



UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Aplicaciones a teorías supersimétricas del grupo de renormalización funcional

Autor:

Jeremy Echeverría Puentes

Profesores guía:

Dr. Iván Schmidt Andrade &
Dr. Claudio Dib Venturelli

Tesis para optar al grado de
Doctor en ciencias físicas

Valparaíso, Chile, 2024

© Jeremy Echeverría 2024

Comité Examinador

Las siguientes personas han formado parte del comité examinador de esta tesis. La decisión del comité examinador se toma por mayoría de votos.

Profesor guía: Dr. Claudio Dib Venturelli
Profesor Titular, Departamento de Física,
Universidad Técnica Federico Santa María

Examinador Interno: Dr. Alfonso Zerwekh Arroyo
Profesor Titular, Departamento de Física,
Universidad Técnica Federico Santa María

Examinador Externo: Dr. Marcelo Loewe Lobo
Profesor, Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Universidad San Sebastián

Resumen

En esta tesis se discutirá la aplicación del grupo de renormalización funcional en teorías supersimétricas que contienen acoplamientos de supermultipletes quirales y vectoriales, así como también teorías de gauge supersimétricas.

En primer lugar se generalizará la aplicación del grupo de renormalización funcional en modelos de Wess-Zumino añadiendo el acoplamiento con un supermultiplete vectorial con simetría $U(1)$ dentro del gauge de Wess-Zumino considerando el superpotencial renormalizable más general. Mostraremos las diferencias de aplicar el primer orden de la expansión derivativa usando reguladores de dos clases distintas, se mostrarán los resultados de puntos fijos no triviales que entregan las ecuaciones del grupo de renormalización usando ambos acercamientos además del flujo no perturbativo del superpotencial.

Posteriormente se aplicará el formalismo a una teoría de gauge supersimétrica, la extensión supersimétrica de electrodinámica cuántica. Se mostrará que en la aplicación del primer orden de la expansión derivativa, el flujo del superpotencial respeta el teorema de no renormalización, además, la función beta de la constante de estructura fina y la dimensión anómala de los campos de materia respetan la relación no perturbativa de Novikov-Shiftman-Vainstein-Zakharov. En adición, los coeficientes de la expansión en serie de potencias de la función beta coinciden exactamente con los coeficientes de la función beta perturbativa a uno y dos lazos. También se mostrarán los resultados de puntos fijos no triviales.

Finalmente se analizará el segundo orden de la expansión derivativa sobre electrodinámica cuántica supersimétrica, donde se muestra que la función beta y dimensión anómala aún respetan la relación NSVZ aún cuando se añaden coeficientes que representan los modos de momentum de alta energía.

Estos resultados han sido publicados en:

- Jeremy Echeverria, Maximiliano Binder, and Iván Schmidt. *Functional renormalization group flows of $N = 1$ supersymmetric abelian gauge model with one chiral and one vector superfield.* *The European Physical Journal C*, 83(2):125, 2023. [[arXiv:2211.11864](https://arxiv.org/abs/2211.11864)]
- Jeremy Echeverria Puentes and Iván Schmidt. *Non-perturbative SQED beta function using functional renormalization group approach and the NSVZ exact beta function.* *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2024(1):013B01, 2023. [[arXiv:2307.08488](https://arxiv.org/abs/2307.08488)]

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a quien fue mi tutor, el Dr. Iván Schmidt, por darme la formación académica, el apoyo y la guía durante el transcurso de este periodo profesional. Sus consejos, su visión particular de vivir la física y la pasión que demostraba por su trabajo quedarán siempre en mi memoria. Del mismo modo quiero agradecer al Dr. Claudio Dib por su ayuda en la finalización de este proyecto y a los examinadores Dr. Alfonso Zerwekh y Dr. Marcelo Loewe por su buena disposición y retroalimentación. Quiero añadir a todos los profesores que me han enseñado durante todos estos años, en particular al Dr. Julio Oliva, sin el cual ni siquiera estaría finalizando mis estudios en este programa.

Necesito también agradecer a todas las personas que me han acompañado en el camino, tal vez caprichoso, que he escogido seguir. En primer lugar, a mis padres, quienes me criaron y que han sido el apoyo más primordial e incondicional, gracias por creer en mí. A mis hermanos, mis primos/hermanos, mis tíos, mi abuelo y toda la familia que me respalda. A mi compañera, Brenda, quien ha sido mi calma y refugio en medio del caos. A mis amigos de toda la vida, Gonzalo Barriga y Daniel Alcatruz, con quienes he compartido momentos inolvidables, quienes me han visto crecer y me han influido profundamente. A mi amigo Patricio quien me ha acompañado durante todos los años de carrera y que ha sido un apoyo inconmensurable para atravesar los momentos más difíciles de la misma, mi forma de entender la ciencia y la física no sería la misma sin él. A Michel, quien ha tenido la generosidad de enseñarme cómo funciona el mundo. A mi amigo David Miranda a quien admiro profundamente y que ha sido mi maestro y ejemplo. A María Luisa, Rocío, Daniel Salinas, Juan Marchant y Scar por tantos momentos especiales. A todos los amigos que he hecho en el transcurso de este viaje y que nombrar a cada uno es una tarea imposible, a mis amigos de licenciatura: Leonardo, Matías, Esteban, Ricardo, César, Daniel Concha, J, Andrés y Paulo; a mis amigos de doctorado: Bob, Paulina, Camila, Marcelo, Hishan, Yolbeiker, Juan Calles, Felipe, Santiago, Amanda, Nicolás, Alma, Jorge, y muchísimos más que sé que me perdonarán por no seguir escribiendo.

Agradezco a las instituciones UTSFM y PUCV por el apoyo en espacio de trabajo, gestión y financiamiento.

Esta tesis fue financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), la Dirección de Estudios Avanzados (DEA) de la PUCV y la Dirección General de Investigación, Innovación y Postgrado (DGIIP) de la UTFSM.

Dedicado a mis padres y a la memoria del Dr. Iván Schmidt.

Contenidos

Comité Examinador	II
Resumen	III
Agradecimientos	IV
Dedicación	v
Lista de Figuras	IX
Lista de Tablas	x
1. Introducción	1
1.1. Motivaciones y estructura	1
1.2. Supersimetría con $\mathcal{N} = 1$	4
1.2.1. El álgebra de supersimetría	4
1.2.2. Representaciones de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$	13
1.3. Teoría de campos supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$	25
1.3.1. Representación en supercampos	25
1.3.2. Supercampo quirral	28
1.3.3. Supercampo vectorial	32
1.4. Renormalización en teoría cuántica de campos	36

1.4.1.	El grado de divergencia y la renormalizabilidad	37
1.4.2.	Regularización ultravioleta y la acción renormalizada en teoría de perturbaciones	39
1.4.3.	El esquema de renormalización	42
1.4.4.	El grupo de renormalización	43
1.4.5.	La versión wilsoniana del grupo de renormalización	46
2.	Teorías de gauge supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$	51
2.1.	Supercampo quiral acoplado a un supercampo vectorial con simetría $U(1)$.	51
2.2.	Electrodinámica cuántica supersimétrica	53
2.2.1.	Función beta perturbativa en electrodinámica cuántica supersimétrica	55
2.3.	Efectos no perturbativos en teorías de gauge supersimétricas	58
2.3.1.	Teorema de no renormalización	58
2.3.2.	La función beta exacta de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov .	61
3.	Métodos funcionales en renormalización	64
3.1.	Funcionales generatrices de las funciones de green	65
3.1.1.	Funcional generatriz de los vértices irreducibles	67
3.2.	Ecuaciones de flujo exactas	69
4.	El grupo de renormalización funcional	72
4.1.	Reguladores	73
4.2.	La ecuación de Wetterich	74
4.2.1.	Optimización de las funciones reguladoras	77
4.3.	Esquemas de truncamiento	79
4.3.1.	Expansión en lazos	80
4.3.2.	Expansión en vértices	80
4.3.3.	Expansión derivativa	81

5. Aplicación del grupo de renormalización funcional a teorías supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$	83
5.1. Supercampo quirral acoplado a un supercampo vectorial con simetría $U(1)$.	83
5.1.1. Acción promedio efectiva en APL' y regulador supersimétrico	83
5.1.2. Ecuaciones de flujo	85
5.1.3. Puntos fijos	89
5.2. Electrodinámica cuántica supersimétrica	91
5.2.1. Acción promedio efectiva en APL' y regulador supersimétrico	92
5.2.2. Ecuaciones de flujo en APL'	93
5.2.3. Puntos fijos	97
5.2.4. Acción promedio efectiva a segundo orden de expansión derivativa .	99
5.2.5. Ecuaciones de flujo a segundo orden	100
6. Conclusiones	107
Referencias	110
Apéndices	124
Apéndice A. Notaciones y convenciones	125
Apéndice B. Representaciones irreducibles de $SU(2)$	128
Apéndice C. Cálculo en variables de Grassmann	130
Apéndice D. Operadores APL' para modelo quirral + vectorial	131
Apéndice E. Operadores APL' para electrodinámica cuántica supersimétrica	134
Apéndice F. Operadores a segundo orden para electrodinámica cuántica supersimétrica	137

Lista de Figuras

2.1. Diagramas relevantes para la autoenergía de vacío del campo de background en electrodinámica supersimétrica sin masa a dos lazos. Las líneas onduladas gruesas corresponden a los propagadores del campo de background externo, las líneas onduladas delgadas corresponden a los propagadores de los campos de gauge y las líneas sólidas son los propagadores de los campos de materia [1].	56
5.1. Diagrama de flujo en el plano $g_k - m_k$ para distintos valores de y_k . Aquí $m(g)$ se representa en el eje $y(x)$ [2].	90
5.2. Puntos fijos para distintos valores de m_k y y_k [2].	91
5.3. Comparación entre la función beta en APL' y la función beta a 2 lazos [3].	97
5.4. Diagrama de flujo de la función beta en Ec.(5.59) para $m = 1,3$. El punto verde corresponde al punto fijo gaussiano y el punto naranja corresponde al punto fijo no trivial en $\alpha_* = 10,6947$. La discontinuidad de la función beta para $\alpha = 4,2954'$ se representa por la línea vertical roja [3].	98

Lista de Tablas

2.1. Cargas para las cuales el superpotencial de Ec.(2.10) es invariante $U(1)$ y R [4].	60
4.1. Distintos tipos de funciones reguladoras que pueden ser utilizadas y sus clases [5]	75

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivaciones y estructura

La declaración de que la realidad en su aspecto más fundamental es un conjunto de campos sujetos a las leyes de la relatividad especial y la mecánica cuántica es el corazón de la teoría cuántica de campos y ha sido el paradigma de la física desde el siglo pasado. La descripción de las partículas fundamentales como cuantos de un campo cuántico subyacente ha cosechado muchísimos frutos, logrando describir de la forma más precisa hasta la fecha la dinámica de tres de las cuatro interacciones fundamentales (electromagnetismo, interacciones débiles e interacciones fuertes) modeladas como teorías de gauge no abelianas dentro del marco del modelo estándar [6, 7]. A pesar de estos avances, la teoría se ha enfrentado a desafíos complejos, donde quizás uno de los más destacados ha sido el problema de los infinitos, siendo abordado por primera vez en el cálculo de la autoenergía del electrón [8, 9], tuvo su solución a fines de la década de los 40 del siglo XX con el advenimiento del proceso de renormalización, cuyos éxitos más notables fueron el cálculo de la separación de los primeros dos estados del átomo de hidrógeno debido a la autoenergía del electrón [10, 11] y su momento magnético anómalo [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Lo que tienen en común ambos resultados es que son éxitos de la teoría de perturbaciones aplicada a la teoría cuántica de campos, y es que pese a sus éxitos en el régimen en que los acoplamientos son débiles, el estudio de sistemas fuertemente acoplados y, en general, los resultados no perturbativos siguen siendo un reto.

Uno de los marcos teóricos más fructíferos para el estudio de la dinámica de teorías de campos en el régimen de acoplamiento fuerte ha sido la supersimetría. Supersimetría es una propiedad de las teorías cuánticas de campos que relaciona bosones y fermiones

mediante transformaciones [19]. Las extensiones supersimétricas de las teorías de gauge poseen propiedades que les otorgan ventajas importantes por sobre sus contrapartes no supersimétricas, una de ellas es tener un mejor comportamiento ultravioleta producto de las cancelaciones entre contribuciones fermiónicas y bosónicas, lo que da lugar a teoremas de no renormalización, por ejemplo, para teorías supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$ el superpotencial no recibe correcciones radiativas a ningún orden en teoría de perturbaciones [20]. Otro aspecto importante es que permiten el cálculo explícito de condensados, los cuales son la clave para el estudio no perturbativo de los estados de vacío como instantones [21, 22], esto permite, por ejemplo, obtener teorías parecidas a la cromodinámica cuántica con un contenido de partículas similar en las cuales se puede probar el confinamiento de forma analítica [23, 24, 25, 26].

Una característica importante de las teorías de gauge supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$ es que la función beta está relacionada con la dimensión anómala de los campos de materia mediante una relación exacta, la función beta exacta de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov o NSVZ, la cual fue obtenida en primera instancia usando resultados exactos para la medida de instantones en conjunto con la renormalizabilidad [27, 28]. Posteriormente otros trabajos han obtenido la misma relación por métodos distintos tales como la estructura de las anomalías [29, 30, 31, 32, 33, 34] o teoremas de no renormalización para términos topológicos [35]. Otras investigaciones han comprobado esta relación en teoría de perturbaciones en una clase de esquemas de renormalización conocidos como esquemas NSVZ [36, 37, 38, 39].

Pese a que hasta el momento no se ha encontrado evidencia de supersimetría a bajas energías, aún existe la esperanza de que los experimentos de alta energía tales como el Gran Colisionador de Hadrones nos entregue pistas de su existencia. Algunas de las razones para seguir teniendo esperanza son la elegancia con la cual esta resuelve algunos problemas tales como el problema de la jerarquía [40], la pequeñez de la constante cosmológica [41, 42] o la renormalizabilidad de la supergravedad [43] además de ser uno de los candidatos principales para física más allá del modelo estándar ya que permite la unificación de los acoplamientos de gauge [44, 45], la simetría $-R$ permite tener candidatos a materia oscura [46] y es un ingrediente esencial del modelo estándar supersimétrico mínimo [40, 42, 47] y la teoría de cuerdas. Cabe destacar que también se ha estudiado la posibilidad de que supersimetría pueda existir como una simetría emergente, es decir, como límite de baja energía en sistemas de materia condensada [48, 49, 50, 51].

Dentro de la carrera por comprender la dinámica de sistemas fuertemente acoplados, el grupo de renormalización exacto ha mostrado ser una herramienta útil para la descripción de la transformación de la acción bajo este, a través de los esquemas no perturbativos [52, 53, 54]. El objetivo principal de este trabajo es la aplicación de una de las realizaciones

del grupo de renormalización exacto, el grupo de renormalización funcional [55] en teorías supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$ de supercampos quirales acoplados a supercampos vectoriales con tal de obtener un método sistemático de estudiar el grupo de renormalización de forma no perturbativa. En particular se estudiará el flujo del superpotencial y los acoplamiento de gauge en la escala de energía utilizando este método.

El grupo de renormalización funcional se refiere al conjunto de soluciones aproximadas de la ecuación de flujo exacta, la ecuación de Wetterich [56], para la acción promedio efectiva [57, 58, 59, 56], un funcional que interpola entre la acción clásica y la acción efectiva mediante un cutoff regulador infrarrojo. Para una cierta escala de energía, la acción efectiva promedio corresponderá a la acción efectiva (en el sentido wilsoniano) para la cual los modos de momentum mayor a la escala son integrados fuera, mientras que la ecuación de flujo genera la acción efectiva promedio para un cambio infinitesimal de la escala de energía, permitiendo así la integración progresiva de los modos de momentum. La ventaja de este método es que permite calcular el flujo de las constantes de acoplamiento en esquemas de truncamiento no perturbativos [60, 61, 62, 63] como la expansión derivativa, preservando supersimetría en todos los pasos de la implementación.

La aplicación del grupo de renormalización en supersimetría ha sido estudiada en algunos modelos supersimétricos que no contienen supercampos vectoriales como mecánica cuántica supersimétrica, donde se ha estudiado el flujo del superpotencial y la convergencia de la expansión derivativa de la acción promedio efectiva [64]. Siguiendo esa línea, se han estudiado varios modelos de Wess-Zumino para $d = 3$ tanto a temperatura cero como a temperatura finita, en ellos sea ha mostrado que el grupo de renormalización funcional respeta el teorema de no renormalización [65, 66, 67, 68, 69, 70], además se ha investigado la convergencia de la expansión derivativa [71].

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el Capítulo 1 se hará un repaso de los conceptos básicos de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$, el álgebra y sus representaciones, y renormalización en teoría cuántica de campos. En el Capítulo 2 se presentarán los modelos supersimétricos clave que han sido estudiados y un repaso por resultados no perturbativos importantes que exhiben. Luego, en el Capítulo 3 se estudiarán los métodos funcionales que se utilizan en la implementación moderna del grupo de renormalización exacto para posteriormente en el Capítulo 4 estudiar específicamente el grupo de renormalización funcional, los reguladores y esquemas de truncamiento. Finalmente en el Capítulo 5 se presentará la aplicación del grupo de renormalización funcional a dos modelos supersimétricos y en el Capítulo 6 se discutirán los resultados obtenidos. Estos resultados han sido publicados en [2] y [3].

1.2. Supersimetría con $\mathcal{N} = 1$

Algunos de los logros más satisfactorios de la física vienen de la mano de la unificación, la demostración de que fenómenos que hasta el momento se comprendían como separados emergen de una misma teoría. La totalidad de fenómenos físicos no tienen por qué responder a una única teoría, al menos desde el punto de vista meramente objetivo, sin embargo, cada vez que se logra una de estas unificaciones la humanidad misma parece entrar en una etapa superior de la comprensión del funcionamiento de las leyes universales. Dentro de este paradigma, la supersimetría no es una simetría cualquiera, ella relaciona partículas de distintos espín pensándolos como un objeto más abstracto, un supercampo, así, aquellas entidades que reconocemos como fuerza y materia pasan a ser propiedades de una única entidad. No conforme con aquello, la supersimetría permite además unificar las interacciones fundamentales y las masas de las partículas a una escala de energía alta, además de solucionar algunas incomodidades que posee el actual modelo estándar de partículas elementales. Pese a que hasta el momento no ha habido evidencia directa de que nuestro universo posea las propiedades que la supersimetría otorga, los modelos supersimétricos tienen un valor incalculable para el desarrollo de la propia teoría cuántica de campos y nuestro entendimiento de las teorías de gauge usuales. En lo que sigue exploraremos qué es la supersimetría.

Excelentes introducciones a supersimetría se pueden encontrar en [4, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 40].

1.2.1. El álgebra de supersimetría

Supersimetría es una extensión de las simetrías espaciotemporales, a estas se añaden nuevos generadores, las supercargas, encargadas de transformar campos con un espín en campos con un espín distinto. El objetivo de esta sección es detallar las características del álgebra de supersimetría y ver cuales son sus elementos fundamentales.

En la década de los 60 del siglo XX, el auge por aumentar las simetrías de las teorías llevó a que S. Coleman y J. Mandula probaran un teorema de *no-go* [78], este dice a grandes rasgos que las únicas simetrías posibles de la matriz S que incluyen a la simetría de Poincaré pueden ser producto directo del grupo de Poincaré y un grupo de simetría interno. Algunas consideraciones que se tuvieron en cuenta en [78] fueron que los grupos debían ser grupos de Lie y que las teorías comprendieran campos masivos.

Con tal de evadir el teorema de Coleman-Mandula, en 1971 Y. Golfand y E. Likhtman extienden el álgebra de Poincaré a un álgebra de Lie graduada [19], el álgebra de supersime-

tría, añadiendo generadores fermiónicos. Una consecuencia de esto sería la simetría entre bosones y fermiones. Posteriormente R. Haag, J. Lopuszanski, y M. Sohnius extenderían el teorema de Coleman-Mandula para incluir álgebras de Lie graduadas [79], con lo cual demostraron que la única extensión posible del álgebra de Poincaré posible era el álgebra de supersimetría.

