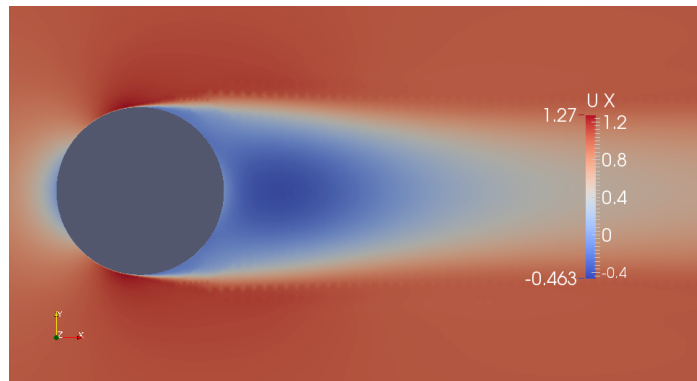


Figura B.5: Campo de velocidades para Malla L2.

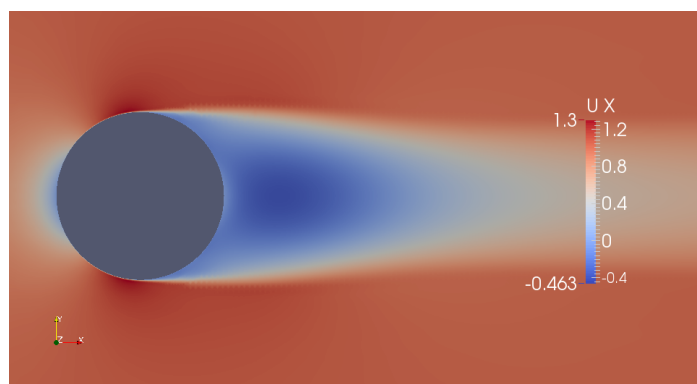


Figura B.6: Campo de velocidades para Malla L3.

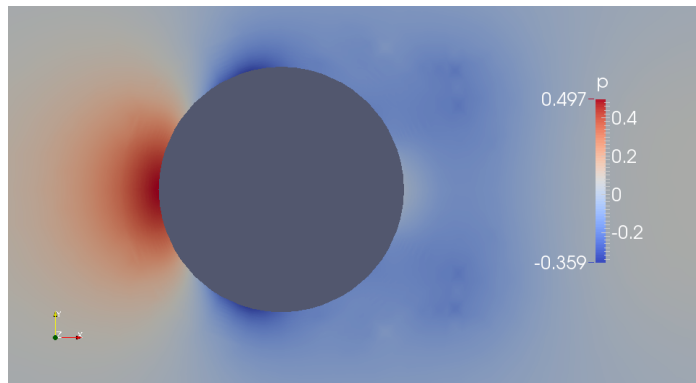


Figura B.7: Campo de presión para Malla L1.

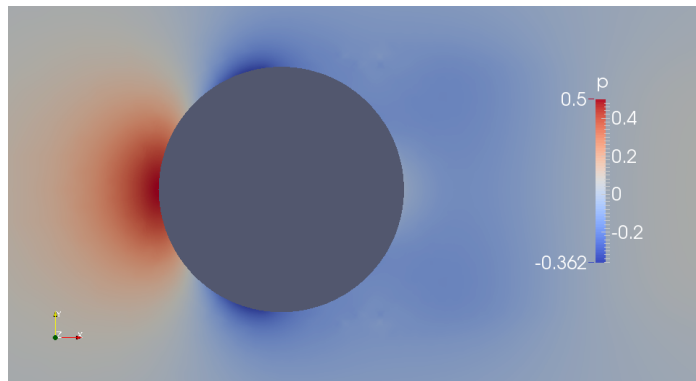


Figura B.8: Campo de presión para Malla L2.