Antes de estudiar el álgebra de supersimetría como tal, haremos un repaso por las simetrías espaciotemporales usuales.

El álgebra de Poincaré

Desde el trabajo de A. Einstein acerca de las simetrías dinámicas de la electrodinámica [80] sabemos que las leyes de la naturaleza deben ser invariantes bajo el grupo de isometrías del espaciotiempo de Minkowski. Dicho grupo de simetrías es el de Poincaré [81, 82, 83], el cual comprende el grupo abeliano de traslaciones (1 temporal y 3 espaciales) más el grupo de Lorentz (3 rotaciones espaciales más 3 boosts). Las coordenadas espaciotemporales $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ transforman bajo una transformación del grupo de Poincaré $T(\Lambda, a)$ como

$$x'^\mu = T(\Lambda, a)^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.1)$$

donde Λ es una transformación de Lorentz y a una traslación. Podemos demostrar que dichas transformaciones forman un grupo a través de la composición de transformaciones:

$$\begin{aligned} x''^\mu &= T(\Lambda', a')^\mu{}_\nu x'^\nu = T(\Lambda', a')^\mu{}_\nu T(\Lambda, a)^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= \Lambda'^\mu{}_\nu (\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + a^\nu) + a'^\mu \\ &= \Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + \Lambda'^\mu{}_\nu a^\nu + a'^\mu \\ &= \Lambda''^\mu{}_\nu x^\nu + a''^\mu, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $\Lambda''^\mu{}_\rho = \Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho$ y $a''^\mu = \Lambda'^\mu{}_\nu a^\nu + a'^\mu$. De Ec.(1.1) se extrae que el elemento identidad de la transformación debe ser

$$T(\mathbb{I}, 0)^\mu{}_\nu x^\nu = \delta^\mu_\nu x^\nu + 0 = x^\mu, \quad (1.3)$$

mientras que de Ec.(1.2) se extrae la composición de transformaciones:

$$T(\Lambda', a')T(\Lambda, a) = T(\Lambda'\Lambda, \Lambda'a + a'). \quad (1.4)$$

El subgrupo de traslaciones es un grupo abeliano

$$x''^\mu = T(\mathbb{I}, a')^\mu{}_\nu x'^\nu = T(\mathbb{I}, a')^\mu{}_\nu T(\mathbb{I}, a)^\nu{}_\rho x^\rho = \delta^\mu_\nu (\delta^\nu_\rho x^\rho + a^\nu) + a'^\mu = x^\mu + a'^\mu + a^\mu, \quad (1.5)$$

por lo tanto

$$T(\mathbb{I}, a')T(\mathbb{I}, a) = T(\mathbb{I}, a)T(\mathbb{I}, a') = T(\mathbb{I}, a' + a). \quad (1.6)$$

De aquí es posible definir la traslación inversa $T(\mathbb{I}, -a)$ como:

$$T(\mathbb{I}, -a)T(\mathbb{I}, a) = T(\mathbb{I}, 0). \quad (1.7)$$

El grupo abeliano que comprende todas las transformaciones con parámetro a es el *grupo de Lie de traslaciones* $\mathbb{T}^{(1,3)}$ ¹.

Respecto a las transformaciones de Lorentz, son aquellas que cumplen con mantener la forma cuadrática del espaciotiempo de Minkowski invariante, es decir,

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2, \quad (1.8)$$

lo cual implica que las matrices de transformación Λ deben cumplir la condición:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (1.9)$$

Desde aquí es posible construir la matriz de transformación inversa multiplicando eq.(1.9) por $g^{\lambda\sigma}$:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\lambda\sigma} = g_{\rho\sigma} g^{\lambda\sigma} = \delta^\lambda_\rho, \quad (1.10)$$

por lo tanto,

$$[\Lambda^{-1}]^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma \quad (1.11)$$

y eq.(1.10) puede reescribirse como:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\lambda{}_\mu = \delta^\lambda_\rho. \quad (1.12)$$

Con esto y Ec.(1.4) podemos definir una transformación de Poincaré inversa como:

$$T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \quad (1.13)$$

¹Una dirección temporal y tres espaciales.

De los resultados anteriores podemos extraer dos características que definen al grupo de Lorentz, en primer lugar, al tomar el determinante de eq.(1.12) vemos que

$$|\det \Lambda| = 1 \quad (1.14)$$

y por lo tanto el grupo es especial. Por otro lado, de Ec.(1.10) se extrae que

$$g_{00}\Lambda^0{}_\rho\Lambda^0{}_\sigma + g_{ii}\Lambda^i{}_\rho\Lambda^i{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \quad (1.15)$$

con lo cual

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 = 1 \quad (1.16)$$

y en consecuencia

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 \geq 1, \quad (1.17)$$

es decir, el grupo es no compacto. Ambas restricciones seccionan el grupo en cuatro subgrupos no conectados: Λ_{++} , Λ_{+-} , Λ_{-+} y Λ_{--}

$$\begin{aligned} \Lambda_{++} : & \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1, \det \Lambda = 1 \\ \Lambda_{+-} : & \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1, \det \Lambda = -1 \\ \Lambda_{-+} : & \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1, \det \Lambda = 1 \\ \Lambda_{--} : & \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1, \det \Lambda = -1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Aquellos subgrupos con $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ se denominan *ortocronos* y aquellos con $\det \Lambda = 1$ se denominan *propios*.

De interés particular es el subgrupo de Lorentz ortocrono y propio, ya que se encuentra conectado de forma continua con la identidad, además, todas las otras clases de transformaciones pueden obtenerse añadiendo transformaciones discretas: *inversión espacial* o de *paridad* Λ_P e *inversión temporal* Λ_T , definidas como:

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Así,

$$\begin{aligned}\Lambda_{+-} &= \Lambda_P \Lambda_{++} \\ \Lambda_{-+} &= \Lambda_T \Lambda_{++} \\ \Lambda_{--} &= \Lambda_P \Lambda_T \Lambda_{++}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

El grupo de todas las transformaciones de Lorentz es el *grupo de Lie indefinido ortogonal*² $O(1,3)$, mientras que el subgrupo de transformaciones propias ortocronas es el grupo de Lorentz restringido, el *grupo de Lie ortogonal especial*³ $SO(1,3)_+$.

Finalmente el grupo de Poincaré es el producto semidirecto entre el grupo de traslaciones $\mathbb{T}^{(1,3)}$ y el grupo de Lorentz,

$$\mathbb{T}^{(1,3)} \times O(1,3).\tag{1.21}$$

Debido a que es un grupo de Lie, podemos encontrar su álgebra a través del análisis de las transformaciones infinitesimales. Consideremos una transformación de Poincaré infinitesimal, es decir,

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \\ a^\mu &= \epsilon^\mu,\end{aligned}\tag{1.22}$$

con $\omega^\mu{}_\nu$, ϵ^μ pequeños. Una transformación de Lorentz debe cumplir Ec.(1.9), por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu{}_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) g_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} \\ g_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} &= g_{\rho\sigma},\end{aligned}\tag{1.23}$$

por lo tanto $\omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}$ es un tensor de rango 2 antisimétrico. De esto podemos ver que el grupo de Poincaré posee 10 parámetros: 6 transformaciones de Lorentz y 4 traslaciones.

Para determinar el álgebra de los generadores del grupo consideraremos la acción del grupo sobre un vector ψ en un espacio de Hilbert a través de una representación matricial $U(\Lambda, a)$:

$$\psi' = U(\Lambda, a)\psi.\tag{1.24}$$

²El grupo de transformaciones lineales que preserva la forma cuadrática $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$.

³Un subgrupo de un grupo de Lie conectado con la identidad es a su vez un grupo de Lie, la palabra “especial” se debe a que solo se consideran las transformaciones con $\det \Lambda = 1$.

Dado que la transformación $U(\mathbb{I}, 0)$ deja invariante el vector, entonces debe ser representada por la matriz identidad, por lo tanto, una transformación infinitesimal será una modificación de la matriz identidad proporcional a los parámetros infinitesimales:

$$U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) = \mathbb{I} - \frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu}, \quad (1.25)$$

donde $M^{\mu\nu}$ y P^{μ} serán los generadores del grupo. Ya que la transformación debe ser unitaria, entonces los operadores deben ser hermíticos,

$$M^{\mu\nu\dagger} = M^{\mu\nu}, \quad P^{\mu\dagger} = P^{\mu}, \quad (1.26)$$

además $M^{\mu\nu}$ debe ser antisimétrico. La pregunta ahora sería cómo transforman los generadores bajo transformaciones de Poincaré, es decir, calcular la relación de similaridad⁴

$$U(\Lambda, a)U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a). \quad (1.27)$$

Usando Ec.(1.4) y Ec.(1.13) vemos que

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda, a)U((\mathbb{I} + \omega)\Lambda^{-1}, -(\mathbb{I} + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) \\ &= U(\Lambda(\mathbb{I} + \omega)\Lambda^{-1}, -\Lambda(\mathbb{I} + \omega)\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon + a) \\ &= U(\Lambda(\mathbb{I} + \omega)\Lambda^{-1}, -a\Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\epsilon). \end{aligned} \quad (1.28)$$

La transformación de similaridad de una representación de un grupo es también una representación, por lo tanto, por Ec.(1.25) podemos escribirla en función de los generadores:⁵

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= \mathbb{I} - \frac{1}{2}i(\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda_{\nu}^{\beta}\omega_{\alpha\beta})M^{\mu\nu} - i(\Lambda^{\alpha}_{\mu}\epsilon_{\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{[\mu}\Lambda_{\nu]}^{\beta}a^{\nu}\omega_{\alpha\beta})P^{\mu} \\ &= \mathbb{I} - \frac{1}{2}i\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda_{\nu}^{\beta}\omega_{\alpha\beta}(M^{\mu\nu} - a^{\nu}P^{\mu} + a^{\mu}P^{\nu}) - i\Lambda^{\alpha}_{\mu}\epsilon_{\alpha}P^{\mu}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Comparando con Ec.(1.25) vemos que los generadores deben transformar como:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)M^{\alpha\beta}U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda_{\nu}^{\beta}(M^{\mu\nu} - a^{\nu}P^{\mu} + a^{\mu}P^{\nu}), \\ U(\Lambda, a)P^{\alpha}U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^{\alpha}_{\mu}P^{\mu}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

⁴El grupo es unitario, con lo cual $U^{\dagger} = U^{-1}$.

⁵El término proporcional a a debe ser antisimetrizado debido a la contracción de las matrices de Lorentz con el parámetro antisimétrico ω .

Con tal de encontrar el álgebra, consideraremos ahora la transformación de los generadores bajo transformaciones infinitesimales. Considerando parámetros infinitesimales en Ec.(1.30) se obtiene, por un lado,

$$\begin{aligned}
U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)M^{\alpha\beta}U^{-1}(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) &= (\delta_\mu^\alpha + \omega^\alpha_\mu) (\delta_\nu^\beta + \omega_\nu^\beta) (M^{\mu\nu} - \epsilon^\nu P^\mu + \epsilon^\mu P^\nu) \\
&= M^{\alpha\beta} + M^{\mu\beta}\omega^\alpha_\mu + M^{\alpha\nu}\omega_\nu^\beta - \epsilon^\alpha P^\beta + \epsilon^\beta P^\alpha \\
&= M^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} (M^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - M^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} + M^{\nu\beta}g^{\mu\alpha} - M^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) \\
&\quad - \epsilon_\mu (P^\beta g^{\mu\alpha} - P^\alpha g^{\mu\beta}), \tag{1.31}
\end{aligned}$$

donde en el último paso se han antisimetrizado los índices μ, ν , y por otro lado:

$$\begin{aligned}
U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)P^\alpha U^{-1}(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) &= (\delta_\mu^\alpha + \omega^\alpha_\mu) P^\mu \\
&= P^\alpha + \omega^\alpha_\mu P^\mu \\
&= P^\alpha - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} (P^\mu g^{\nu\alpha} - P^\nu g^{\mu\alpha}). \tag{1.32}
\end{aligned}$$

De la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff sabemos que

$$U(X)AU^{-1}(X) = A + [A, X] + \dots \tag{1.33}$$

por lo tanto, para transformaciones infinitesimales se cumplirá que

$$\begin{aligned}
U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)M^{\alpha\beta}U^{-1}(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) &= M^{\alpha\beta} - i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, M^{\alpha\beta} \right], \\
U(\mathbb{I} + \omega, \epsilon)P^\alpha U^{-1}(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) &= P^\alpha - i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, P^\alpha \right]. \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Comparando con Ec.(1.31) y Ec.(1.32) vemos que el álgebra es:

$$\begin{aligned}
i [M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= M^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - M^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} + M^{\nu\beta}g^{\mu\alpha} - M^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} \\
i [M^{\mu\nu}, P^\alpha] &= P^\mu g^{\nu\alpha} - P^\nu g^{\mu\alpha} \\
i [P^\mu, P^\alpha] &= 0. \tag{1.35}
\end{aligned}$$

El generador de las transformaciones de Lorentz, $M^{\mu\nu}$ contiene a los generadores de las rotaciones espaciales J^i y de los boosts K^i mediante las definiciones

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M_{ij}, \quad K^i = M^{0i} \tag{1.36}$$

donde $i = 1, 2, 3$. De Ec.(1.35) y Ec.(1.36) vemos que dichos generadores cumplen el álgebra:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J_k, \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J_k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K_k. \quad (1.37)$$

Con tales operadores es posible definir las siguientes combinaciones lineales:

$$A^i = \frac{1}{2} (J^i + iK^i) \quad \text{y} \quad B^i = \frac{1}{2} (J^i - iK^i), \quad (1.38)$$

las cuales cumplen:

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk} A_k, \quad [B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk} B_k, \quad \text{y} \quad [A^i, B^j] = 0. \quad (1.39)$$

Como consecuencia podemos ver que el grupo de Lorentz es homeomórfico al producto directo de dos grupos $SU(2)$ (ver, por ejemplo, el Capítulo 6 de [84])⁶,

$$SO(1, 3)_+ \cong SU(2) \oplus SU(2), \quad (1.40)$$

y por lo tanto sus representaciones irreducibles se pueden escribir como producto de representaciones irreducibles de $SU(2)$ (ver Apéndice B).

El álgebra de Supersimetría

Como ya fue discutido anteriormente, el álgebra de supersimetría es una extensión posible del álgebra de Poincaré que no está prohibida por el teorema de Coleman-Mandula debido a que no es un álgebra de Lie usual sino mas bien un *álgebra graduada de Lie*⁷.

Hablando en términos generales, un álgebra de Lie es un espacio vectorial con ciertas propiedades, la más importante es que sus elementos son cerrados bajo la operación de un corchete de Lie (en el espacio de las matrices es el conmutador), es decir,

$$[t_a, t_b] = t_a t_b - t_b t_a = i \sum_c f_{ab}^c t_c, \quad (1.41)$$

donde f_{ab}^c es un conjunto de *constantes de estructura* (para mayor detalle ver [85, 86]). Un álgebra graduada de Lie es un anillo, cuyos elementos son cerrados bajo la operación de un *supercorchete* (o superconmutador) de Lie,

$$t_a t_b - (-1)^{|\eta_a||\eta_b|} t_b t_a = i \sum_c f_{ab}^c t_c, \quad (1.42)$$

donde η_a son las *graduaciones* de los generadores. Un generador con $\eta_a = 0$ se denomina *bosónico* y con $\eta_a = 1$ se denomina *fermiónico*⁸.

⁶Siendo más específicos, la complejificación de ambos grupos son isomorfos, ver Sección 6.3 de [84].

⁷Más concretamente una *superálgebra de Lie*, un álgebra graduada de Lie con una graduación \mathbb{Z}_2 .

⁸Si la graduación es distinta de \mathbb{Z}_2 las graduaciones pueden ser distintas de 0 y 1.

La extensión del teorema de Coleman-Mandula para álgebras graduadas de Lie fue dado por Haag, Lopuszański y Sohnius[79] y demuestra que para un álgebra graduada el conjunto de generadores que anticonmutan deben ser espinores de espín $\frac{1}{2}$: Q, \bar{Q} , además restringe la extensión del álgebra de Poincaré a la forma esquemática:

$$\begin{aligned}
\{Q_{\alpha,i}, Q_{\beta,j}\} &\propto Z_{ij}, & \{\bar{Q}_{\dot{\alpha},i}, \bar{Q}_{\dot{\beta},j}\} &\propto Z_{ij}^\dagger \\
[P^\mu, Q_{\alpha,i}] &= 0, & [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha},i}] &= 0 \\
[M^{\mu\nu}, Q_{\alpha,i}] &\propto Q_i, & [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha},i}] &\propto \bar{Q}_i \\
\{Q_{\alpha,i}, \bar{Q}_{\dot{\beta},j}\} &\propto P,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

donde los operadores bosónicos $Z_{ij} = -Z_{ji}$ se denominan las *cargas centrales* del álgebra, el subgrupo de operadores que conmutan con todos los demás. En ausencia de dichas cargas centrales, el álgebra posee una simetría interna global, la invarianza bajo un grupo $U(N)$

$$Q_i \rightarrow Q'_i = \sum_k U_i^k Q_k, \tag{1.44}$$

que se conoce como *simetría-R*. En este trabajo consideraremos el caso más sencillo de un álgebra de supersimetría, en el cual solo existe un par de generadores espinoriales, este caso no posee cargas centrales y por lo tanto posee una simetría-R que denotaremos por $U(1)_R$. Esta es el álgebra de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$ ⁹. La forma explícita del álgebra es:

$$\begin{aligned}
i [M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= M^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - M^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} + M^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} - M^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \\
i [M^{\mu\nu}, P^\alpha] &= P^\mu g^{\nu\alpha} - P^\nu g^{\mu\alpha} \\
i [P^\mu, P^\alpha] &= 0 \\
i \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, & i \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 0 \\
i [P^\mu, Q_\alpha] &= 0, & i [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= 0 \\
i [M^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, & i [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} \\
i \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

en conjunto con la simetría-R

$$Q_\alpha \rightarrow e^{-i\theta} Q_\alpha, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{i\theta} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \tag{1.46}$$

Si denotamos por \mathcal{R} al operador asociado a la simetría-R, de Ec.(1.46) vemos que

$$[\mathcal{R}, Q_\alpha] = -Q_\alpha, \quad [\mathcal{R}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \tag{1.47}$$

⁹Las álgebras de supersimetría con $\mathcal{N} > 1$ se conocen como *supersimetrías extendidas*.

Una consecuencia del álgebra de supersimetría es que la energía de cualquier estado es siempre definida positiva. Considerando el anticonmutador de las supercargas y realizando una suma sobre los índices espinoriales se obtiene que

$$\sum_{\alpha} (Q_{\alpha} Q_{\alpha}^{\dagger} + Q_{\alpha}^{\dagger} Q_{\alpha}) = 2 \sum_{\alpha} (\sigma^{\mu})_{\alpha\alpha} P_{\mu}. \quad (1.48)$$

Dado que solo σ^0 tiene traza no nula, entonces

$$\sum_{\alpha} (Q_{\alpha} Q_{\alpha}^{\dagger} + Q_{\alpha}^{\dagger} Q_{\alpha}) = 4P_0, \quad (1.49)$$

por lo tanto el valor de expectación respecto a cualquier estado nos dará una energía definida positiva para ese estado, y en particular el vacío de la teoría tendrá energía cero.

1.2.2. Representaciones de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$

Una vez estudiada el álgebra que cumple el grupo de transformaciones de supersimetría debemos ver cómo actúa la supersimetría sobre estados de una partícula en el espacio de Hilbert, para ello es necesario identificar las representaciones irreducibles del álgebra de supersimetría comenzando por el subálgebra de Poincaré.

Representaciones del grupo de Poincaré

Para clasificar las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré es necesario tener un conjunto completo de observables que conmutan, en otras palabras, necesitamos identificar los operadores de Casimir del álgebra, aquellos operadores que conmutan con todos los otros generadores. Para el álgebra de Poincaré, los operadores de Casimir son:

$$C_1 = P_{\mu} P^{\mu}, \quad C_2 = W_{\mu} W^{\mu}, \quad (1.50)$$

donde W^{μ} es el *pseudovector de Pauli-Lubanski*,¹⁰

$$W^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} M_{\rho\sigma}, \quad (1.51)$$

¹⁰Este operador contiene la información del espín de partículas en movimiento relativista.

y sus componentes son:

$$\begin{aligned} W^0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{0\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_i M_{jk} = P_i J^i, \\ W^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{i\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \epsilon^{i0jk}P_0 M_{jk} + \epsilon^{ij0k}P_j M_{0k} = -P_0 J^i + \epsilon^{ijk}P_j K_k. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Este pseudovector es ortogonal al generador de momentum,

$$P_\mu W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\mu P_\nu M_{\rho\sigma} = 0, \quad (1.53)$$

ya que $P_\mu P_\nu$ es un tensor simétrico en los índices $\mu-\nu$. Usando esta propiedad podemos conocer sus reglas de conmutación con los generadores del álgebra, por ejemplo, de

$$i[P^\mu, P_\nu W^\nu] = i[P^\mu, P^\nu]W_\nu + i[P^\mu, W^\nu]P_\nu = 0, \quad (1.54)$$

se obtiene que:

$$i[P^\mu, W^\nu] = 0. \quad (1.55)$$

Por otro lado,

$$i[M^{\mu\nu}, P_\alpha W^\alpha] = i[M^{\mu\nu}, P^\alpha]W_\alpha + i[M^{\mu\nu}, W^\alpha]P_\alpha = 0, \quad (1.56)$$

por lo tanto

$$i[M^{\mu\nu}, W^\alpha]P_\alpha = -i[M^{\mu\nu}, P^\alpha]W_\alpha, \quad (1.57)$$

y usando Ec.(1.35),

$$i[M^{\mu\nu}, W^\alpha] = g^{\alpha\nu}W^\mu - g^{\alpha\mu}W^\nu. \quad (1.58)$$

Así:

$$i[W^\mu, W^\nu] = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}(ig_{\alpha\sigma}M_{\beta\gamma}[P^\sigma, W^\nu] + ig_{\beta\sigma}g_{\gamma\rho}P_\alpha[M^{\sigma\rho}, W^\nu]), \quad (1.59)$$

finalmente, de Ec.(1.55) y Ec.(1.58) se obtiene que:

$$i[W^\mu, W^\nu] = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_\alpha W_\beta. \quad (1.60)$$

Un estado físico ψ estará etiquetado por los autovalores de ambos operadores. Bajo el operador de momentum el estado transforma como

$$P^\mu \psi = p^\mu \psi, \quad (1.61)$$

mientras que los autovalores de C_1 son

$$P_\mu P^\mu \psi = p_\mu p^\mu \psi = m^2 \psi, \quad (1.62)$$

por lo tanto $\psi = |m, p; \sigma\rangle$, donde σ se refiere a los números cuánticos asociados al otro operador. Ahora necesitamos saber como transforma bajo una transformación de Lorentz $U(\Lambda, 0)$. Notemos que

$$P^\mu U(\Lambda, 0) |m, p; \sigma\rangle = U(\Lambda, 0) [U^{-1}(\Lambda, 0) P^\mu U(\Lambda, 0)] |m, p; \sigma\rangle, \quad (1.63)$$

usando Ec.(1.30) se obtiene que:

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda, 0) |m, p; \sigma\rangle &= U(\Lambda, 0) \Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu |m, p; \sigma\rangle \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu p^\mu U(\Lambda, 0) |m, p; \sigma\rangle, \end{aligned} \quad (1.64)$$

por lo tanto la acción del operador de momentum sobre un estado transformado bajo una transformación de Lorentz produce un estado con momentum Λp . Esto nos muestra que el estado $U(\Lambda, 0) |m, p; \sigma\rangle$ puede representarse como una combinación lineal de estados con momentum Λp y valores σ

$$U(\Lambda, 0) |m, p; \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma, \sigma'} |m, \Lambda p, \sigma'\rangle \quad (1.65)$$

Para seguir restringiendo las representaciones consideraremos el otro operador de Casimir, $C_2 = W^2$. De Ec.(1.60) vemos que W^μ no conmuta consigo mismo, con lo cual podemos diagonalizar W^2 y una de sus componentes, por convención W^3 . Así, el estado estará etiquetado por los autovalores:

$$W^2 |m, w; p, w_3\rangle = w^2 |m, w; p, w_3\rangle, \quad y \quad W^3 |m, w; p, w_3\rangle = w_3 |m, w; p, w_3\rangle. \quad (1.66)$$

De Ec.(1.17) sabemos que el grupo de Poincaré es un grupo no compacto y en consecuencia todas sus representaciones unitarias son infinito-dimensionales¹¹ (la parte asociada a los boosts y momentum). Con tal de etiquetar la parte compacta, clasificaremos los grupos de simetría remanentes al fijar las transformaciones no compactas, dichos grupos de simetría remanentes son los *little group*.

Clasificaremos las representaciones según su masa sea nula o no.

¹¹Están etiquetadas por un parámetro continuo.

Representaciones masivas: En primer lugar consideraremos las representaciones para las cuales $p^2 = m^2 > 0$. El grupo de Lorentz propio ortocrono preserva el signo de p_0 , con lo cual las representaciones son generadas para un valor de p^2 y el signo de p_0 constantes. Dado que la representación tiene masa no nula, siempre podemos ubicarnos en el sistema de referencia en reposo,

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0). \quad (1.67)$$

De Ec.(1.52) vemos que en dicho sistema el pseudovector de Pauli-Lubanski toma la forma:

$$W^\mu = (0, -mJ^i), \quad (1.68)$$

es decir, se reduce al operador de momento angular total. Así, una representación masiva estará etiquetada por los autovalores

$$\begin{aligned} J^2 |m, j; p, j_3\rangle &= j(j+1) |m, j; p, j_3\rangle, \\ J^3 |m, j; p, j_3\rangle &= j_3 |m, j; p, j_3\rangle, \end{aligned} \quad (1.69)$$

es decir, existen $2j + 1$ estados etiquetados por su masa y su espín (ver Apéndice B).

Representaciones no masivas: En el caso $p^2 = 0$ ya no es posible analizar usar el sistema de referencia en reposo. De Ec.(1.53) vemos que el pseudovector de Pauli-Lubanski es ortogonal al momentum (en cualquier sistema de referencia), con lo cual ambas cantidades son proporcionales,

$$W^\mu = hP^\mu, \quad (1.70)$$

al igual que sus autovalores $w^\mu = hp^\mu$. En un sistema de referencia $p^\mu = (p_0, p^i)$ se cumple que $(p_0)^2 = (p^i)^2$, usando esto y Ec.(1.52) vemos que

$$h = \frac{W^0}{P^0} = \frac{P_i J^i}{|P^i|}, \quad (1.71)$$

es decir, h es la proyección del espín de la representación a lo largo del momentum de la misma, en conclusión, la *helicidad* de la representación. Así, los estados no masivos serán representados por $|p, h\rangle$ y $|p, -h\rangle$ ¹².

¹²Deben considerarse ambas debido a que la transformación bajo *CPT* también es una representación irreducible.

Representaciones del álgebra de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$

Para analizar las representaciones del álgebra de supersimetría representada en Ec.(1.45) debemos identificar sus operadores de Casimir. El álgebra de supersimetría posee dos operadores de Casimir

$$C_1 = P_\mu P^\mu, \quad y \quad C_2 = (\mathcal{W}_\mu P_\nu - \mathcal{W}_\nu P_\mu) (\mathcal{W}^\mu P^\nu - \mathcal{W}^\nu P^\mu), \quad (1.72)$$

donde \mathcal{W}^μ es la versión supersimétrica del pseudovector de Pauli-Lubanski¹³

$$\mathcal{W}^\mu = W^\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta. \quad (1.73)$$

Una característica de las representaciones del álgebra de supersimetría es la *degenerancia de Bose-Fermi*, es decir, que existe el mismo número de estados bosónicos y fermionicos. Para probar esto debemos notar que, en primer lugar y debido a sus dimensiones, los operadores fermionicos $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ cambian en una unidad el número de bosones y fermiones

$$Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |\text{bosón}\rangle \sim |\text{fermión}\rangle, \quad Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |\text{fermión}\rangle \sim |\text{bosón}\rangle, \quad (1.74)$$

esto puede ser ejemplificado utilizando el *operador de número fermiónico*, N_F , de tal forma que

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-1)^{N_F}. \quad (1.75)$$

De lo anterior podemos extraer que el anticonmutador $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}$ mapea el sector bosónico/fermiónico en sí mismo, por lo tanto, para un estado ψ se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(-1)^{N_F} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] \psi &= \text{Tr} [(-1)^{N_F} (Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} + \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha)] \psi \\ &= \text{Tr} [-Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} + (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha] \psi \\ &= \text{Tr} [-Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} + Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}}] \psi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Por otro lado, utilizando el anticonmutador de las supercargas de Ec.(1.45) se deduce que:

$$\text{Tr} [(-1)^{N_F} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] \psi \propto \text{Tr} [(-1)^{N_F} P_\mu] \psi = 0, \quad (1.77)$$

y ya que el estado posee un momentum fijo, entonces la única posibilidad es que se cumpla¹⁴

$$\text{Tr} [(-1)^{N_F}] \psi = 0. \quad (1.78)$$

¹³Y por lo tanto representa la versión supersimétrica del espín.

¹⁴ $\text{Tr} [(-1)^{N_F}]$ es el *índice de Witten*.

Dado que $(-1)^{N_F} = \pm 1$ para bosones/fermiones, entonces Ec.(1.78) solo se cumple si

$$n_B = n_F, \quad (1.79)$$

en otras palabras, el número de fermiones y bosones de la representación es el mismo.

La estrategia para clasificar los estados que pertenecen a una misma representación será en primer lugar utilizar las supercargas $Q_{1,2}$ como operadores de aniquilación y $\bar{Q}_{1\dot{2}}$ como operadores de creación¹⁵,

$$Q_{1,2} \propto a_{1,2}, \quad \bar{Q}_{1,2} \propto a_{1,2}^\dagger. \quad (1.80)$$

Luego, considerando un estado que sea aniquilado por ambos operadores de aniquilación podremos construir los demás usando los de creación. Debido a las reglas de anticonmutación de las supercargas, los posibles estados creados solo pueden ser:

$$|0\rangle, \quad a_1^\dagger |0\rangle, \quad a_2^\dagger |0\rangle, \quad \text{y} \quad a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle. \quad (1.81)$$

Representaciones no masivas: Para una representación no masiva siempre es posible ubicarse en un sistema de referencia de la forma

$$p^\mu = (E, 0, 0, 0, E). \quad (1.82)$$

En dicho sistema el anticonmutador de supercargas se reduce a

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2E(\sigma^0 + \sigma^3) \\ &= 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

De aquí se concluye que la acción de Q_2 y $\bar{Q}_{\dot{2}}$ sobre la representación $|p, h\rangle$ es nula

$$\langle p, h | \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} |p, h\rangle = 0 \quad (1.84)$$

y por lo tanto:

$$Q_2 |p, h\rangle = \bar{Q}_{\dot{2}} |p, h\rangle = 0. \quad (1.85)$$

Por otro lado, siempre es posible escoger un estado que sea aniquilado por Q_1 ,

$$Q_1 |p, h\rangle = 0. \quad (1.86)$$

¹⁵Con alguna constante de proporcionalidad que normalice los estados.

Ahora veremos que sucede con la helicidad de los estados creados por las supercargas. En primer lugar calculemos el conmutador entre el pseudovector de Pauli-Lubanski y una supercarga:

$$[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu [M^{\rho\sigma}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}]. \quad (1.87)$$

Usando Ec.(1.45):

$$[W_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu (\bar{\sigma}^{\rho\sigma})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}. \quad (1.88)$$

Debido al sistema de referencia de Ec.(1.82) nos conviene analizar la componente W_0 ,

$$\begin{aligned} [W_0, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] |p, h\rangle &= -\frac{i}{2} \epsilon_{03ij} P_3 (\bar{\sigma}^{ij})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |p, h\rangle \\ &= \frac{i}{8} \epsilon_{03ij} P^3 (\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |p, h\rangle \\ &= -\frac{1}{2} p_3 (\sigma^3)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |p, h\rangle, \end{aligned} \quad (1.89)$$

pero $p_3 = -p_0$, de modo que:

$$[W_0, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] |p, h\rangle = \frac{1}{2} p_0 (\sigma^3)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |p, h\rangle. \quad (1.90)$$

Usando Ec.(1.70) vemos que $W_0 |p, h\rangle = h p_0 |p, h\rangle$. Reemplazándolo en el resultado anterior y desarrollando el conmutador se obtiene:

$$W_0 \bar{Q}^{\dot{\alpha}} |p, h\rangle - \bar{Q}^{\dot{\alpha}} W_0 |p, h\rangle = \frac{1}{2} p_0 (\sigma^3)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |p, h\rangle, \quad (1.91)$$

y en consecuencia:

$$W_0 \bar{Q}^{\dot{\alpha}} |p, h\rangle = \left(\frac{1}{2} p_0 (\sigma^3)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} + h p_0 \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \right) |p, h\rangle. \quad (1.92)$$

Ya que estamos interesados en la acción de la supercarga \bar{Q}_1 analizaremos la componente $\dot{2}$. Usando el hecho de que $(\sigma^3)^{\dot{2}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} = -\bar{Q}^{\dot{2}}$ se observa que

$$W_0 \bar{Q}^{\dot{2}} |p, h\rangle = \left(h - \frac{1}{2} \right) \bar{Q}^{\dot{2}} |p, h\rangle, \quad (1.93)$$

es decir, el estado $\bar{Q}^2 |p, h\rangle$ tiene helicidad $h - \frac{1}{2}$.

Ya que

$$\bar{Q}^2 = \epsilon^{2i} \bar{Q}_i = -\bar{Q}_i, \quad (1.94)$$

entonces la supercarga \bar{Q}_i disminuye en $\frac{1}{2}$ la helicidad del estado. De Ec.(1.99) vemos que la normalización del estado debe ser:

$$|p, h - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}} \bar{Q}_i |p, h\rangle. \quad (1.95)$$

Puesto que en nuestro sistema de referencia \bar{Q}_2 no crea nuevos estados, podemos afirmar que la representación no masiva está conformada por un estado de helicidad h , un estado de helicidad $h - \frac{1}{2}$ y sus conjugados CPT , $|p, \pm h\rangle$, $|p, \pm (h - \frac{1}{2})\rangle$.

Para este trabajo hay dos representaciones relevantes: aquella que comienza con $h = \frac{1}{2}$ y aquella que empieza con $h = 1$.

$h = \frac{1}{2}$: El estado inicial será $|p, \frac{1}{2}\rangle$, y los demás se construyen de Ec.(1.95) y sus conjugados CPT , por lo tanto la representación está conformada por los estados:

$$\{|p, \frac{1}{2}\rangle, |p, -\frac{1}{2}\rangle, |p, 0\rangle, |p, 0'\rangle\}, \quad (1.96)$$

que son dos estados de espín $\frac{1}{2}$ que conforman un espinor de Weyl y dos campos escalares que conforman un campo escalar complejo, esta representación se conoce como *supermultiplete quiral no masivo*.

$h = 1$: El estado inicial será $|p, 1\rangle$, por lo tanto la representación está conformada por,

$$\{|p, 1\rangle, |p, -1\rangle, |p, \frac{1}{2}\rangle, |p, -\frac{1}{2}\rangle\}, \quad (1.97)$$

que son dos estados de espín $\frac{1}{2}$ que conforman un espinor de Weyl y dos polarizaciones transversales que conforman un campo vectorial sin masa, esta representación se conoce como *supermultiplete vectorial no masivo*.

Representaciones masivas: Para clasificar las representaciones masivas, al igual que el caso del grupo de Poincaré nos ubicaremos en el sistema de referencia en reposo

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad (1.98)$$

si volvemos a analizar el anticonmutador, podremos ver que en este sistema

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2m(\sigma^0) \\ &= 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Los operadores de Casimir tienen la forma

$$C_1\psi = P_\mu P^\mu \psi = m^2\psi, \quad (1.100)$$

y

$$\begin{aligned} C_2\psi &= (\mathcal{W}_\mu P_\nu - \mathcal{W}_\nu P_\mu) (\mathcal{W}^\mu P^\nu - \mathcal{W}^\nu P^\mu) \psi \\ &= 2(\mathcal{W}_\mu \mathcal{W}^\mu P_\nu P^\nu - \mathcal{W}_\mu P^\mu \mathcal{W}_\nu P^\nu) \psi. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Calculando ambos miembros:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\mu \mathcal{W}^\mu P_\nu P^\nu \psi &= m^2 \left(W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \right) \left(W^\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \right) \psi \\ &= m^2 \left(W_\mu W^\mu - \frac{1}{2} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (W_\mu \bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta + \frac{1}{16} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \right) \psi \\ &= m^2 \left(m^2 J_i J^i - \frac{m}{2} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (J_i \bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta + \frac{1}{16} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \bar{Q}_{\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} Q_\delta \right) \psi, \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\mu P^\mu \mathcal{W}_\nu P^\nu \psi &= \left(W_\mu P^\mu W_\nu P^\nu - \frac{1}{2} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (P_\mu \bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta W_\nu P^\nu + \frac{1}{16} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (P_\mu \bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \bar{Q}_{\dot{\gamma}} (P_\nu \bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\delta} Q_\delta \right) \psi \\ &= \frac{m^2}{16} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^0)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \bar{Q}_{\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^0)^{\dot{\gamma}\delta} Q_\delta \psi, \end{aligned} \quad (1.103)$$

se puede obtener la forma del operador, que se reduce a:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2m^4 \left(J_i J^i - \frac{1}{2m} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (J_i \bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta + \frac{1}{16m^4} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta \bar{Q}_{\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\gamma}\delta} Q_\delta \right) \\ &= 4m^2 \Xi_i \Xi^i, \end{aligned} \quad (1.104)$$

donde

$$\Xi^i = J^i - \frac{1}{4m} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_{\beta} \quad (1.105)$$

es la versión supersimétrica del operador de momento angular y cumple el álgebra de rotaciones:

$$[\Xi^i, \Xi^j] = i\epsilon^{ijk} \Xi_k, \quad (1.106)$$

esto quiere decir que sus autovalores serán:

$$\Xi^2 \psi = \xi(\xi + 1) \psi. \quad (1.107)$$

Ahora consideraremos un estado $|0\rangle$ que es aniquilado por todas las supercargas. Para este estado el operador de momento angular supersimétrico toma la forma

$$\begin{aligned} \Xi |0\rangle &= J^i |0\rangle - \frac{1}{4m} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\alpha}\beta} Q_{\beta} |0\rangle \\ &= J^i |0\rangle, \end{aligned} \quad (1.108)$$

y por lo tanto el momento angular es simplemente el momento angular no supersimétrico, así, etiquetaremos dicho estado por $|0\rangle = |m, j; p, j_3\rangle$. Ahora necesitamos analizar cuál es el espín de los estados creados, para ello necesitamos los conmutadores de los operadores J^i y J^2 con las supercargas. De Ec.(1.87) vemos que:

$$[W_0, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = P^i [J_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] + J^i [P_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -\frac{i}{2} \epsilon_{0\nu\rho\sigma} P^\nu (\bar{\sigma}^{\rho\sigma})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \quad (1.109)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} P^i [J_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= -\frac{i}{2} \epsilon_{0\nu\rho\sigma} P^\nu (\bar{\sigma}^{\rho\sigma})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon_{0ijk} P^i (\bar{\sigma}^{jk})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \\ &= -\frac{1}{2} P^i (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (1.110)$$

y en conclusión:

$$[J_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}. \quad (1.111)$$

De forma análoga se obtiene

$$[J_i, Q_\alpha] = \frac{1}{2}(\sigma_i)_\alpha{}^\beta Q_\beta. \quad (1.112)$$

Usando ambas relaciones podemos encontrar los conmutadores con J^2 . Notemos que

$$[J^2, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = J^i [J_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] + [J_i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] J^i, \quad (1.113)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} [J^2, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} J^i \bar{Q}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^i \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} [J^i, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] - (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^i \\ &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^i)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}} \bar{Q}^{\dot{\delta}} - (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^i \\ &= \frac{3}{4} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} - (\bar{\sigma}_i)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^i. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Del mismo modo:

$$[J^2, Q_\alpha] = \frac{3}{4} Q_\alpha + (\sigma_i)_\alpha{}^\beta Q_\beta J^i. \quad (1.115)$$

De lo anterior puede demostrarse además que:

$$[J^2, \bar{Q}^{\dot{2}} \bar{Q}^{\dot{1}}] = [J^2, \bar{Q}^{\dot{1}} \bar{Q}^{\dot{2}}] = 0. \quad (1.116)$$

Definimos los estado normalizados:

$$|m, j; p, j_3\rangle_{\dot{1}(\dot{2})} = \frac{Q^{\dot{1}(\dot{2})}}{\sqrt{2m}} |m, j; p, j_3\rangle, \quad (1.117)$$

y aplicamos el operador J_3 :

$$\begin{aligned} J_3 |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{1}} &= J_3 \frac{\bar{Q}^{\dot{1}}}{\sqrt{2m}} |m, j; p, j_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} [J_3, \bar{Q}^{\dot{1}}] |m, j; p, j_3\rangle + \frac{\bar{Q}^{\dot{1}}}{\sqrt{2m}} J_3 |m, j; p, j_3\rangle \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2m}} (\bar{\sigma}_3)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} |m, j; p, j_3\rangle + j_3 \frac{\bar{Q}^{\dot{1}}}{\sqrt{2m}} |m, j; p, j_3\rangle \\ &= \left(j_3 - \frac{1}{2} \right) |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{1}}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

De manera similar se logra:

$$J_3 |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{2}} = \left(j_3 + \frac{1}{2}\right) |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{2}}. \quad (1.119)$$

Ahora veremos la componente J_3 del estado creado por ambas supercargas¹⁶,

$$\begin{aligned} J_3 |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{2}, \dot{1}} &= \frac{1}{2m} J_3 \bar{Q}^{\dot{2}} \bar{Q}^{\dot{1}} |m, j; p, j_3\rangle \\ &= \frac{1}{2m} \left([J_3, \bar{Q}^{\dot{2}}] \bar{Q}^{\dot{1}} |m, j; p, j_3\rangle + \bar{Q}^{\dot{2}} J_3 \bar{Q}^{\dot{1}} |m, j; p, j_3\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\left(j_3 + \frac{1}{2}\right) \bar{Q}^{\dot{2}} \bar{Q}^{\dot{1}} |m, j; p, j_3\rangle + \left(j_3 - \frac{1}{2}\right) \bar{Q}^{\dot{2}} \bar{Q}^{\dot{1}} |m, j; p, j_3\rangle \right) \\ &= j_3 |m, j; p, j_3\rangle_{\dot{2}, \dot{1}}, \end{aligned} \quad (1.120)$$

y se obtiene el mismo resultado para $|m, j; p, j_3\rangle_{\dot{1}, \dot{2}}$.