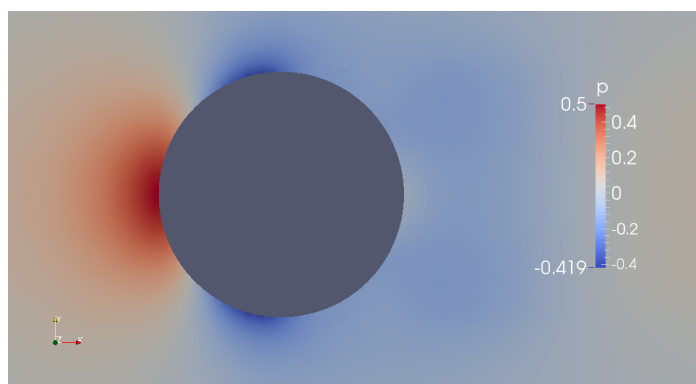


Figura B.9: Campo de presión para Malla L3.

B.2. Datos y figuras de simulación de globo cilíndrico

Los esquemas de discretización utilizados para la simulación transiente del globo cilíndrico se muestran en la siguiente tabla:

Tabla B.2: Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.

Discretización	Esquema	Orden
Temporal	CrankNicolson 0,8	2 ^{do} orden
Gradiente espacial	cellMDLimited Gauss linear 0,5	2 ^{do} orden
Divergencia espacial	Gauss linearUpwind	2 ^{do} orden
Laplaciano espacial	Gauss linear limited corrected 1,0	2 ^{do} orden

En seguida se muestran los resultados de los coeficientes aerodinámicos de la simulación para cada uno de los ángulos de ataque escogidos.

Tabla B.3: Resultados simulación de globo cilíndrico.

α	C_D	C_L	$C_{M,c/4}$
0°	0,1974256098	0,04253211	-0,012894674
2°	0,2178371217	0,1237532046	-0,0314501612
4°	0,2369284526	0,1681150796	-0,0392112311
6°	0,2669212991	0,2184048652	-0,0493107811
8°	0,3018300278	0,2561665928	-0,0562554182
10°	0,334889681	0,28627229	-0,06149578
12°	0,3267358906	0,2934365301	-0,058557685
14°	0,3930220739	0,3476747816	-0,0743902114
16°	0,3344229406	0,3015864172	-0,0529893329
18°	0,3737572996	0,2658767264	-0,0409547159
20°	0,3598354722	0,2917365921	-0,0431842646

A continuación se muestran los resultados de los campos de velocidades, ver Figuras B.10-B.12, y el gráfico de los residuales, ver Figuras B.2-B.15, para tres ángulos de ataque diferentes.

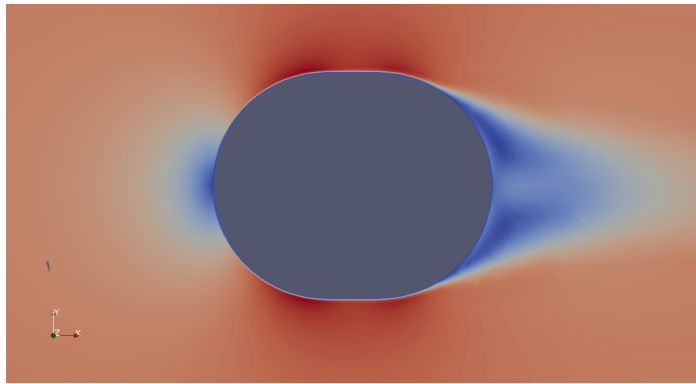


Figura B.10: Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 0^\circ$.