Para el momento angular total, solo analizaremos el caso relevante para este trabajo, en el cual el supermomento angular inicial es nulo, $\xi = \xi_3 = j = j_3 = 0$, y para ello haremos uso de los operadores $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$, que en este caso cumplen:

$$[J_+, \bar{Q}^{\dot{1}}] = [J_-, \bar{Q}^{\dot{2}}] = 0, \quad (1.121)$$

y $J^2 = J_+ J_- + (J_3)^2$. El estado inicial será $|m, 0; p, 0\rangle$, de Ec.(1.114) y Ec.(1.117) obtenemos:

$$\begin{aligned} J^2 |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{1}} &= ([J^2, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] + \bar{Q}^{\dot{\alpha}} J^2) |m, 0; p, 0\rangle \\ &= \left(\frac{3}{4} \bar{Q}^{\dot{1}} - (\bar{\sigma}_1)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^1 - (\bar{\sigma}_2)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^2 - (\bar{\sigma}_3)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} J^3 \right) |m, 0; p, 0\rangle \\ &= \left(\frac{3}{4} \bar{Q}^{\dot{1}} - \bar{Q}^{\dot{2}} J^- - \bar{Q}^{\dot{1}} J^3 \right) |m, 0; p, 0\rangle \\ &= \frac{3}{4} |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{1}}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Siguiendo un proceso similar:

$$J^2 |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{2}} = \frac{3}{4} |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{2}}. \quad (1.123)$$

¹⁶El subíndice $\dot{2}, \dot{1}$ indica que primero se aplicó $\bar{Q}^{\dot{1}}$ y luego $\bar{Q}^{\dot{2}}$ y viceversa.

Ya que debe cumplirse $J^2 |m, j; p, j_3\rangle_{i(\dot{2})} = j(j+1) |m, j; p, j_3\rangle_{i(\dot{2})}$, entonces se deduce que para ambos estados $j = \frac{1}{2}$. Por otro lado, de Ec.(1.118) y Ec.(1.119) vemos que:

$$\begin{aligned} J_3 |m, 0; p, 0\rangle_i &= -\frac{1}{2} |m, 0; p, 0\rangle_i, \\ J_3 |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{2}} &= \frac{1}{2} |m, 0; p, 0\rangle_{\dot{2}}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Solo nos queda comprobar los estados $|m, j; p, j_3\rangle_{\dot{2}, i}$ y $|m, j; p, j_3\rangle_{i, \dot{2}}$. De Ec.(1.120) sabemos que ambos poseen $j_3 = 0$, y de Ec.(1.116) vemos que j no cambia para estos estados. Así, la representación está conformada por los estados:

$$\left\{ |m, 0, p, 0\rangle, \quad |m, 0', p, 0'\rangle, \quad |m, \frac{1}{2}, p, \frac{1}{2}\rangle, \quad |m, \frac{1}{2}, p, -\frac{1}{2}\rangle \right\}, \quad (1.125)$$

que son dos estados de espín $\frac{1}{2}$ que conforman un espinor de Weyl y dos campos escalares que conforman un campo escalar complejo, esta representación recibe el nombre de *supermultiplete quiral masivo*.

1.3. Teoría de campos supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$

En esta sección se describirá la construcción de acciones invariantes bajo supersimetría. Una forma de realizar supersimetría es extendiendo el espaciotiempo para incluir dimensiones “fermiónicas” conformadas por variables anticonmutativas, esta extensión se conoce como *superespacio* y los campos definidos sobre este superespacio se denominan *supercampos*.

1.3.1. Representación en supercampos

Un campo ordinario es una función de las coordenadas espaciotemporales, mientras que un supercampo Σ es una función de las coordenadas del superespacio, el cual además de las coordenadas usuales $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ posee pares de variables anticonmutativas¹⁷ de Grassmann $\{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\}$ las cuales transforman como espinores de Weyl de dos componentes (Para una explicación detallada del cálculo usando variables de Grassmann ver Apéndice C). En esta sección veremos como construir acciones invariantes de supersimetría de las cuales se obtienen lagrangianos de modelos supersimétricos.

¹⁷Cumplen $\left\{ \theta_\alpha, \theta_\beta \right\} = \left\{ \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \right\} = \left\{ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \right\} = 0$.

En teoría de campos, estamos interesados en la forma en la cual transforma un campo inducido por una transformación de Poincaré de sus coordenadas. Un campo $\mathcal{F}(x)$ será además un elemento de un espacio de Hilbert, por lo tanto transformará bajo una representación en el espacio de Hilbert del grupo de Poincaré, es decir,

$$\mathcal{F}'^i(x') = \mathcal{F}'^i(T(\Lambda, a)x) = U^i_j \mathcal{F}^j(x). \quad (1.126)$$

Al ser U una representación del grupo de Poincaré, un grupo de Lie, entonces puede ser expresado como la exponencial de los generadores del grupo por sus parámetros.

En el grupo de Poincaré, las traslaciones de las coordenadas son generadas por el operador de energía-momentum P^μ , mientras que en el superespacio una traslación de las coordenadas fermionicas será generada por las supercargas, $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Para teorías con $\mathcal{N} = 1$ sólo tenemos un par de supercargas y por ende sólo un par de coordenadas fermiónicas.

Una transformación finita del grupo de supersimetría con $\mathcal{N} = 1$ tendrá la forma

$$\mathcal{T}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = \exp \left[i \left(\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - x_\mu P^\mu \right) \right]. \quad (1.127)$$

Analizaremos su regla composición aplicando dos elementos finitos $\mathcal{T}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \mathcal{T}(y^\mu, \varphi^\alpha, \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}})$ del grupo. Debido a la regla de Baker-Campbell-Hausdorff sabemos que

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}, \quad (1.128)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \mathcal{T}(y^\mu, \varphi^\alpha, \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}) = \exp \left[i \left(\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - x_\mu P^\mu + \varphi^\alpha Q_\alpha + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - y_\mu P^\mu \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \theta^\alpha \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \left[\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - x_\mu P^\mu, \varphi^\alpha Q_\alpha + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - y_\mu P^\mu \right] + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Para ver la contribución de los conmutadores debemos calcular el conmutador de los generadores multiplicando parámetros anticonmutativos. De Ec.(1.45) vemos que:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu, \quad (1.130)$$

si multiplicamos los parámetros $\theta_\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ podemos observar que el único conmutador no nulo es:

$$\begin{aligned} 2\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} P_\mu &= \theta^\alpha (Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha) \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \\ &= \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha Q_\alpha - \theta^\alpha Q_\alpha \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \\ &= [\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha Q_\alpha]. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Usando la formula de Baker-Campbell-Hausdorff se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \mathcal{T}(y^\mu, \varphi^\alpha, \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}) &= \exp \left[i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - ix_\mu P^\mu + i\varphi^\alpha Q_\alpha + i\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - iy_\mu P^\mu \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} [\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha Q_\alpha] - \frac{1}{2} [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \varphi^\alpha Q_\alpha] \right] \\
&= \exp \left[i(\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - x_\mu P^\mu + \varphi^\alpha Q_\alpha + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - y_\mu P^\mu \right. \\
&\quad \left. - i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} P_\mu + i\varphi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_\mu) \right] \\
&= \exp \left[i((\theta^\alpha + \varphi^\alpha) Q_\alpha + (\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}) \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - (x_\mu + y_\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\varphi} - i\varphi\sigma^\mu\bar{\theta}) P^\mu) \right] \\
&= \mathcal{T}(x^\mu + y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\varphi} - i\varphi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta^\alpha + \varphi^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}). \tag{1.132}
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que bajo una transformación de supersimetría las coordenadas transforman como:

$$(x'^\mu, \theta'^\alpha, \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}) = \mathcal{T}(y^\mu, \varphi^\alpha, \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}) (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = (x^\mu + y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\varphi} - i\varphi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta^\alpha + \varphi^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}). \tag{1.133}$$

Por lo tanto, una función de las coordenadas del superespacio $\Sigma(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, ante una transformación de supersimetría de sus coordenadas cambiará de la forma:

$$\begin{aligned}
\Sigma'(x'^\mu, \theta'^\alpha, \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}) &= \exp [i(\varphi^\alpha Q_\alpha + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - y_\mu P^\mu)] \Sigma(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \\
&= \Sigma(x^\mu + y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\varphi} - i\varphi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta^\alpha + \varphi^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}). \tag{1.134}
\end{aligned}$$

Si expandimos en serie el lado derecho de la última línea se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Sigma'(x'^\mu, \theta'^\alpha, \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}) &= \Sigma(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) + (y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\varphi} - i\varphi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta^\alpha + \varphi^\alpha) \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\mu} \\
&\quad + \varphi^\alpha \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta^\alpha} + \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \dots \tag{1.135}
\end{aligned}$$

lo cual debe ser consistente con expandir en serie la exponencial de la primera línea de Ec.(1.134). Esto solo se cumple si

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad iQ_\alpha = \partial_{\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \text{y} \quad i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu. \tag{1.136}$$

Esta representación del álgebra de supersimetría invita a definir *derivadas covariantes supersimétricas* “fermiónicas”:

$$\begin{aligned}
D_\alpha &= \partial_{\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu. \tag{1.137}
\end{aligned}$$

De Ec.(1.45), Ec.(1.136) y Ec.(1.137) puede demostrarse que:

$$\begin{aligned}
\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \\
\{D_\alpha, D_\alpha\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = 0 \\
\{D_\alpha, Q_\alpha\} &= \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 0.
\end{aligned} \tag{1.138}$$

Debido a las propiedades antisimétricas de las variables de Grassmann (ver Apéndice C), un supercampo escalar $\Sigma(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ tendrá un número finito de términos en su expansión en serie en dichas variables:

$$\begin{aligned}
\Sigma(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) &= a(x) + \alpha_\alpha(x)\theta^\alpha + \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + b(x)\theta_\alpha\theta^\alpha + c(x)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + A_\mu(x)\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
&\quad + \bar{\gamma}_{\dot{\alpha}}(x)\theta_\beta\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \delta_\alpha(x)\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\alpha + d(x)\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}},
\end{aligned} \tag{1.139}$$

donde a, b, c y d son campos escalares, α, β, γ y δ son espinores y A es un campo vectorial. Es fácil notar que este supercampo no es una representación irreducible del álgebra de supersimetría, ya que posee muchas más componentes en comparación con las que deberían tener las representaciones según la sección anterior, sin embargo, es posible definir supercampos que sí sean representaciones irreducibles imponiendo restricciones sobre el supercampo escalar. En lo que sigue veremos los tipos de supercampos necesarios para este trabajo: supercampos quirales y supercampos vectoriales.

1.3.2. Supercampo quiral

Llamaremos *supercampo quiral/antiquiral*, Φ/Φ^\dagger , a un supercampo que cumpla la restricción:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi &= 0 \\
D_\alpha\Phi^\dagger &= 0.
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Ahora es necesario saber el contenido de campos que contiene. De Ec.(1.136) se puede concluir que:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta &= 0 \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}}\left(x^\mu + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right) &= -i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 0 \\
D_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= 0 \\
D_\alpha\left(x^\mu - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right) &= i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} - i\partial_{\theta^\alpha}\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 0,
\end{aligned} \tag{1.141}$$

lo que indica que la solución más general de Ec.(1.140) son funciones $\Phi(y^\mu, \theta^\alpha)$ y $\Phi^\dagger(\bar{y}^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ con

$$\begin{aligned} y^\mu &= x^\mu + i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \\ \bar{y}^\mu &= x^\mu - i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Restringiendo Ec.(1.139) a las soluciones generales de Ec.(1.140) obtenemos la solución más general para sus componentes:

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta) &= a(y) + \alpha_\alpha(y)\theta^\alpha + b(y)\theta_\alpha\theta^\alpha, \\ \Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) &= a'(\bar{y}) + \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(\bar{y})\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + c(\bar{y})\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Si realizamos una expansión en serie de los campos en las variables de Ec.(1.142) se obtiene¹⁸

$$\begin{aligned} a(y) &= a(x) + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu a(x) - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \partial^\mu a(x), \\ \alpha_\alpha(y) &= \alpha_\alpha(x) + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \alpha_\alpha(x), \\ b(y) &= b(x), \\ a'(\bar{y}) &= a'(x) - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu a(x) - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \partial^\mu a(x), \\ \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(\bar{y}) &= \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x) - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x), \\ c(\bar{y}) &= c(x). \end{aligned} \quad (1.144)$$

Así, las componentes del supercampo quirral serán:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta) &= a(x) + \alpha_\alpha(x)\theta^\alpha + b(x)\theta_\alpha\theta^\alpha + i\partial_\mu a(x)\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\ &\quad + \frac{i}{2}\partial_\mu \alpha_\alpha(x) (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta_\beta \theta^\beta - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \partial^\mu a(x) \\ \Phi^\dagger(x, \bar{\theta}) &= a'(x) + \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + c(x)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\partial_\mu a(x)\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\ &\quad - \frac{i}{2}\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \partial^\mu a'(x). \end{aligned} \quad (1.145)$$

Por razones prácticas definiremos

$$\begin{aligned} a(x) &= \phi(x), & a'(x) &= \phi^\dagger(x) \\ \alpha_\alpha(x) &= \sqrt{2}\psi_\alpha(x), & \bar{\beta}_{\dot{\alpha}}(x) &= \sqrt{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) \\ b(x) &= F(x), & c(x) &= F^\dagger(x), \end{aligned} \quad (1.146)$$

¹⁸Notar que no consideramos los órdenes superiores en las variables de Grassmann que se anulan.

con lo cual el supercampo quiral tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, \theta) &= \phi(x) + \sqrt{2}\psi_\alpha(x)\theta^\alpha + F(x)\theta_\alpha\theta^\alpha + i\partial_\mu\phi(x)\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi^\alpha(x)(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta_\beta\theta^\beta - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \\
\Phi^\dagger(x, \bar{\theta}) &= \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + F^\dagger(x)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\partial_\mu\phi(x)\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{4}\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger(x). \tag{1.147}
\end{aligned}$$

Para ver como transforman las componentes del supercampo aplicaremos una transformación de supersimetría al supercampo quiral:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x^\mu, \theta^\alpha) &= \exp[i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}})]\Phi(x^\mu, \theta^\alpha) \\
&= \Phi(x^\mu, \theta^\alpha) + i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}})\Phi(x^\mu, \theta^\alpha) \\
&= \Phi(x^\mu, \theta^\alpha) + \delta\Phi(x^\mu, \theta^\alpha). \tag{1.148}
\end{aligned}$$

Usando Ec.(1.136) y Ec.(1.147) podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi(x^\mu, \theta^\alpha) &= i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}})\Phi(x^\mu, \theta^\alpha) \\
&= (\xi^\alpha\partial_{\theta^\alpha} + i\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu)\Phi(x^\mu, \theta^\alpha). \tag{1.149}
\end{aligned}$$

Si computamos únicamente los términos que contribuyen se obtiene:

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha\partial_{\theta^\alpha}\Phi &= \sqrt{2}\xi^\alpha\psi_\alpha + 2F\xi_\alpha\theta^\alpha \\
\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\Phi &= i\partial_\mu\phi\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\theta_\beta\theta^\beta \\
i\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\Phi &= 0 \\
i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\Phi &= i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\beta\theta^\beta. \tag{1.150}
\end{aligned}$$

Comparando con Ec.(1.147) concluimos que:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}\xi^\alpha\psi_\alpha \\
\delta\psi_\alpha &= \sqrt{2}\xi_\alpha F + \sqrt{2}i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi \\
\delta F &= \sqrt{2}i\partial_\mu\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}. \tag{1.151}
\end{aligned}$$

Finalmente veremos como se construye el lagrangiano para este modelo. Una acción S invariante de supersimetría se obtiene de la integración en las variables de Grassmann de

una función dependiente de las coordenadas del superespacio $\mathcal{S}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{S}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}). \quad (1.152)$$

Debido a la forma en que se integran las funciones de variables de Grassmann (Apéndice C) vemos que el lagrangiano será simplemente el coeficiente $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ de la función \mathcal{S} , esto se conoce como *término*– D ¹⁹.

El término cinético de una teoría para un supercampo quiral vendrá dado por el término– D de la función

$$\mathcal{S}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = \Phi^\dagger(x, \bar{\theta})\Phi(x, \theta). \quad (1.153)$$

Si realizamos la multiplicación del lado derecho usando Ec.(1.147) y escribiendo solo el término– D se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger(x, \bar{\theta})\Phi(x, \theta) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4}\phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{4}\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^\dagger + \frac{i}{2}\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi} \sigma^\mu \psi + F^\dagger F \right). \end{aligned} \quad (1.154)$$

Manejando los términos encontramos la acción para el supermultiplete quiral no masivo de Ec.(1.96):

$$S = \int d^4x \{ \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^\dagger F \}. \quad (1.155)$$

Tal como nos muestra la Ec.(1.96), esta es la acción para un campo escalar complejo y un fermión de Weyl, en adición a un campo escalar complejo que no se propaga²⁰, el campo auxiliar F . La razón del por qué aparece este campo auxiliar es debido a que el número de grados de libertad bosónicos y fermionicos debe ser el mismo como indica Ec.(1.79), esto debe cumplirse tanto on-shell como off-shell. Al imponer las ecuaciones de movimiento existen dos grados de libertad bosónicos asociados a ϕ y ϕ^\dagger y dos grados de libertad fermionicos asociados al fermión de Weyl mientras que off-shell el fermión de Weyl posee dos grados de libertad extra que se compensan con los del campo auxiliar.

Para añadir términos de interacción entre las componentes del supercampo, vamos a considerar una función $W(\Phi)$ del supercampo quiral que llamaremos *superpotencial*. Ya

¹⁹El término– D transforma como una derivada total.

²⁰Y por lo tanto no da lugar a estados de una partícula.

que es una función únicamente del supercampo quiral, el superpotencial en si mismo es un supercampo quiral y si lo expandimos en serie de potencias de las variables de Grassmann se tiene:

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2} \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \psi_\alpha \theta^\alpha + \left[\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi^2} \psi_\alpha \psi^\alpha \right] \theta_\beta \theta^\beta, \quad (1.156)$$

mas términos que no contribuyen por ser derivadas totales. W debe entenderse entonces como una función únicamente de θ y por lo tanto su acción se obtendrá integrando solamente en θ^2 , esto se conoce como término $-F$. La parte de interacción más general de la acción contendrá también al término $-F$ del hermitico conjugado del superpotencial:

$$S_{\text{int}} = \int d^4x d^2\theta W(\Phi) + \int d^4x d^2\bar{\theta} \bar{W}^\dagger(\Phi^\dagger). \quad (1.157)$$

Finalmente, la acción de un supercampo quiral interactuante, también conocido como *modelo de Wess-Zumino* [87], será:

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}^\dagger(x, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta) + \left[\int d^4x d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c} \right], \quad (1.158)$$

o en términos de sus componentes de campos:

$$S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^\dagger F + \left[\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi^2} \psi_\alpha \psi^\alpha + \text{h.c} \right] \right\}. \quad (1.159)$$

Si consideramos la parte fermiónica como la teoría original, entonces las partículas escalares reciben el nombre de *sfermiones*, por ejemplo, si ψ es un electrón, ϕ es un selectrón.

Finalmente considerar que la acción renormalizable más general en $d = 4$ contiene un superpotencial con términos cúbicos o de menor grado.

1.3.3. Supercampo vectorial

Llamaremos *supercampo vectorial* V a un supercampo que cumpla la restricción

$$V = V^\dagger. \quad (1.160)$$

De Ec.(1.139) vemos que esta relación se traduce en las siguientes relaciones para las componentes del supercampo:

$$\begin{aligned} a^\dagger(x) &= a(x), & \beta_\alpha(x) &= \alpha_\alpha(x), & c^\dagger(x) &= b(x) \\ A_\mu^\dagger(x) &= A_\mu(x), & \gamma_\alpha(x) &= \delta_\alpha(x), & d^\dagger(x) &= d(x), \end{aligned} \quad (1.161)$$

por lo tanto sus componentes serán:

$$\begin{aligned} V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) &= a(x) + \alpha_\alpha(x)\theta^\alpha + \bar{\alpha}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + b(x)\theta_\alpha\theta^\alpha + b^\dagger(x)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + A_\mu(x)\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\ &+ \bar{\gamma}_{\dot{\alpha}}(x)\theta_\beta\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \gamma_\alpha(x)\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\alpha + d(x)\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Por conveniencia reescribiremos los campos como

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha(x) &= i\chi_\alpha(x) \\ b(x) &= \frac{i}{2}(w(x) + iz(x)) \\ \gamma_\alpha(x) &= -i\left(\lambda_\alpha(x) + \frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)\right) \\ d(x) &= \frac{1}{2}\left(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu a(x)\right). \end{aligned} \quad (1.163)$$

Así, las componentes del supercampo vectorial serán:

$$\begin{aligned} V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) &= a(x) + i\chi_\alpha(x)\theta^\alpha - i\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(x)\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(w(x) + iz(x))\theta_\alpha\theta^\alpha - \frac{i}{2}(w(x) - iz(x))\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\ &+ A_\mu(x)\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\left(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(x) + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\chi^\alpha(x)\right)\theta_\beta\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\ &- i\left(\lambda_\alpha(x) + \frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)\right)\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\alpha + \frac{1}{2}\left(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu a(x)\right)\theta_\alpha\theta^\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Si comparamos esta expansión con el supermultiplete vectorial no masivo de Ec.(1.97), vemos que tenemos demasiados grados de libertad: 4 campos escalares reales, un campo vectorial y dos espinores de Weyl, por lo tanto es necesario restringir aún más el supercampo. Una forma de hacerlo es imponer una simetría extra en la acción. Comenzando con un supercampo quiral como el de Ec.(1.147), vemos que la combinación $i(\Phi - \Phi^\dagger)$ es un supercampo real. Así, una transformación puede ser:

$$V' \rightarrow V + i(\Phi - \Phi^\dagger). \quad (1.165)$$

A nivel de componentes la transformación es:

$$\begin{aligned}
a'(x) &\rightarrow a(x) + i(\phi(x) - \phi^\dagger(x)) \\
\chi'_\alpha(x) &\rightarrow \chi_\alpha(x) + \sqrt{2}\psi_\alpha(x) \\
\frac{1}{2}(w'(x) + iz'(x)) &\rightarrow \frac{1}{2}(w(x) + iz(x)) + F(x) \\
A'_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu(\phi(x) + \phi^\dagger(x)) \\
\lambda'_\alpha(x) &\rightarrow \lambda_\alpha(x) \\
D'(x) &\rightarrow D(x).
\end{aligned} \tag{1.166}$$

Si definimos $\varphi(x) = (\phi(x) + \phi^\dagger(x))$ vemos que la transformación del campo vectorial es idéntica a una transformación de gauge usual, por lo tanto a nivel de supercampo vectorial sería una transformación de “supergauge”. Para mantener esta simetría de gauge ordinaria y restringir las componentes notemos que esta libertad nos permite ajustar $a = \chi = w = z = 0$. Esta estrategia se conoce como el *gauge de Wess-Zumino* [88] y el supercampo vectorial se reduce a:

$$V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = A_\mu(x) \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(x) \theta_\beta \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\lambda_\alpha(x) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\alpha + \frac{1}{2}D(x) \theta_\alpha \theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \tag{1.167}$$

con la libertad remanente:

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \varphi(x) \\
\lambda'_\alpha(x) &\rightarrow \lambda_\alpha(x) \\
D'(x) &\rightarrow D(x).
\end{aligned} \tag{1.168}$$

Una consecuencia inmediata de Ec.(1.167) es que el cuadrado del supercampo vectorial es proporcional únicamente al campo vectorial:

$$V^2(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = \frac{1}{2}A_\mu A^\mu \theta_\alpha \theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \tag{1.169}$$

mientras que potencias superiores se anulan.

Veamos como transforman las componentes bajo una transformación de supersimetría. De forma análoga al caso del supercampo quiral tendremos que:

$$\begin{aligned}
\delta V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) &= i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}) V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \\
&= (\xi^\alpha \partial_{\theta^\alpha} + i\xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu) V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}),
\end{aligned} \tag{1.170}$$

calculando cada término se obtiene:

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \partial_{\theta^\alpha} V &= A_\mu(x) \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + 2i \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(x) \xi_\beta \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i \xi^\alpha \lambda_\alpha(x) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + D(x) \xi_\alpha \theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} V &= A_\mu(x) \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(x) \theta_\beta \theta^\beta - 2i \lambda_\alpha(x) \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\alpha + D(x) \theta_\alpha \theta^\alpha \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
i \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu V &= i \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu A_\mu(x) \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} - \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\
i \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu V &= i \theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu A_\mu(x) \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \partial_\mu \lambda^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}, \tag{1.171}
\end{aligned}$$

por lo tanto al comparar con Ec.(1.167) se observa que:

$$\begin{aligned}
\delta A^\mu &= i \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - i \lambda^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \\
\delta \lambda_\alpha &= -i D \xi_\alpha - \frac{1}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta \xi_\beta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
\delta D &= \partial_\mu \lambda^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} - \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}. \tag{1.172}
\end{aligned}$$

Anteriormente y con tal de restringir los grados de libertad del supercampo, pusimos como condición que la acción fuera invariante a la transformación de Ec.(1.165). Una forma de lograr esto es que la acción sea proporcional a derivadas covariantes supersimétricas del supercampo vectorial ya que, por definición, los supercampos quirales de la transformación se anularán al aplicar la derivada. Por ello definiremos el *supercampo de intensidad de campo*:

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha V \\
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= D^\alpha D_\alpha \bar{D}_{\dot{\alpha}} V. \tag{1.173}
\end{aligned}$$

Las dos derivadas $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ son necesarias para que el objeto sea invariante, esto debido a que las derivadas tienen anticonmutador no nulo y por lo tanto

$$\begin{aligned}
W'_\alpha &= \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha [V + i(\Phi - \Phi^\dagger)] \\
&= W_\alpha + i \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \Phi \\
&= W_\alpha - i \bar{D}^{\dot{\alpha}} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} \Phi \\
&= W_\alpha. \tag{1.174}
\end{aligned}$$

Para encontrar las componentes, es útil notar que W_α es un supercampo quiral espinorial, ya que cumple:

$$\bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha V = 0. \tag{1.175}$$

Usando la solución de Ec.(1.143) para supercampos quirales vemos que la forma mas general, usando las componentes de Ec.(1.167), de W_α es:

$$W_\alpha = 4i\lambda_\alpha(y) + 4D(y)\theta_\alpha + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu(y) - \partial_\nu A_\mu(y))\theta^\beta + 4(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y)\theta_\beta\theta^\beta. \quad (1.176)$$

Si expandimos en serie usando la definición de Ec.(1.142) se obtiene:

$$W_\alpha = 4i\lambda_\alpha(x) + 4D(x)\theta_\alpha + 2i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\theta^\beta - 4\partial_\mu\lambda_\alpha(x)\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} + 4(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)\theta_\beta\theta^\beta + 2i\partial_\mu D(x)(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta_\beta\theta^\beta - \frac{i}{2}\partial_\mu\partial^\mu\lambda_\alpha(x)\theta_\beta\theta^\beta\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \quad (1.177)$$

Para construir una acción supersimétrica y dado que W_α tiene un índice espinorial, tendremos que contraerlo con otro espinor izquierdo, y dado que sólo depende de θ entonces la acción vendrá del término $-F$. Calculando el todos los coeficientes con dos θ se consigue:²¹

$$S = \frac{1}{32} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 \right\}, \quad (1.178)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$. Comparando con Ec.(1.97) vemos que la anterior es la acción para un supermultiplete vectorial no masivo, con la adición del campo auxiliar D que cumple la misma función que el campo F en el modelo de Wess-Zumino, completar los grados de libertad off-shell. El campo A_μ es un bosón vectorial de gauge y el espinor de Weyl λ es su supercompañero, el *gaugino*.

1.4. Renormalización en teoría cuántica de campos

La teoría de renormalización ha sido un marco teórico fundamental en el éxito predictivo de las teorías cuánticas de campos relativistas, su desarrollo fue necesario para resolver el problema de las divergencias ultravioletas que surgía en los cálculos más allá del orden más bajo en teoría de perturbaciones y que hacían inaccesibles las predicciones de orden superior en términos computables. El problema yacía en expresar los observables únicamente en términos de los parámetros *desnudos* presentes en la acción (masas, constantes de acoplamiento), ya que lo que mostraban las divergencias en los resultados era que tales parámetros en realidad representaban cantidades *no mensurables* y por lo tanto no aptas para expresar objetos testeables en experimentos. Las divergencias pueden ser canceladas

²¹También se obtiene el término $-\frac{i}{8}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$, el cual no consideraremos por ser una derivada total.

expresando la teoría en término de *cantidades renormalizadas*, las cuales deben ser finitas y medibles, y si esta cancelación se produce a todo orden de teoría de perturbaciones entonces se dice que la teoría es *renormalizable*.

La teoría de renormalización convencional está compuesta de un conjunto de esquemas de sustracción de divergencias ultravioleta equivalentes, los cuales siguen un procedimiento algebraico que se basa en la *localidad* y el *conteo de potencias*. Por otro lado existe otra versión del proceso de renormalización iniciada por Kenneth Wilson [89, 90, 91] en la década de los 70 del siglo XX, la cual se basa en el *desacoplamiento* de los comportamientos a baja y alta energía de la teoría, permitiendo ignorar los efectos ultravioleta de la teoría, integrando fuera los grados de libertad de forma infinitesimal y dejándonos una *teoría renormalizada efectiva* a bajas energía.

Para un repaso más detallado sobre renormalización, se puede consultar [92, 93, 94, 95, 96, 97].

1.4.1. El grado de divergencia y la renormalizabilidad

Como se mencionó anteriormente la renormalización es necesaria debido a que los cálculos que involucran lazos dan lugar a integrales divergentes en el espacio de momentum, estas divergencias provienen del hecho de que el espaciotiempo es tratado como un continuo y en consecuencia, en el espacio de momentum no existe un límite ultravioleta para las frecuencias que circulan en los lazos cerrados. El *grado de divergencia* D de un diagrama corresponde a la diferencia de factores de momentum entre el numerador y denominador del integrando y se define por:

$$D = 4 - \sum_{\mathcal{F}} E_{\mathcal{F}}(s_{\mathcal{F}} + 1) - \sum_i V_i \Delta_i, \quad (1.179)$$

donde \mathcal{F} denota el tipo de campo, $E_{\mathcal{F}}$ el número de líneas externas del diagrama, $s_{\mathcal{F}}$ es un factor de escalamiento del propagador del tipo de campo, el cual adquiere valor 0 para bosones no masivos y $\frac{1}{2}$ para fermiones, V_i el número de vértices correspondiente a la i -ésima interacción y,

$$\Delta_i = 4 - \delta_i - \sum_{\mathcal{F}} n_{i,\mathcal{F}}(s_{\mathcal{F}} + 1), \quad (1.180)$$

es un parámetro que depende de la estructura interna del diagrama; δ_i es el número de derivadas del operador y $n_{i,\mathcal{F}}$ es el número de campos de tipo \mathcal{F} en la i -ésima interacción.

Si $D > 0$ significa que la parte de la amplitud en la que todos los momentum internos van a infinito diverge como:

$$\int k^{D-1} dk, \quad (1.181)$$

mientras que si $D = 0$ la divergencia es logarítmica y si $D < 0$ la integral converge.

Para los casos con $D \leq 0$, si consideramos integrales de la forma:

$$\int \frac{k^D}{(k + \lambda)} dk, \quad (1.182)$$

podemos notar que al derivar $D+1$ veces se obtiene un valor finito, esto puede interpretarse como que el valor de la integral corresponde a un polinomio de grado D en λ ,

$$\int \frac{k^D}{(k + \lambda)} dk = \sum_i^D c_i \lambda^i + \lambda^D \ln \lambda, \quad (1.183)$$

donde los coeficientes c_i son infinitos²². A su vez, cada miembro del polinomio se puede interpretar como la contribución de i operadores de interacción en el lagrangiano tal que $n_{i,\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}}$ y $\delta_i \leq D$, estos nuevos operadores de interacción proveerán nuevos parámetros, los *contratérminos*, que en conjunto con los parámetros desnudos darán lugar a las constantes renormalizadas de la teoría. Las teorías para las cuales hay un número finito de interacciones que pueden ser redefinidas usando un número finito de contratérminos se conocen como *teorías renormalizables*.

El factor Δ_i juega un papel clave en la renormalizabilidad de una teoría. Notemos que la constante de acoplamiento de un operador en el lagrangiano tendrá dimensión:

$$\sum_i V_i \Delta_i, \quad (1.184)$$

esto puede verse ya que el lagrangiano debe tener las mismas dimensiones de masa que el espaciotiempo, por lo tanto un operador que contenga \mathcal{F} campos de dimensión $d_{\mathcal{F}}$ y δ_i derivadas tendrá dimensión:

$$4 - \delta_i - \sum_{\mathcal{F}} n_{i,\mathcal{F}} d_{\mathcal{F}}, \quad (1.185)$$

²²El término proporcional a $\ln \lambda$ aparece debido a que la $D+1$ -ésima derivada siempre es proporcional a $1/\lambda$.

pero $d_{\mathcal{F}} = 1 + s_{\mathcal{F}}$ ²³, por lo tanto la dimensión será:

$$4 - \delta_i - \sum_{\mathcal{F}} n_{i,\mathcal{F}}(1 + s_{\mathcal{F}}) = \Delta_i. \quad (1.186)$$

Esto nos dice que el acoplamiento asociado a dicho operador de interacción tendrá dimensiones de masa Δ_i . Observando la Ec.(1.179) vemos que si $\Delta_i \geq 0$ entonces el grado de divergencia de cualquier diagrama tendrá un valor máximo de:

$$D_{\text{máx}} = 4 - \sum_{\mathcal{F}} E_{\mathcal{F}}(s_{\mathcal{F}} + 1), \quad (1.187)$$

por lo tanto habrá un número *finito* de diagramas dependientes de las líneas externas y el tipo de campo cuyas integrales sean divergentes, mientras que si $\Delta_i < 0$ esto se invierte y la expresión de Ec.(1.187) pasa a ser el grado mínimo de divergencia y existirán infinitos diagramas con integrales divergentes.

Este análisis nos permite categorizar las teorías respecto a la cantidad de diagramas divergentes que posee:

Teorías renormalizables: Si todas las interacciones de una teoría poseen constantes de acoplamiento con $\Delta \geq 0$ entonces la teoría posee un número finito de diagramas divergentes, divergencias que podrán ser absorbidas por un número finito de contratérminos a través de la redefinición de un conjunto limitado de constantes físicas.

Teorías no renormalizables: Si todas o parte de las interacciones poseen constantes de acoplamiento con $\Delta < 0$ entonces para cualquier proceso con un número fijo de líneas externas habrá un número de vértices que volverá divergente la integral, por lo tanto se necesitaría una cantidad infinita de contratérminos y un número infinito de constantes físicas para absorberlas.

1.4.2. Regularización ultravioleta y la acción renormalizada en teoría de perturbaciones

Nuestro objetivo es expresar una teoría en términos de una acción con parámetros renormalizados, es decir, cuyos campos y parámetros están debidamente ajustados respecto a

²³La dimensión asintótica del propagador es $k^{-2-2s_{\mathcal{F}}}$ y depende de la dimensión de los campos como $-4 + 2d_{\mathcal{F}}$.

observables físicos. Como vimos en la parte anterior, en una teoría renormalizable aparece una cantidad finita de contratérminos que absorben el número finito de integrales divergentes que aparecen en las funciones de correlación. Una teoría se define por su acción en términos de sus parámetros desnudos

$$S_0(\varphi_{0,\mathcal{F}}, C_{0,i}, m_{0,j}), \quad (1.188)$$

donde $\varphi_{0,\mathcal{F}}$ es el conjunto de campos de tipo \mathcal{F} , $C_{0,i}$ el conjunto de acoplamientos de la i -ésima interacción y $m_{0,j}$ es el j -ésimo parámetro de masa. Dado que estamos considerando una teoría renormalizable, entonces la cancelación de divergencias cambiará la normalización de los operadores, para tomar en cuenta esto definiremos los campos y acoplamientos renormalizados como:

$$\begin{aligned} \varphi_{0,\mathcal{F}} &= Z_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}} \varphi_{\mathcal{F}} \\ C_{0,i} &= Z_{C,i} C_i \\ m_{0,j} &= Z_{m,j} m_j, \end{aligned} \quad (1.189)$$

donde $Z_{\mathcal{F}}$, $Z_{m,j}$ y $Z_{C,i}$ se denominan *constantes de renormalización* de los campos, masas y acoplamientos. Estas constantes se relacionan con los contratérminos δ_{ϑ} de la forma:

$$Z_{\vartheta} = 1 + \delta_{\vartheta}, \quad (1.190)$$

donde $\vartheta = \mathcal{F}, i, j$ de modo que la acción de Ec.(1.188) será separada en dos contribuciones:

$$S_0(\varphi_{0,\mathcal{F}}, C_{0,i}, m_{0,j}) = S(\varphi_{\mathcal{F}}, C_i, m_j) + S_{\text{cont}}(\varphi_{\mathcal{F}}, C_i, m_j, \delta_{\vartheta}, \mu), \quad (1.191)$$

aquí S_{cont} es la parte de la acción que posee los contratérminos y μ será un *punto de renormalización* que veremos en breve. Es importante aclarar que tanto las simetrías de la acción, como la simetría de gauge, pueden hacer que las constantes de renormalización no sean completamente independientes unas de otras.