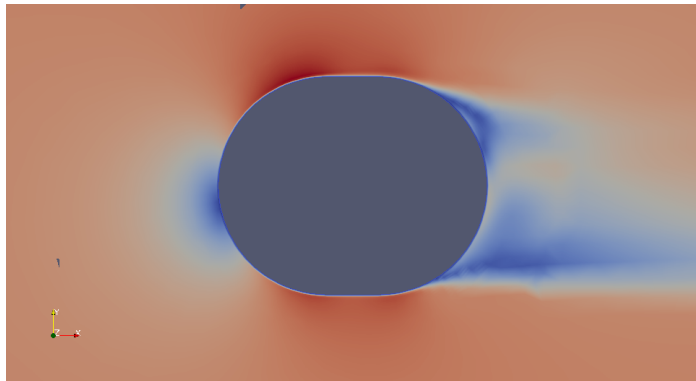


Figura B.11: Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 10^\circ$.

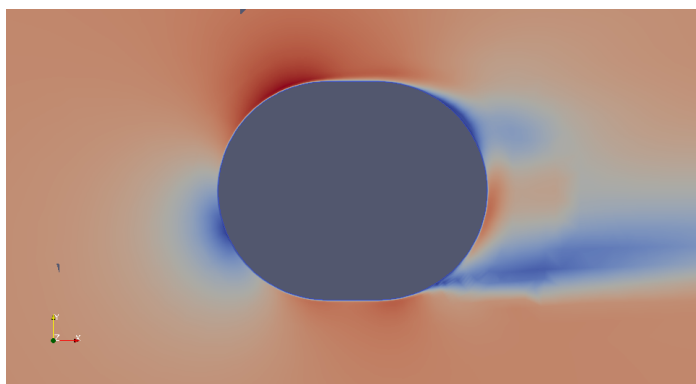


Figura B.12: Campo de velocidad del globo cilíndrico para $\alpha = 20^\circ$.

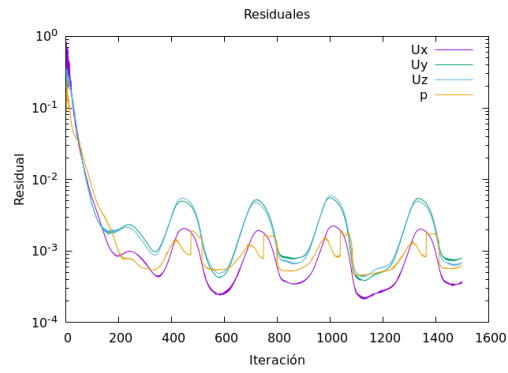


Figura B.13: Gráfico de residuales para $\alpha = 0^\circ$.

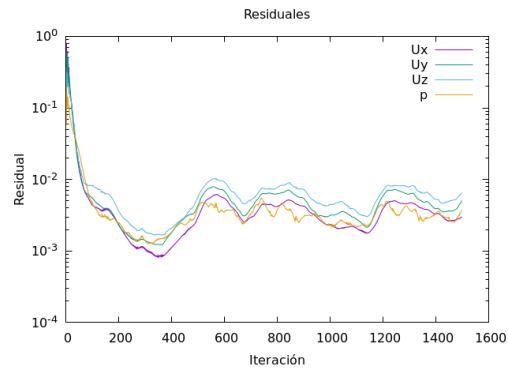


Figura B.14: Gráfico de residuales para $\alpha = 10^\circ$.

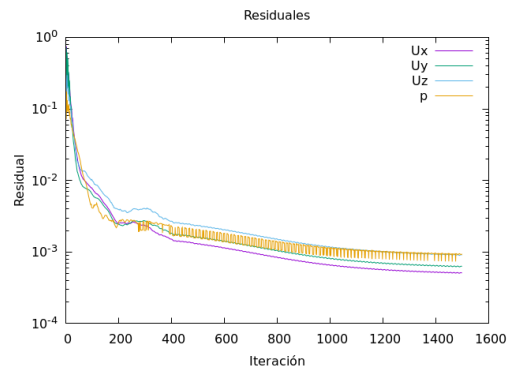


Figura B.15: Gráfico de residuales para $\alpha = 20^\circ$.