Considerando la acción separada como en Ec.(1.191), veremos que tendremos un conjunto de reglas de Feynman provenientes de S y otro conjunto proveniente de S_{cont} dependiente de los contratérminos, la estrategia será calcular las funciones de correlación de la teoría utilizando ambas contribuciones y fijar el valor de los contratérminos de tal forma que la suma de constantes renormalizadas y contratérminos sea finito.

Con tal de manipular las integrales divergentes es necesario introducir algún parámetro que exhiba explícitamente el comportamiento divergente del diagrama, este proceso se conoce como *regularización* y los procedimientos más comunes son:

Regularización mediante un cutoff de momentum: Consiste en regularizar la divergencia ultravioleta cortando directamente las frecuencias ultravioleta en alguna escala Λ ya sea suave o fuertemente:

$$\int_0^\infty d^d k I(k, m) \rightarrow \int_0^\infty d^d k I(k, m) \theta(\Lambda - |k|), \quad \int_0^\infty d^d k I(k, m) e^{-\frac{k^2}{\Lambda}}, \dots, \quad (1.192)$$

de un modo tal que la forma funcional del resultado sea una función que diverge para $\Lambda \rightarrow \infty$.

Regularización de Pauli-Villars: Consiste en introducir un término de masa ficticio M_{PV} en los propagadores:

$$\int_0^\infty d^d k I(k, m) \rightarrow \int_0^\infty d^d k I(k, m + M_{PV}), \quad (1.193)$$

con tal que la forma funcional del resultado sea una función que diverge para $M_{PV} \rightarrow 0$.

Regularización dimensional: Consiste en modificar la dimensionalidad de la integral $d \rightarrow d - \epsilon$ e integrar su continuación analítica:

$$\int_0^\infty d^d k I(k, m) \rightarrow \int_0^\infty d^{d-\epsilon} k I(k, m) \quad (1.194)$$

y así de obtener un resultado divergente para $\epsilon \rightarrow 0$.

Los valores concretos de los contratérminos se obtendrán iterativamente orden a orden en teoría de perturbaciones, para ello expandiremos las constantes de Ec.(1.190) en potencias de los acoplamientos:

$$Z_\vartheta(C_i, m_j, \mu, \Theta) = \sum_\lambda \omega_\vartheta^{(\lambda)}(m_j, \mu, \Theta) C_i^\lambda, \quad (1.195)$$

donde Θ denota a alguno de los reguladores mencionados anteriormente y μ la escala a la cual se fijarán las constantes renormalizadas. El punto crucial es que los coeficientes $\omega_\vartheta^{(\lambda)}$ deben ser escogidos de tal forma que para cada orden de teoría de perturbaciones la acción sea finita, es decir, que los contratérminos absorban todas las divergencias ultravioletas de los diagramas divergentes.

1.4.3. El esquema de renormalización

La introducción de los reguladores tiene la finalidad de parametrizar la divergencia en un número finito de términos que divergen para valores extremos del regulador, esto hace que los coeficientes de la expansión perturbativa de las constantes de renormalización posean una parte divergente y una finita:

$$\omega_{\vartheta}^{(\lambda)}(m_j, \mu, \Theta) = \zeta_{\text{div}, \vartheta}^{(\lambda)}(\Theta) + \zeta_{\text{fin}, \vartheta}^{(\lambda)}(m_j, \mu, \Theta). \quad (1.196)$$

El requerimiento de que los parámetros renormalizados sean finitos únicamente fija la parte divergente de los coeficientes, mas no la parte finita del mismo. Observando la Ec.(1.191) vemos que tenemos mas parámetros de los necesarios para identificar de forma única la teoría²⁴ con lo cual las partes finitas de los coeficientes, así como la escala de renormalización son arbitrarias. El procedimiento mediante el cual se fijan las partes finitas de los contratérminos se conoce como el *esquema de renormalización*. Algunos esquemas comunes utilizados son:

Esquema MS (substracción mínima): Consiste en definir el contratérmino de tal forma que cancele la parte divergente mediante una sustracción trivial. Mantiene una dependencia explícita en el punto de renormalización μ .

Esquema $\overline{\text{MS}}$: Consiste en definir el contratérmino de forma que cancele no solo la parte divergente sino también las partes finitas mediante sustracción. Al igual que el caso anterior se mantiene una dependencia explícita en el punto de renormalización μ .

Esquema On-Shell: En este esquema, en vez de utilizar la sustracción, se imponen condiciones de renormalizabilidad sobre el polo y el residuo del propagador renormalizado de tal forma que dicho polo sea la masa física de la partícula.

Los esquemas DR/ $\overline{\text{DR}}$ (reducción dimensional): Utilizado en física más allá del modelo estándar y en particular en supersimetría, consiste en mantener la dimensionalidad de ciertos campos dentro de la regularización dimensional con tal de mantener los grados

²⁴La acción desnuda solo depende de los acoplamientos y las masas, mientras que los contratérminos entregan una dependencia extra en los parámetros finitos y la escala de renormalización a través de la Ec.(1.196).

de libertad, así como las simetrías (supersimetría). Al igual que en la substracción mínima, $\overline{\text{DR}}/\overline{\text{DR}}$ se diferencian en la cantidad de términos finitos que se cancelan.

Debido a que la elección de esquema es arbitraria, se esperaría que los observables físicos sean independientes del mismo, sin embargo, debido al truncamiento de la serie perturbativa esto no se produce y, salvo los de orden más bajo, los coeficientes de la expansión sí dependen del esquema que se utilice.

1.4.4. El grupo de renormalización

Pese al éxito del método de cancelación de divergencias que hemos visto hasta ahora, la necesidad de realizar los cálculos dentro de la teoría de perturbaciones sigue teniendo problemas con los cuales lidiar, uno de ellos es el problema de que la contribución de un n -ésimo lazo a un proceso que involucra un momentum externo k será proporcional a

$$g^n \left[\ln \frac{k^2}{m^2} \right]^n, \quad (1.197)$$

con g la constante de acoplamiento, esto puede ser visto ya desde la Ec.(1.183). Este tipo de contribución rompe la teoría de perturbaciones para momentum grande aún cuando el acoplamiento sea pequeño. Incluso en teorías no masivas, es necesario definir una escala de renormalización μ que proporcionará términos del estilo $\ln E/\mu$ que serán divergentes para $|\ln E/\mu| \gg 1$. En particular, si un observable $\Sigma(E, X, g, m)$, donde g son constantes de acoplamiento y X son variables cinemáticas, tiene dimensiones de masa d , el análisis dimensional nos dice que:

$$\Sigma(E, X, g, m) = E^d \Sigma \left(1, X, g, \frac{m}{E} \right), \quad (1.198)$$

y por lo tanto para altas energías el comportamiento asintótico debería ser

$$\Sigma(E, X, g, m) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} E^d \Sigma(1, X, g, 0), \quad (1.199)$$

sin embargo, lo que se encuentra en realidad es que el factor de escalamiento contiene potencias de $\ln E/m$ que rompen el análisis dimensional. Esto muestra que por mucho que escojamos una escala de renormalización conveniente en la cual $\mu \sim E$, dicho resultado no puede extenderse a escalas de energía arbitrariamente altas, esto se conoce como *el problema de los grandes logaritmos*.

La solución a este problema fue dada por Gell-Mann y Low [98] a través del *grupo de renormalización*. La idea detrás de este concepto consiste en utilizar una *escala móvil de*

renormalización, de tal forma que en cada punto de esta escala se cambien las prescripciones de renormalización con tal de recuperar la ley de potencias de Ec.(1.199).

Si definimos una constante de acoplamiento g_μ que no dependa de m para $\mu \gg m$ entonces se cumplirá que

$$\Sigma(E, X, g_\mu, m, \mu) = E^d \Sigma \left(1, X, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E} \right). \quad (1.200)$$

Dado que μ es arbitrario, podemos escoger $\mu = E$ tal que

$$\Sigma(E, X, g_\mu, m, \mu) = E^d \Sigma \left(1, X, g_E, \frac{m}{E}, 1 \right), \quad (1.201)$$

el cual no contendrá singularidades ya que, por construcción, g_E es independiente de m . Ahora es posible calcular Σ en teoría de perturbaciones:

$$\Sigma = \sum_i c_i g_E^i, \quad (1.202)$$

de tal forma que

$$\Sigma(E, X, g_\mu, m, \mu) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} E^d \Sigma(1, X, g_E, 0, 1) \quad (1.203)$$

para cada orden finito. Usando el procedimiento de renormalización podemos definir:

$$g_\mu = g + F(\Theta, \mu, m), \quad (1.204)$$

o de forma equivalente:

$$g_\mu = g_R + F'(\mu, m), \quad (1.205)$$

sin embargo nos encontramos con el problema de que F y F' seguirán conteniendo términos proporcionales a $\ln \mu/m$ de tal forma que la expansión de Ec.(1.202) sólo será válida para $|\ln \mu/m| \ll 1$.

La solución es calcular g_μ para una escala móvil de renormalización, de tal forma que, luego de calcular g_μ , calculamos una constante $g_{\mu'}$ en términos de g_μ tal que $\mu'/\mu \ll 1$ de forma iterativa hasta g_E :

$$g_\mu \rightarrow g_{\mu'}(g_\mu) \rightarrow g_{\mu''}(g_{\mu'}) \rightarrow \dots \rightarrow g_E. \quad (1.206)$$

La relación entre constantes de acoplamiento en distintos puntos de renormalización será de la forma

$$g_{\mu'} = G\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right). \quad (1.207)$$

Derivando respecto a μ'/μ en ambos lados obtendremos:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu'} g_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial \mu'/\mu} G\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right), \quad (1.208)$$

tal que en el límite $\mu'/\mu \rightarrow 1$ se consigue una constante de acoplamiento dependiente de la escala de renormalización gobernada por la ecuación diferencial:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu'/\mu} G\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \Big|_{\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) \rightarrow 1}. \quad (1.209)$$

Dado que hemos escogido μ para que no existan singularidades infrarrojas, entonces para $\mu \gg m$ se tendrá

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu'/\mu} G\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, 0\right) \Big|_{\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) \rightarrow 1} = \beta(g_{\mu}), \quad (1.210)$$

donde la función de la parte derecha fue bautizada por C. Callan y K. Symanzik como *la función beta* [99] y puede ser calculada perturbativamente. Esta representa la ecuación diferencial que gobierna el flujo continuo de la constante g en la escala móvil de energía.

Este procedimiento no solo debe realizarse para las constantes de acoplamiento sino que, con tal de evitar el problema de los grandes logaritmos del todo, es necesario calcular el flujo de todos los parámetros de la teoría respecto a la escala móvil de renormalización.

Consideremos un correlador desnudo $G_{0;n}$ donde n corresponde al número de campos. Por simplicidad solo consideraremos un tipo de campo masivo. La relación entre el correlador desnudo y renormalizado será,

$$G_{0;n}(\varphi_0, g_0, m_0) = Z_{\varphi}^{\frac{n}{2}} G_n(\varphi, g, m, \mu). \quad (1.211)$$

Consideraremos μ como una escala móvil y que las constantes y masa dependen de dicha escala, además, siguiendo la definición de la función beta en Ec.(1.210), tomaremos la derivada respecto a μ de Ec.(1.211):

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{0;n}(\varphi_0, g_0, m_0) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[Z_{\varphi}^{\frac{n}{2}} G_n(\varphi, g, m, \mu) \right]. \quad (1.212)$$

Desarrollando el lado derecho se obtiene:

$$Z_\varphi^{\frac{n}{2}} \left[\frac{n}{2} \frac{1}{Z_\varphi} \mu \frac{\partial Z_\varphi}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} \right] G_n(\varphi, g, m, \mu). \quad (1.213)$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{Z_\varphi} \mu \frac{\partial Z_\varphi}{\partial \mu}, \\ \gamma_m &= \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}, \end{aligned} \quad (1.214)$$

además de la función beta definida anteriormente, y teniendo en cuenta que el correlador desnudo no depende de la escala de renormalización entonces obtenemos la ecuación

$$\left[\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} \gamma \right] G_n(\varphi, g, m, \mu) = 0, \quad (1.215)$$

conocida como la *ecuación de Callan-Symanzik* [99, 100]. El término γ se conoce como la *dimensión anómala* del campo φ y es la parte no canónica de la dimensión de escalamiento del correlador.

El conjunto de dimensiones anómalas y funciones beta forman las *ecuaciones del grupo de renormalización*.

1.4.5. La versión wilsoniana del grupo de renormalización

A principios de la década de 1970 del siglo XX, un grupo de físicos, siendo pionero el estadounidense Kenneth Wilson, desarrollaron una forma distinta de interpretar las ideas de renormalización y grupo de renormalización a través de principios físicos universales que involucran grados de libertad colectivos [101, 89, 90, 91, 102].

La versión wilsoniana de la renormalización se fundamenta en el principio de que la física a una cierta escala de energía que consideraríamos baja energía o escala infrarroja no depende de la física de alta energía o escala ultravioleta (para la escala que se considera), por lo tanto siempre es posible definir una *teoría efectiva* de baja energía despreciando las contribuciones de la escala ultravioleta. En la práctica esto se reduce a integrar sobre los grados de libertad, representados por campos, iterativamente sobre subconjuntos de grados de libertad escogidos convenientemente y calculando el cambio en la acción efectiva a través de un reescalamiento de los parámetros de la teoría. Esta es la generalización del

esquema de renormalización en bloques de grano grueso de Kadanoff [101] para el modelo Ising.

El primer paso consiste en eliminar los grados de libertad que representan fluctuaciones de distancias cortas respecto a cierta función de onda característica. Si $\Psi(k)$ representa el conjunto de campos de la teoría en el espacio de momentum, g el conjunto de constantes de acoplamiento y $S[\Psi, g]$ es la acción de la teoría, entonces se impone un cutoff ultravioleta de momentum Λ relacionado con la función de onda característica y respecto al cual se separarán los modos de baja y alta energía

$$\Psi(k) = \begin{cases} \Psi_{\text{UV}}(k) & \text{si } k > \Lambda \\ \Psi_{\text{IR}}(k) & \text{si } k < \Lambda \end{cases} \quad (1.216)$$

Integrando fuera los campos UV obtendremos una acción efectiva S_Λ para los campos IR de la forma:

$$\int \mathcal{D}\Psi e^{iS[\Psi, g]} = \int \mathcal{D}\Psi_{\text{IR}} e^{iS_\Lambda[\Psi_{\text{IR}}, g(\Lambda)]}, \quad (1.217)$$

donde

$$e^{iS_\Lambda[\Psi_{\text{IR}}, g(\Lambda)]} = \int_\Lambda \mathcal{D}\Psi_{\text{UV}} e^{iS[\Psi, g]}. \quad (1.218)$$

S_Λ es la *acción efectiva de Wilson*.

El cambio de parámetro Λ definirá entonces un mapeo no invertible entre el espacio de constantes efectivas $g'(\Lambda')$ y desnudas $g(\Lambda)$, donde las nuevas constantes de acoplamiento pueden ser todas aquellas que la simetría de la teoría permita.

El segundo paso consiste en el reescalamiento de los operadores (o de los campos) luego de integrar en un cascarón de momentum de ancho $\Lambda' < k < \Lambda$. En primer lugar los propios vectores de momentum cambiarán como

$$k^\mu \rightarrow \xi k^\mu, \quad (1.219)$$

donde $\xi = \Lambda/\Lambda'$ es el ancho del cascarón de momentum sobre el que estamos integrando. Un campo será reescalado entonces de la forma:

$$\Psi(k') = \frac{1}{\xi^{D_\xi} \sqrt{Z_\xi}} \Psi\left(\frac{k'}{\xi}\right), \quad (1.220)$$

donde se interpreta D_ξ como la dimensión canónica de reescalamiento del campo y Z_ξ se relaciona con la constante de renormalización de la función de onda de la renormalización usual.

Si analizamos el comportamiento lineal de la acción efectiva respecto a un punto especial del espacio de acoplamientos que se conoce como *punto fijo* y del cual hablaremos más adelante, se obtiene una expansión en infinitos operadores con infinitas constantes de acoplamiento

$$S_\Lambda [\Psi_{\text{IR}}, g(\Lambda)] = S_* + \int d^d x \sum_\nu^\infty g_\nu(\Lambda) \mathcal{O}^\nu, \quad (1.221)$$

donde S_* es la acción efectiva evaluada en el punto fijo. Los coeficientes $g_\nu(\Lambda)$ son las constantes de acoplamiento y dependen del cutoff. Para analizar su evolución bajo el cambio del mismo definiremos las constantes adimensionales a una cierta escala Λ como²⁵:

$$\tilde{g}_i(\Lambda) = \Lambda^{-\Delta_i} g_i(\Lambda). \quad (1.222)$$

Por simple análisis dimensional, la relación entre dos constantes definidas a diferentes valores del cutoff debe tener la forma

$$\tilde{g}'_i(\Lambda') = \mathcal{G} \left(\tilde{g}_i(\Lambda), \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right), \quad (1.223)$$

lo cual recuerda a Ec.(1.207), por lo tanto vemos que la relación de las constantes de acoplamiento a distintas escalas nos permite definir una función beta. Derivando ambos lados respecto al cambio infinitesimalmente de escalas obtenemos

$$\Lambda \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \Lambda} = \mathcal{G} \left(\tilde{g}_i(\Lambda), \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right) \Big|_{\frac{\Lambda'}{\Lambda} \rightarrow 1} = \beta_i(\tilde{g}_i(\Lambda)) \quad (1.224)$$

el análogo wilsoniano de las funciones beta.

Si comenzamos con un número finito de acoplamientos \tilde{g}_0 para una escala de cutoff Λ , para cualquier otro valor de cutoff $\Lambda' < \Lambda$ tendremos, por lo general, infinitos acoplamientos con valores no nulos para todos los operadores que las simetrías de la teoría permitan. En general, para $\Lambda' \ll \Lambda$ veremos que espacio de acoplamientos de la teoría se aproximará a un *espacio crítico* estable que es independiente tanto del cutoff como del espacio inicial de acoplamientos, estos son los puntos críticos en los cuales evaluamos la acción de

²⁵La dimensión es la misma que definimos en Ec.(1.180).

Ec.(1.221). El comportamiento que tendrá una constante de acoplamiento (y su operador asociado) respecto a dicho espacio crítico dependerá de la dimensión de escala que tenga dicha constante en relación con la dimensión espaciotemporal, lo cual nos permite clasificar las constantes como:

- Acoplamiento relevante, $\Delta_i > 0$
- Acoplamiento irrelevante, $\Delta_i < 0$
- Acoplamiento marginal, $\Delta_i = 0$.

Ante pequeñas perturbaciones del espacio crítico, los acoplamientos relevantes se alejan de la superficie mientras que los irrelevantes permanecen en ella, por otro lado los acoplamientos marginales tienen influencia a toda escala de energía (proporcionan las contribuciones logarítmicas de las funciones beta). Al igual que en el conteo de potencias de la renormalización usual, la dimensión del acoplamiento asegura que existe un número finito de operadores locales relevantes, lo cual define a una teoría renormalizable, del mismo modo, se puede demostrar que los acoplamientos en el espacio crítico siempre pueden parametrizarse según los acoplamientos definidos en el cutoff, lo cual fundamenta el hecho de que las constantes renormalizadas pueden ser escritas en función de las constantes desnudas.

Los espacios críticos están asociados a los *puntos fijos*, \tilde{g}_i^* , del espacio de acoplamientos, dichos puntos se definen como aquel en el cual todas las funciones beta de la teoría se anulan,

$$\beta_i(\tilde{g}_i^*) = 0. \tag{1.225}$$

Un punto fijo de vital importancia para las teorías cuánticas de campos es el *punto fijo trivial o gaussiano*, que corresponde al punto fijo en el que todas las constantes de acoplamiento se anulan, $\tilde{g}_i^* = 0$, y define a la teoría libre. Por otro lado, la existencia de puntos fijos no gaussianos demuestra que existen valores de las constantes de acoplamiento que generan un espacio crítico estable, el cual define una teoría física cuyos observables no dependen del cutoff y se relacionan con las transiciones de fase del modelo.

Con este contexto podemos enunciar el principio de la renormalización wilsoniana como que la física de bajas energías está determinada por un número finito de operadores relevantes o marginales, y en algunos casos por operadores irrelevantes para rangos de energía acotados, lo cual fundamenta el principio de que, partiendo de una teoría a una escala Λ , para otra escala $\Lambda' \wedge \Lambda$ se obtendrá una teoría efectiva que parecerá ser renormalizable.

Finalmente, si el procedimiento de renormalización se aplica a la acción en si misma, integrando sobre cascarones infinitesimales de momentum y reescalando en cada paso, el procedimiento estará descrito por la ecuación de Wilson:

$$\frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} = \mathcal{S}(S_\Lambda), \tag{1.226}$$

la cual representa un flujo en un espacio infinitodimensional de operadores. Encontrar de manera práctica el flujo de ciertos funcionales será el tema del Capítulo 3.

Capítulo 2

Teorías de gauge supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$

En este capítulo estudiaremos la construcción de teorías que acoplan supercampos quirales y vectoriales manteniendo la simetría de gauge. Para un repaso más profundo se puede acudir a Excelentes introducciones a supersimetría se pueden encontrar en [4, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 40].

2.1. Supercampo quiral acoplado a un supercampo vectorial con simetría $U(1)$

Nuestra meta es acoplar un supercampo quiral con uno vectorial, ambos dados por Ec.(1.158) y Ec.(1.178) y manteniendo la simetría de gauge,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &\rightarrow e^{ig\alpha(x)}\phi(x), & \phi^{\dagger'}(x) &= e^{-ig\alpha(x)}\phi^{\dagger}(x), \\ A'_{\mu}(x) &\rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde g es la constante de acoplamiento $U(1)$. El procedimiento estándar corresponde en reemplazar las derivadas usuales por derivadas covariantes:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + igA_{\mu}(x),\tag{2.2}$$

lo cual nos entrega los términos de interacción necesarios para preservar la simetría en la acción. La extensión supersimétrica de Ec.(2.1) sería modificar un supercampo quiral por

una fase y el supercampo vectorial por un término real proporcional a ambas fases, de tal modo que:

$$\begin{aligned}\Phi'(x, \theta) &\rightarrow e^{ig\Omega(x, \theta)}\Phi(x), & \Phi^\dagger(x, \bar{\theta}) &= e^{-ig\Omega^\dagger(x, \bar{\theta})}, & \text{y} \\ V'(x, \theta, \bar{\theta}) &\rightarrow V(x, \theta, \bar{\theta}) + i(\Omega - \Omega^\dagger).\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde Ω es un supercampo quirral y Ω^\dagger un supercampo antiquirral. La acción de Ec.(1.178) es invariante bajo esta transformación pero la de Ec.(1.158) no lo es. Una combinación que respeta Ec.(2.3) es [103]:

$$\Phi^\dagger e^{2gV} \Phi.\tag{2.4}$$

Debido al gauge de Wess-Zumino, Ec.(1.169), la función e^{2gV} tiene una expansión finita en serie de potencias de V . La acción será la suma de Ec.(1.158) con el término cinético modificado y Ec.(1.178):

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger(x, \bar{\theta}) e^{2gV} \Phi(x, \theta) + \left[\int d^4x d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c} \right] + \frac{1}{32} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha.\tag{2.5}$$

Por otro lado, a nivel de componentes, quisiéramos tener un término que rompa explícitamente la simetría de gauge sin violar la simetría de Lorentz, análogo a los usados para los gauge R_ξ ,

$$R_\xi = \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu.\tag{2.6}$$

En la formulación de supercampo este término es [103]:

$$S_{R_\xi} = \frac{2}{\xi} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V) (\bar{D}^2V) = \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu.\tag{2.7}$$

Finalmente la acción invariante de gauge para una transformación $U(1)$ del acoplamiento entre un supercampo quirral y uno vectorial será

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger(x, \bar{\theta}) e^{2gV} \Phi(x, \theta) + \left[\int d^4x d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c} \right] \\ &+ \frac{2}{\xi} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V) (\bar{D}^2V) + \frac{1}{32} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha,\end{aligned}\tag{2.8}$$

o, en términos de sus componentes de campos

$$S = \int d^4x (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^\dagger F + \left[\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^2} \psi_\alpha\psi^\alpha + \text{h.c.} \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu\lambda + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \sqrt{2}ig [\phi^\dagger\psi\lambda - \phi\bar{\psi}\bar{\lambda}] + g\phi^\dagger\phi D. \quad (2.9)$$

El superpotencial renormalizable más general es:

$$W(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{1}{6}y\phi^3, \quad (2.10)$$

con lo cual la acción renormalizable más general será

$$S = \int d^4x (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^\dagger F - \left[m\phi F + \frac{1}{2}y\phi^2 F - \frac{1}{2}m\phi\psi\psi + \text{h.c.} \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu\lambda + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \sqrt{2}ig [\phi^\dagger\psi\lambda - \phi\bar{\psi}\bar{\lambda}] + g\phi^\dagger\phi D. \quad (2.11)$$

2.2. Electrodinámica cuántica supersimétrica

La electrodinámica cuántica es la teoría que describe, en esencia, las interacciones de electrones, positrones y fotones [104, 18, 15], para promover esta descripción a una teoría supersimétrica, según el resultado de Ec.(1.79) debemos añadir supercompañeros escalares para el electrón y positrón y un supercompañero fermionico para el fotón. La acción de Ec.(2.11) que encontramos en la sección anterior solo contiene un fermión de Weyl, por lo tanto es necesario añadir otro supercampo quiral para describir tanto al electrón como el positrón. Si llamamos Φ_1 y Φ_2 a tales supercampos, entonces podemos definir los supercampos quirales complejos:

$$\begin{aligned} \Phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - i\Phi_2) \\ \Phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i\Phi_2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

los cuales transforman bajo una transformación de gauge $U(1)$ como

$$\Phi'_\pm \rightarrow e^{\pm 2ie\Omega} \Phi_\pm, \quad (2.13)$$

donde e es la carga eléctrica, por lo tanto Φ_- contiene al electrón y Φ_+ contiene al positrón. Esto hace que los productos:

$$\begin{aligned} & \Phi_-^\dagger e^{-2eV} \Phi_-, \quad \text{y} \\ & \Phi_+^\dagger e^{2eV} \Phi_+, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sean invariantes de gauge. La acción de este modelo, utilizando la redefinición $V \rightarrow \frac{1}{e}V$, será:

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\Phi_-^\dagger e^{-2V} \Phi_- + \Phi_+^\dagger e^{2V} \Phi_+ \right] + \left[\int d^4x d^2\theta W(\Phi_+, \Phi_-) + \text{h.c.} \right] \\ & + \frac{2}{\xi e^2} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V) (\bar{D}^2V) + \frac{1}{32e^2} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para la parte de interacción consideraremos el superpotencial más general invariante de gauge y renormalizable:

$$W(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{2}m\Phi_1^2 + \frac{1}{2}m\Phi_2^2 + m\Phi_1\Phi_2 + \text{h.c.}, \quad (2.16)$$

que en términos de Φ_- y Φ_+ es:

$$W(\Phi_-, \Phi_+) = m\Phi_- \Phi_+ + \text{h.c.} \quad (2.17)$$

Finalmente la acción para electrodinámica supersimétrica será:

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\Phi_-^\dagger e^{-2V} \Phi_- + \Phi_+^\dagger e^{2V} \Phi_+ \right] + \frac{1}{32e^2} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha \\ & + \frac{2}{\xi e^2} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V) (\bar{D}^2V) + m \left\{ \int d^4x d^2\theta \Phi_- \Phi_+ + \text{h.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

o en términos del contenido de campos:

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x D_\mu \phi_-^\dagger D^\mu \phi_- + \left(D_\mu \phi_+^\dagger \right)^\dagger D^\mu \phi_+ + i\bar{\psi}_- \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_- + i\bar{\psi}_+ \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_+ \\ & + F_-^\dagger F_- + F_+^\dagger F_+ - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi e^2} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{i}{e^2} \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2e^2} D^2 \\ & + i\sqrt{2} \left[\phi_-^\dagger \psi_- \lambda - \phi_+^\dagger \psi_+ \lambda \right] + i\sqrt{2} \left[\phi_+ \bar{\psi}_+ \bar{\lambda} - \phi_- \bar{\psi}_- \bar{\lambda} \right] + \left(\phi_-^\dagger \phi_- D - \phi_+^\dagger \phi_+ D \right) \\ & + m \left(\phi_- F_+ + \phi_+ F_- - \psi_- \cdot \psi_+ + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.1. Función beta perturbativa en electrodinámica cuántica supersimétrica

Como ya hemos visto anteriormente, en supersimetría es crucial el resultado de Ec.(1.79), el cual nos dice que el número de bosones y fermiones es igual para una representación del álgebra de supersimetría. La preservación de este resultado hace que sea complejo trabajar con procesos de renormalización que involucran cambios dimensionales, como la regularización dimensional, ya que los cambios en las dimensiones de los campos rompen explícitamente el resultado de Ec.(1.79) y por ende la supersimetría. Una modificación de esta muy usada en modelos supersimétricos es la regularización mediante reducción dimensional (DRED, por sus siglas en inglés) en conjunto con el esquema $\overline{\text{DR}}$ [105, 106, 107]. Sin embargo, en esta sección mostraremos el cálculo de la función beta a dos lazos usando el método de renormalización diferencial utilizado en [1].

El método de renormalización diferencial (DiffR, por sus siglas en inglés) es un método de renormalización en el espacio real, el cual consiste en reemplazar operadores singulares, y que por lo tanto no tienen transformada de Fourier, para distancias cortas por derivadas de operadores equivalentes que sean menos singulares. Si $\Sigma(x, g_i)$ es un correlador de n -puntos que depende de g_i acoplamientos, el cual depende de un conjunto de operadores $\mathcal{O}(x)$ singulares para distancias cortas, entonces es posible definir un operador renormalizado $\mathcal{O}_R(x)$ como:

$$\mathcal{O}_R(x) = \square G(x, M), \quad x \neq 0, \quad (2.20)$$

de tal forma que la transformada de Fourier se puede calcular mediante una integración por partes:

$$\int d^4x e^{ikx} \mathcal{O}_R(x) = \int d^4x e^{ikx} \square G(x, M) = F(k, M), \quad (2.21)$$

desechando los términos de superficie divergentes. El parámetro M puede ser absorbido en la redefinición de las constantes de acoplamiento de la teoría y funciona como una escala de renormalización. Respecto a los contratérminos, se encuentran definidos implícitamente en la condición de anular los términos de superficie divergentes. Usando los operadores renormalizados se pueden definir los correladores renormalizados $\Sigma_R(x, g_i^R)$.

La función beta a dos lazos para electrodinámica cuántica supersimétrica sin masa puede ser encontrada usando el método de campo de background en conjunto con la renormalización diferencial (en la sección 2.2 de [1] se puede encontrar el cálculo en todo

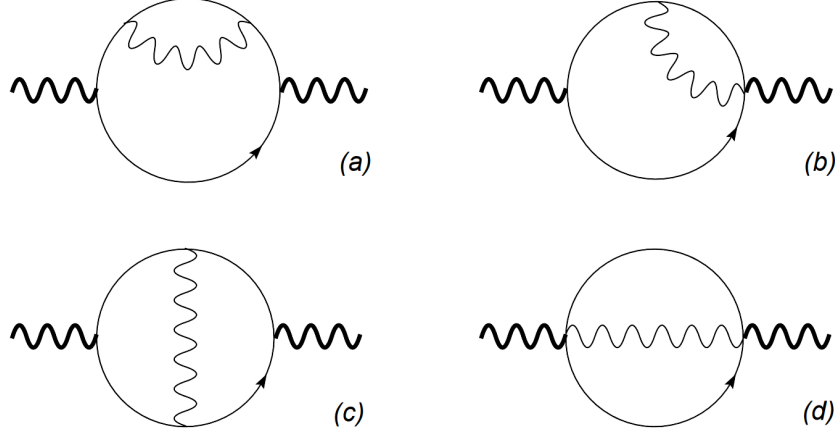


Figura 2.1: Diagramas relevantes para la autoenergía de vacío del campo de background en electrodinámica supersimétrica sin masa a dos lazos. Las líneas onduladas gruesas corresponden a los propagadores del campo de background externo, las líneas onduladas delgadas corresponden a los propagadores de los campos de gauge y las líneas sólidas son los propagadores de los campos de materia [1].

detalle), esto requiere reparametrizar el campo V_0 como una perturbación respecto a una configuración de background B

$$V_0 \rightarrow V + B. \quad (2.22)$$

La parte relevante de la acción efectiva para el background será:

$$\Gamma[B] = \int d^4x d^4y d^4\theta B(x, \theta) [D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha B(y, \theta)] \Gamma(x - y) + \dots \quad (2.23)$$

donde la función beta puede ser extraída de la función de dos puntos Γ . Los diagramas relevantes para la autoenergía de vacío del campo de background se encuentran en la Figura 2.1.

Usando la siguiente notación para los propagadores:

$$P_{ij} = \Delta(x_i - x_j) \delta^4(\theta_i - \theta_j) \equiv \Delta_{x_i x_j} \delta_{ij}, \quad (2.24)$$

las autoenergías desnudas para cada diagrama toman la forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma_+^{(2a)} &= -\frac{g^4}{2} \int d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z_3 d^8 z_4 B(z_1) B(z_2) P_{43} [D_3^2 \bar{D}_3^2 P_{43}] [\bar{D}_2^2 D_2^2 P_{42}] \\
&\quad \times [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{13}] [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{21}] \\
&\quad -\frac{g^4}{2} \int d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z_3 d^8 z_4 B(z_1) B(z_2) P_{43} [D_4^2 \bar{D}_4^2 P_{43}] [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{24}] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2 D_1^2 P_{31}] [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{12}], \tag{2.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_+^{(2b)} &= -g^4 \int d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z_3 B(z_1) B(z_2) P_{31} [D_3^2 \bar{D}_3^2 P_{31}] [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{23}] [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{12}] \\
&\quad -g^4 \int d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z_3 B(z_1) B(z_2) P_{31} [D_3^2 \bar{D}_3^2 P_{23}] [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{31}] [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{21}], \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_+^{(2c)} &= -\frac{g^4}{2} \int d^8 z_1 d^8 z_2 d^8 z_3 d^8 z_4 B(z_1) B(z_2) P_{34} [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{14}] [\bar{D}_1^2 D_1^2 P_{13}] \\
&\quad \times [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{23}] [\bar{D}_2^2 D_2^2 P_{24}], \tag{2.27}
\end{aligned}$$

y,

$$\Gamma_+^{(2d)} = -\frac{g^4}{2} \int d^8 z_1 d^8 z_2 B(z_1) B(z_2) [D_1^2 \bar{D}_1^2 P_{12}] P_{12} [D_2^2 \bar{D}_2^2 P_{12}]. \tag{2.28}$$

Mientras que los diagramas para Γ_- son idénticos. Luego del proceso de renormalización se encuentra la función de dos puntos renormalizada

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^2 &= 2 \left(\Gamma_+^{(2a)} + \Gamma_+^{(2b)} + \Gamma_+^{(2c)} + \Gamma_+^{(2d)} \right) \Big|_R \\
&= \frac{1}{2g^2} \delta^4(x) - \frac{1}{8(4\pi^2)^2} \square \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} - \frac{g^2}{16(4\pi^2)^3} \square \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} + \dots, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

y a través de la ecuación de Callan-Symmanzik:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \Gamma_R(x) = 0, \tag{2.30}$$

se extrae la función beta a dos lazos:

$$\begin{aligned}\beta(g) &= \beta_1 g^3 + \beta_2 g^5 + \mathcal{O}(g^7), \\ \beta_1 &= \frac{1}{16\pi^2} \\ \beta_2 &= \frac{1}{8(4\pi^2)^2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Este resultado ha sido corroborado en [108] usando dos métodos distintos: el método estándar de campo de background [109], usando regularización implícita, y el método basado en el formalismo de supergrafos covariantes [110].

2.3. Efectos no perturbativos en teorías de gauge supersimétricas

El desarrollo de las teorías de gauge supersimétricas ha permitido expandir ampliamente la cantidad de resultados no perturbativos obtenidos en teorías de gauge [111, 112], en parte debido a que estas permiten estudiar de forma no perturbativa los estados base, obteniendo así cálculos explícitos de los valores de expectación en el vacío de operadores compuestos invariantes de gauge. En esta sección nos centraremos en dos efectos exactos (válidos a todo orden de teoría de perturbaciones): el teorema de no renormalización y la relación de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov para teorías de gauge supersimétricas.

2.3.1. Teorema de no renormalización

Los teoremas de no renormalización son un conjunto de restricciones sobre la renormalización de ciertos elementos de las teorías supersimétricas. En nuestro caso nos centraremos específicamente en un teorema de no renormalización: en una teoría supersimétrica quirral interactuante con $\mathcal{N} = 1$, el superpotencial $W(\phi)$ no se renormaliza [113, 20]:

$$\mu \frac{\partial W(\phi)}{\partial \mu} = 0.\tag{2.32}$$

Una forma sencilla de entender el por qué de esto es pensar que el superpotencial es una función holomorfa de los supercampos quirales, esto significa que es función únicamente de los campos quirales y no de los antiquirales. Al realizar el proceso de renormalización, las

correcciones radiativas inducen la aparición de nuevos operadores en la teoría únicamente restringidos por las simetrías, así, las constantes de acoplamiento en una escala distinta de energía pasarían a ser funciones de las constantes de acoplamiento desnudas, y dado que nada impide la aparición de constantes de acoplamiento asociadas a operadores antiholomorfos (operadores que dependen de los campos antiquirales), entonces la única posibilidad es que el superpotencial no sea renormalizado.

El caso general de este teorema dice que los términos $-F$ de la acción de una teoría supersimétrica no reciben correcciones radiativas a ningún orden de teoría de perturbaciones [20, 114, 115]. La prueba del teorema requiere usar teoría de perturbaciones de supergrafos [116], de aquí es posible demostrar que cualquier corrección radiativa puede ser escrita como una integral sobre el superespacio completo:

$$\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}, \quad (2.33)$$

mientras que los términos $-F$ son integrales quirales sobre el superespacio:

$$\int d^4x d^2\theta + \int d^4x d^2\bar{\theta}, \quad (2.34)$$

por lo tanto, un término $-F$ en la acción no puede recibir correcciones radiativas a ningún orden en teoría de perturbaciones.