B.3. Datos y figuras de simulación de globo ovoidal

Los esquemas de discretización utilizados para la simulación transiente del globo ovoidal se muestran en la siguiente tabla:

Tabla B.4: Esquemas de discretización utilizados en OpenFOAM.

Discretización	Esquema	Orden
Temporal	CrankNicolson 0,8	2 ^{do} orden
Gradiente espacial	cellMDLimited Gauss linear 0,5	2 ^{do} orden
Divergencia espacial	Gauss linearUpwind	2 ^{do} orden
Laplaciano espacial	Gauss linear limited corrected 1,0	2 ^{do} orden

En seguida se muestran los resultados de los coeficientes aerodinámicos de la simulación para cada uno de los ángulos de ataque escogidos.

Tabla B.5: Resultados simulación de globo ovoidal.

α	C_D	C_L	$C_{M,c/4}$
0°	0,12647805	0,0933375242	-0,0288422408
2°	0,164544175	0,144393575	-0,0357726
4°	0,18339585	0,163630425	-0,0352826375
6°	0,2039264	0,183437925	-0,0349293325
8°	0,220785375	0,197078275	-0,0340439
10°	0,2439854571	0,2180076714	-0,03547893
12°	0,271429325	0,2345645	-0,0350929275
14°	0,267430275	-0,155676325	0,032299935
16°	0,274073	-0,1460906	0,030682635
18°	0,279856	-0,133832625	0,0285001025
20°	0,46560405	0,12487645	-0,04210511

Referencias

- [1] LYASOTA, Andriy. Sistema de medición de las características del viento en altura a base de globo cautivo. España, ES2366287B1, (G01C5/00), 8 de Agosto 2013. Appl., ES201130615A, 18 de Abril 2001. 12p.
- [2] CARLSON, Brent... [et al]. The large adaptive reflector: a 200-m diameter wideband centimeter-to meter-wave radio telescope. SPIE Proceedings: Astronomical Telescopes and Instrumentation, Radio Telescopes, 4015:33–44, Marzo 2000.
- [3] WILLIAMSON, C. H. K. y GOVARDHAN, R. Dynamics and forcing of a tethered sphere in a fluid flow. Journal of Fluids and Structures, 11(3):293–305, Abril 1997.
- [4] WILLIAMSON, C. H. K. y GOVARDHAN, R. Vortex-induced motions of a tethered sphere. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 69-71:375–385, Julio-Octubre 1997.
- [5] LAMBERT, Casey y NAHON, Meyer. Stability analysis of a tethered aerostat. Journal of Aircraft, 40(4):705–715, Julio-Agosto 2003.
- [6] LAMBERT, Casey, NAHON, Meyer, y CHALMERS, Dean. Study of a multitethered aerostat system: Experimental observations and model validation. Journal of Aircraft, 43(4):1182–1189, Julio 2006.
- [7] Langley Research Center. Turbulence modeling resource: The menter shear stress transport turbulence model. <<https://turbmodels.larc.nasa.gov/sst.html>> [Consulta: 02/11/2020].
- [8] International Electrotechnical Commission. Wind turbines part 1: Design requirements. IEC 61400-1: Of. 2005, Suiza, 2005.
- [9] Generadoras de Chile AG. Reporte anual 2019. [en línea]. <<http://generadoras.cl/documentos/reportes-anuales/reporte-anual-2019>> [Consulta: 02/11/2020].

- [10] KELLER, Erwin. Simultaneous measuring method of many points. Alemania, DE19908330A1, (G01W1/08), 31 de Agosto 2000. Appl., DE1999108330, 26 de Febrero 1999.
- [11] DRISCOLL, F. R., LUECK, R. G., y NAHON, M. Development and validation of a lumped-mass dynamics model of a deep-sea rov system. *Applied Ocean Research*, 22(3):169–182, Febrero 2000.
- [12] Australia Telescope National Facility. Memorandum of an agreement to cooperate in a technology study program leading to a future very large radio telescope. [en línea]. <<http://www.atnf.csiro.au/projects/askap/archive/moa.html>> [Consulta: 02/11/2020].
- [13] MORRISON, Faith A. Data correlation for drag coefficient for sphere. Department of Chemical Engineering, Michigan Technological University, MI-49931, Noviembre 2013.
- [14] International Organization for Standardization. International standard atmosphere. ISO 2533: Of. 1975, Suiza, 1975.
- [15] BERTEAUX, Henri O. Buoy engineering. 1a. ed. Estados Unidos, John Wiley & Sons Inc., 1976. 1 v.
- [16] AWS Scientific Inc. Wind resource assessment handbook: Fundamentals for conducting a successful monitoring program. Estados Unidos, National Renewable Energy Laboratory, 1997.
- [17] SAMSET, Ivar. Winch and cable systems. 1a. ed. Estados Unidos, Springer Science & Business Media, 2013. 18 v.
- [18] DELAURIER, James D. Prediction of tethered-aerostat response to atmospheric turbulence. *Journal of Aircraft*, 14(4):407–409, Abril 1977.
- [19] DELAURIER, James D. A stability analysis for tethered aerodynamically shaped balloons. *Journal of Aircraft*, 9(9):646–651, Septiembre 1972.
- [20] ORTEGA, James M. y RHEINBOLDT, Werner C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Estados Unidos, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [21] HOLTON, James R. An introduction to dynamic meteorology. 4a. ed. Estados Unidos, Elsevier Academic Press, 2004.

- [22] KWON, Jin Gu, LEE, Dong Won, y LEE, Hyeon Yong. Anemometer using advertising balloon. Korea, KR20020023769A, (G01P5/065), 29 de Marzo 2002. Appl., KR1020010079943A, 17 de Diciembre 2001. 12p.
- [23] FITZSIMMONS, Joeeff T., VEIDT, Bruce, y DEWDNEY, Peter E. Steady-state analysis of the multi-tethered aerostat platform for the large adaptive reflector telescope. SPIE Proceedings: Astronomical Telescopes and Instrumentation, Radio Telescopes, 4015:476–487, Julio 2000.
- [24] ANDERSON JR., John David. Fundamentals of aerodynamics. 5a. ed. Estados Unidos, McGraw-Hill, 2010. 24 v. (McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering).
- [25] LEONARD, John William. Tension structures: Behavior and analysis. 1a. ed. Estados Unidos, McGraw-Hill, 1988.
- [26] STANNEY, Keith A. y RAHN, Christopher D. Response of a tethered aerostat to simulated turbulence. 2004 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE2004-59166:321–328, Noviembre 2004.
- [27] REDD, L. Tracy, BLAND, Samuel R., y BENNETT, Robert M. Stability analysis and trend study of a balloon tethered in a wind, with experimental comparisons. Estados Unidos, NASA Langley Research Center, 1973.
- [28] PODE, Leonard. Tables for computing the equilibrium configuration of a flexible cable in a uniform stream. Estados Unidos, David Taylor Model Basin, Report 687 NS 830-100, Marzo 1951.
- [29] NAHON, Meyer. A simplified dynamics model for autonomous underwater vehicles. IEEE Proceedings, Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology, (0):373–379, Junio 1996.
- [30] NAHON, Meyer. Dynamics and control of a novel radio telescope antenna. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, AIAA-99:4120, Agosto 1999.
- [31] NAHON, Meyer, GILARDI, Gabriele, y LAMBERT, Casey. Dynamics/control of a radio telescope receiver supported by a tethered aerostat. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 25(6):1107–1115, Noviembre-Diciembre 2002.
- [32] BOBILLO, Miguel Angel, MOLANO, Julio, y TORNERO, Maximiano. Dispositivo aplicable a elementos móviles para determinar la velocidad y dirección del viento.

- España, ES2304086B2, (G01P13/02), 14 de Octubre 2009. Appl., ES200601368A, 25 de Mayo 2006. 9p.
- [33] DEWDNEY, P., NAHON, M., y VEIDT, B. The large adaptive reflector: A giant radio telescope with an aero twist. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 48:239-250, Diciembre 2002.
- [34] SPALART, Philippe R. y RUMSEY, Christopher L. Effective inflow conditions for turbulence models in aerodynamic calculations. *AIAA Journal*, 45(10):2544–2553, Octubre 2007.
- [35] RAWAT, Pramud. Nonlinear analysis of aerostat behavior. 7th AIAA Aviation Technology, Integration and Operations Conference, 17th Lighter-Than-Air Systems Technology Conference, AIAA-2007:7831, Septiembre 2007.
- [36] PANT, Rajkumar S. y KAPOOR, Abhinav. A methodology for conceptual sizing of a tethered aerostat. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Lighter-Than-Air Systems Technology Conference*, AIAA-2013:1274, Marzo 2013.
- [37] LEÓN C., Ricardo. Guía de desarrollo de pequeños y medianos proyectos de energía eólica. Chile, Centro de Energías Renovables, 2013.
- [38] LECLAIRE, Richard C. y RICE, Catherine B. The local motions of a payload supported by a tritethered natural shape balloon. *Estados Unidos, Air Force Cambridge Research Laboratories*, 1973.
- [39] DRISCOLL, Rick y NAHON, Meyer. Mathematical modeling and simulation of a moored buoy system. *OCEANS 96 MTS/IEEE Conference Proceedings, The Coastal Ocean - Prospects for the 21st Century*, 1:517–523, Septiembre 1996.
- [40] ESCOBAR, Rodrigo y HENTZSCHEL, Fernando. Buenas prácticas en evaluación del recurso solar y eólico. 1a. ed. Chile, Centro de Energías Renovables, 2011.
- [41] STULL, Roland B. An introduction to boundary layer meteorology. 1a. ed. Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [42] JONES, S. P. Nonlinear dynamic simulation of a moored aerostat. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, 7th Lighter than Air Technology Conference*, AIAA-87:2505, Agosto 1987.
- [43] JONES, S. P. y KRAUSMAN, J. A. Nonlinear dynamic simulation of a tethered aerostat. *Journal of Aircraft*, 19(8):679–686, Agosto 1982.

- [44] JONES, S. P. y DELAURIER, J. D. Aerodynamic estimation techniques for aerostats and airships. *Journal of Aircraft*, 20(2):120–126, Febrero 1983.
- [45] JONES, S. P. y SCHROEDER, L. D. Nonlinear dynamic simulation of a tethered aerostat: A fidelity study. *Journal of Aircraft*, 38(1):64–68, Enero-Febrero 2001.
- [46] JONES, S. P. y BADESHA, S. Aerodynamics of the TCOM 71m aerostat. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 7th Lighter than Air Technology Conference, AIAA-93:4036, Septiembre 1993.
- [47] ARYA, S. Pal. Introduction to micrometeorology. 2a. ed. Estados Unidos, Academic Press, 2001. 79 v. (International Geophysics Series).
- [48] ARAI, Shinichi, MAKIHATA, Toshiaki, y OSHIMA, Mitsuyoshi. Simultaneous measuring method of many points. Japón, JPS59218917A, 10 de Diciembre 1984. Appl., JP9436883A, 28 de Mayo 1983.
- [49] HOERNER, Sighard F. Fluid-dynamic drag, practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance. 1a. ed. Estados Unidos, Sighard F. Hoerner, 1965. 1 v.
- [50] WALTON, Thomas S. y POLACHEK, Harry. Calculation of transient motion of submerged cables. *Mathematics of Computation*, 14(69):27–46, 1960.
- [51] LEWIS, Wanda J. Tension structures: Form and behaviour. Reino Unido, Thomas Telford, 2003. 1 v.