El teorema de no renormalización no significa que las constantes de acoplamiento del superpotencial no reciban ninguna corrección radiativa, ya que pueden poseer renormalizaciones de las funciones de onda provenientes de los términos cinéticos del supercampo quiral, el cual, al ser un término $-D$, no cumple con el teorema. Veamos el ejemplo del superpotencial de Ec.(2.10), si realizamos una renormalización al estilo de Wilson, para una escala de energía distinta obtendremos un superpotencial efectivo W_{eff} que, debido a ser holomorfo, debe ser de la forma:

$$W_{\text{eff}} = f(\phi, m, y). \quad (2.35)$$

Siempre es posible hacer que la teoría posea una simetría $-R$ más una simetría $U(1)$ con las cargas que se ven en la Tabla 2.1. Por análisis dimensional y la invarianza bajo las simetrías anteriores, vemos que el superpotencial efectivo debe ser de la forma [4]:

$$W_{\text{eff}} = m\phi^2 \times f\left(\frac{y\phi}{m}\right), \quad (2.36)$$

Campos	Cargas $U(1)$	Cargas R
ϕ	+1	$\frac{2}{3}$
m	-2	$\frac{2}{3}$
y	-3	0

Tabla 2.1: Cargas para las cuales el superpotencial de Ec.(2.10) es invariante $U(1)$ y R [4].

o en términos de una expansión en serie de Laurent de los campos:

$$W_{\text{eff}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n y^n m^{1-n} \phi^{n+2}. \quad (2.37)$$

Para $y = 0$ la teoría debe ser libre, por lo tanto todos los coeficientes negativos deben anularse. Por otro lado, ya que el procedimiento de renormalización excluye modos que generen singularidades para $m \rightarrow 0$ entonces sólo pueden sobrevivir términos con $n \leq 1$. Es decir, la forma más general del superpotencial efectivo es:

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \phi^2 + \frac{1}{6} y \phi^3. \quad (2.38)$$

Que el superpotencial no se renormalice implica que, en términos de acoplamientos renormalizados, se cumpla

$$m = Z_\phi m_R, \quad y = Z_\phi^{\frac{3}{2}} y_R, \quad (2.39)$$

por lo tanto cualquier observable dependiente de los acoplamientos recibirá correcciones radiativas, sin embargo, existirán combinaciones de acoplamientos que no lo harán, por ejemplo:

$$\frac{m_R^3}{y_R^2} = \frac{m^3}{y^2}. \quad (2.40)$$

Esta es la clave para, por ejemplo, la solución del problema de la jerarquía [40].

2.3.2. La función beta exacta de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov

Uno de los aspectos de las teorías supersimétricas que ha dado pie a numerosos estudios y resultados no perturbativos exactos es el hecho de que permiten realizar cálculos explícitos y no divergentes de condensados [112], ello permite un estudio no perturbativo de los estados de vacío tales como instantones. Por otro lado también permite un estudio exacto de anomalías [21, 22]. Ambos estudios han permitido obtener, en conjunto con la renormalizabilidad, una expresión para la función beta a todo orden de teoría de perturbaciones de las teorías de gauge supersimétricas, la llamada *función beta de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov* [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Si bien dicha relación es general para una teoría de gauge $SU(N)$ supersimétrica, en este trabajo nos centraremos en la versión particular para teorías de gauge abelianas.

En este trabajo obtendremos la relación como una consecuencia de la solución del *puzzle de las anomalías*. El problema es el siguiente: para teorías de gauge supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$, la corriente $-R$ (correspondiente a la simetría $-R$ $U(1)$ de Ec.(1.47)), la supercorriente (corriente asociada a las supercargas) y el tensor de energía momento son componentes de un mismo supermultiplete, la *hipercorriente* $\mathcal{J}_{\alpha\dot{\alpha}}$ (ver, por ejemplo, el Capítulo 59 de [4]), la cual se conserva a nivel clásico dando lugar a la simetría superconforme, sin embargo, dicha simetría es anómala. La generalización supersimétrica del teorema de Adler-Bardeen asegura que la anomalía de la corriente $-R$ se satisface a 1 lazo [117, 118] mientras que la traza del tensor de energía momentum debe ser proporcional a la función beta del acoplamiento de gauge [119] debido a su relación con el rompimiento de la simetría de escala, esto implica que la función beta debe ser satisfecha también a 1 lazo, lo cual ha sido comprobado en [33] generalizando el teorema de no-renormalización para los términos $-F$, sin embargo, esto genera una contradicción debido a que una los cálculos perturbativos explícitos de la función beta muestran que esta obtiene correcciones cuántica más allá de un lazo [120]. Múltiples soluciones a esta cuestión han sido dadas [121, 122, 123], sin embargo, nos centraremos en la que importa para esta sección [34].

Consideremos la acción clásica de la electrodinámica cuántica supersimétrica definida a una escala de energía Λ_0 :

$$S_{\Lambda_0} = \frac{1}{32e_0^2} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha + Z_0 \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\Phi_-^\dagger e^{-2V} \Phi_- + \Phi_+^\dagger e^{2V} \Phi_+ \right], \quad (2.41)$$

donde Z_0 es la renormalización de la función de onda de los supercampos quirales, además, se despreciarán los términos de masa pensando que Λ_0 se encuentra a una escala muy alejada de la misma. Si nos movemos a una escala de energía $\Lambda < \Lambda_0$, obtendremos una acción

efectiva S_{eff} proveniente de la renormalización wilsoniana la cual dependerá de parámetros $e(\Lambda)$ y $Z(\Lambda)$. Un punto central de la derivación es que la carga eléctrica física, e^{F} , difiere de la constante de acoplamiento $e(\Lambda)$, la cual efectivamente sólo contiene correcciones cuánticas hasta 1 lazo como muestra el teorema de no renormalización [33], sin embargo la constante física contiene correcciones multilazos debido a la presencia de anomalías. En [34] se propone que la anomalía de la hipercorriente tiene la forma:

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{J}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{24} D_{\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} W^{\alpha} W_{\alpha} - \gamma Z \bar{D}^2 \left(\Phi_{-}^{\dagger} e^{-2V} \Phi_{-} + \Phi_{+}^{\dagger} e^{2V} \Phi_{+} \right) \right], \quad (2.42)$$

donde γ es la dimensión anómala de los supercampos quirales, todas las cantidades de Ec.(2.42) son las que hemos definido como no físicas. Para obtener los elementos de matriz se puede usar la anomalía de Konishi [21],

$$\frac{1}{2\pi^2} W^{\alpha} W_{\alpha} = Z \bar{D}^2 \left(\Phi_{-}^{\dagger} e^{-2V} \Phi_{-} + \Phi_{+}^{\dagger} e^{2V} \Phi_{+} \right), \quad (2.43)$$

con lo cual la anomalía de la hipercorriente será:

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{J}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{24} D_{\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} (1 - \gamma) \right] W^{\alpha} W_{\alpha}. \quad (2.44)$$

Ya que la hipercorriente contiene la anomalía de la traza, entonces su anomalía debe ser proporcional a la función beta, esto muestra que

$$\beta \propto \frac{1}{2\pi} (1 - \gamma). \quad (2.45)$$

La diferencia entre la constante de acoplamiento física¹ y la que se encuentra en la acción efectiva será [34]:

$$\frac{4\pi}{\alpha^{\text{F}}(\Lambda)} = \frac{4\pi}{\alpha(\Lambda)} - 2 \ln Z^{\text{F}}(\Lambda), \quad (2.46)$$

donde α es la constante de estructura fina $e^2/4\pi$. La constante α recibe únicamente correcciones a un lazo, por lo tanto, considerando Λ infinitesimalmente cerca de Λ_0 , tenemos

$$\frac{4\pi}{\alpha(\Lambda)} = \frac{4\pi}{\alpha_0} + 2 \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda}. \quad (2.47)$$

¹Según Shiftman y Vainshtein en [34], la constante de estructura fina física se obtiene considerando el elemento de matriz de la hipercorriente, el cual contiene la información de las anomalías, adelantándonos a lo que viene, esta está generada por la acción efectiva, Ec.(3.12).

Usando las últimas dos ecuaciones es posible encontrar como se conecta la constante física renormalizada con su contraparte desnuda. De Ec.(2.46) se deduce que:

$$\frac{4\pi}{\alpha_0^F} = \frac{4\pi}{\alpha_0} - 2 \ln Z_0, \quad (2.48)$$

insertando Ec.(2.47) en Ec.(2.46):

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha^F(\Lambda)} &= \frac{4\pi}{\alpha(\Lambda)} - 2 \ln Z^F(\Lambda) \\ &= \frac{4\pi}{\alpha_0} + 2 \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda} - 2 \ln Z^F(\Lambda). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si ahora reemplazamos Ec.(2.48) se obtiene la relación deseada:

$$\frac{4\pi}{\alpha^F(\Lambda)} = \frac{4\pi}{\alpha_0^F} + 2 \ln Z_0 + 2 \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda} - 2 \ln Z^F(\Lambda). \quad (2.50)$$

Derivando respecto a $\ln \Lambda$ se obtiene:

$$\frac{4\pi}{\alpha^F(\Lambda)^2} \frac{d\alpha^F}{d \ln \Lambda} = 2 + 2 \frac{d \ln Z^F}{d \ln \Lambda}. \quad (2.51)$$

Finalmente, quitando el índice F obtenemos una expresión para la función beta la cual, siendo exacto el resultado de la anomalía, es exacta²:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\pi} (1 - \gamma(\alpha)). \quad (2.52)$$

Esto nos dice que la función beta y la dimensión anómala están relacionadas a todo orden en teoría de perturbaciones debido a la estructura de las anomalías. Distintas versiones de esta se han encontrado respecto a cálculos exactos de condensados [27, 28] o de teoremas de no renormalización para términos topológicos [35], lo que nos muestra que es un resultado íntimamente relacionado con la estructura de las teorías de gauge supersimétricas. Esta relación ha sido además comprobada usando teoría de perturbaciones, mostrando que existe una clase de esquemas de renormalización conocidos como esquemas tipo NSVZ [36, 37, 38, 39] y ha sido también ampliamente estudiado mediante regularización por grandes derivadas [124, 39, 125].

²Notar que en comparación a [34], nuestra definición de carga eléctrica es $\sqrt{2}e$.

Capítulo 3

Métodos funcionales en renormalización

Como se discutió en la introducción, el método de renormalización de Wilson consiste de dos pasos: la eliminación de modos y el reescalamiento. Luego de cada iteración de estos dos pasos obtenemos una transformación finita del espacio de acoplamientos donde cada transformación depende del espacio de acoplamientos antes de la transformación y del ancho del reescalamiento, sin embargo, la forma de implementar estos pasos es todo un reto debido a las cantidades no perturbativas que aparecen para anchos grandes de reescalamiento. Afortunadamente existen muchas formas de implementar el grupo de renormalización de Wilson: en el espacio real o en el espacio de momentum; además de las distintas formas de implementar el cutoff Λ y de definir los anchos de reescalamiento.

En este trabajo nos centraremos en la implementación conocida como *grupo de renormalización exacto*, el cual es una realización continua de la transformación de la acción efectiva¹ bajo el grupo de renormalización wilsoniano, y consiste en integrar sobre cascarnes de momentum infinitesimales, $\Lambda - d\Lambda < |k| < \Lambda + d\Lambda$, lo que resulta en un cambio en la acción efectiva expresado por una ecuación diferencial de flujo exacta, la cual describe la evolución de la acción efectiva como función del cutoff Λ y que puede ser definida sin ningún tipo de aproximación.

Excelentes tratados sobre el grupo de renormalización exacto pueden encontrarse en [126, 127, 128, 129, 130, 52, 131, 53, 54, 132].

¹La cual será parte de distintos tipos de funcionales.

3.1. Funcionales generatrices de las funciones de green

En teoría cuántica de campos, toda la información física relevante de una teoría se encuentra en las *funciones de correlación de n -puntos*, los correladores para n campos cuánticos o *funciones de Green de n -puntos*. Suponemos que estas funciones de correlación para la teoría pueden representarse como una integral funcional dependiente de la acción de la teoría, la *función de partición*:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi]}, \quad (3.1)$$

donde Ψ_α es una colección de los diferentes tipos de campos de la teoría y α es un índice que corre en todos los índices de los diferentes tipos de campos. Este arreglo se conoce como *supercampo* [133, 134, 135], sin embargo, no tiene que ver con supersimetría.

Las funciones de Green de n -puntos se definen como:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle \Psi(x_1), \dots, \Psi(x_n) \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}[\Psi] \Psi(x_1), \dots, \Psi(x_n) e^{-S[\Psi]}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi]}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Estas funciones de Green pueden ser vistas como los coeficientes de la expansión de Taylor en las corrientes del funcional generatriz:

$$Z[J] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)} = \frac{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi]}}, \quad (3.3)$$

de tal forma que:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1), \dots, J(x_n), \quad (3.4)$$

donde,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_n) \dots J(x_1)} \right|_{J=0}. \quad (3.5)$$

De particular interés es la función de Green de 2-puntos, el *propagador*:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \Psi(x_1)\Psi(x_2) \rangle. \quad (3.6)$$

Este funcional no es muy útil en la práctica debido a que la expansión perturbativa de las funciones de Green contiene funciones de Green de orden más bajo, $Z[J]$ es el *funcional generatriz de las funciones de Green desconectadas*.

Si descomponemos la acción en una parte gaussiana (libre), S_0 , y una de interacción S_{int} :

$$S[\Psi] = S_0[\Psi] + S_{\text{int}}[\Psi] \quad (3.7)$$

entonces podemos definir el *funcional generatriz de las funciones de Green conectadas* como:

$$\begin{aligned} W[J] &= \ln \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} Z[J] \right) \\ &= \ln \left(\frac{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_0[\Psi]}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nuevamente, las funciones de Green conectadas serán los coeficientes de la expansión en Taylor en las corrientes de Ec.(3.8):

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1), \dots, J(x_n), \quad (3.9)$$

donde

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_n) \dots J(x_1)} \right|_{J=0}. \quad (3.10)$$

Como un ejemplo de que $W[J]$ efectivamente genera los diagramas conectados veamos el propagador conectado. Desarrollando Ec.(3.10) para $n = 2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x_1, x_2) &= \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \right|_{J=0} \\ &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} (\ln \mathcal{Z} - \ln \mathcal{Z}_0 + \ln Z[J]) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0} - \frac{1}{Z[0]^2} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= G^{(2)}(x_1, x_2) - G^{(1)}(x_1) G^{(1)}(x_2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

ya que, según nuestra definición de $Z[J]$ en Ec.(3.3), $Z[0] = 1$. De Ec.(3.11) vemos que el propagador conectado es el igual al propagador desconectado sustrayendo los subdiagramas.

3.1.1. Funcional generatriz de los vértices irreducibles

La expansión perturbativa de $G_c^{(n)}$ no se ve entorpecida con la presencia de subcorreladores, sin embargo contiene otra clase de subdiagramas separados en varias partes y unidos por propagadores gaussianos, estos son los *diagramas irreducibles de una partícula*, estos subdiagramas dificultan la parte técnica de la resolución de las ecuaciones del grupo de renormalización [132] las cuales son evadidas utilizando un funcional que genere las *funciones de Green irreducibles de una partícula*, también conocidos como *vértices irreducibles*.

El funcional que genera los vértices irreducibles es la transformada de Legendre del funcional generatriz de las funciones de Green conectadas, la *acción efectiva*:

$$\Gamma[\bar{\Psi}] = \int d^4x J(x)\bar{\Psi}(x) - W[J] - S_0[\bar{\Psi}], \quad (3.12)$$

donde el significado de $\bar{\Psi}$ puede ser obtenido de la misma ecuación. Derivando respecto a la corriente:

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\Psi}]}{\delta J(x)} = \bar{\Psi} - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = 0, \quad (3.13)$$

por lo tanto

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \Psi \rangle_J \quad (3.14)$$

es el valor de expectación del campo Ψ en presencia de la corriente externa J .

Los vértices propios $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ serán los coeficientes de la expansión en serie de potencias de la acción efectiva en los campos $\bar{\Psi}$:

$$\Gamma[\bar{\Psi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{\Psi}(x_1), \dots, \bar{\Psi}(x_n). \quad (3.15)$$

Para entender el significado físico de los vértices propios definiremos el operador $\mathcal{V}[\bar{\Psi}]$ como la parte de $\Gamma[\bar{\Psi}]$ que corresponde únicamente a la transformada de Legendre, es decir,

$$\mathcal{V}[\bar{\Psi}] = \int d^4x J(x)\bar{\Psi}(x) - W[J]. \quad (3.16)$$

Tomando la derivada funcional respecto a $\bar{\Psi}$ se obtiene

$$\frac{\delta\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} = \int d^4x_2 \frac{\delta J(x_2)}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} \bar{\Psi}(x_2) + \int d^4x_2 J(x_2) \frac{\delta\bar{\Psi}(x_2)}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} - \int d^4x_2 \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta J(x_2)}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} = J(x_1). \quad (3.17)$$

Utilizando esta relación podemos encontrar una forma de escribir la derivada funcional respecto a $\bar{\Psi}$ como:

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} = \int d^4x_2 \frac{\delta J(x_2)}{\delta\bar{\Psi}(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} = \int d^4x_2 \frac{\delta^2\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)}. \quad (3.18)$$

Si ahora aplicamos este operador a la Ec.(3.14) vemos que se cumple:

$$\int d^4x_2 \frac{\delta^2\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} = 1. \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que debe satisfacerse la relación:

$$\frac{\delta^2\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} = \left(\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \right)^{-1}, \quad (3.20)$$

donde el lado derecho es el operador inverso. Esta expresión relaciona las funciones de green conectadas con la transformada de Legendre del operador $W[J]$, usando dicha expresión podemos encontrar una forma explícita para el vértice propio con $n = 2$. Tomando las derivadas funcionales de $\Gamma[\bar{\Psi}]$ obtenemos:

$$\left. \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \right|_{\bar{\Psi}=0} = \left. \frac{\delta^2\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \right|_{\bar{\Psi}=0} - \left. \frac{\delta^2 S_0[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \right|_{\bar{\Psi}=0}, \quad (3.21)$$

donde de Ec.(3.20) se puede ver que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2\mathcal{V}[\bar{\Psi}]}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\delta\bar{\Psi}(x_1)} \right|_{\bar{\Psi}=0} &= \left(\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \right)^{-1} \Bigg|_{J=0} \\ &= [G_c^{(2)}]^{-1}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

y por otro lado, la parte gaussiana de la acción se puede expresar como:

$$S_0[\bar{\Psi}] = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} [G_0^{(2)}]^{-1} \bar{\Psi}. \quad (3.23)$$

Finalmente se obtiene que:

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = [G_c^{(2)}]^{-1}(x_1, x_2) - [G_0^{(2)}]^{-1}(x_1, x_2). \quad (3.24)$$

Para clarificar su significado, haremos uso de la ecuación de Dyson [136],

$$G_c^{(2)-1}(x_1, x_2) = \left[G_0^{(2)} \right]^{-1}(x_1, x_2) + \Sigma, \quad (3.25)$$

donde Σ es la autoenergía del propagador, entonces:

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \Sigma, \quad (3.26)$$

es decir, el vértice propio con $n = 2$ corresponde a la autoenergía del propagador, la cual es la suma de todos los diagramas irreducibles de una partícula sin líneas externas. Este procedimiento puede hacerse para cualquier n a través de la *expansión de árbol* [126] y nos muestra que Γ genera la contribución de los diagramas irreducibles de una partícula a todo orden de lazos.

Finalmente, de Ec.(3.12) podemos ver que la acción efectiva respeta la siguiente ecuación:

$$e^{\Gamma[\bar{\Psi}]} = \frac{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S[\Psi] + \int \left(\frac{\delta \Gamma[\bar{\Psi}]}{\delta \bar{\Psi}(x)} + \frac{\delta S_0[\bar{\Psi}]}{\delta \bar{\Psi}(x)} \right) (\bar{\Psi}(x) - \Psi(x)) - S_0[\bar{\Psi}]}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_0[\Psi]}}, \quad (3.27)$$

una ecuación funcional integro-diferencial no lineal de la cual sólo se pueden tener resultados aproximados vía una expansión en vértices propios.

3.2. Ecuaciones de flujo exactas

Como ya ha sido mencionado, una forma eficiente de implementar el método de re-normalización de Wilson es integrar los distintos funcionales en cascarones de momentum infinitesimales dando lugar a ecuaciones de flujo exactos para los funcionales efectivos dependientes de la escala. Existe más de una forma de implementar esta idea, sin embargo, en este trabajo se procederá introduciendo el cutoff directamente en la parte gaussiana de la acción:

$$S_0 \rightarrow S_{0,\Lambda}, \quad (3.28)$$

lo cual eliminará los modos de alta energía mediante la regularización del propagador gaussiano,

$$S_{0,\Lambda}[\Psi] = \frac{1}{2} \int d^4x \Psi \left[G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} \Psi. \quad (3.29)$$

La regularización explícita del propagador será atendida más adelante.

Comenzaremos este análisis regularizando la función de partición de Ec.(3.1):

$$\mathcal{Z}_\Lambda = \int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi]}, \quad (3.30)$$

donde S_Λ se refiere a la acción con la parte gaussiana regularizada como en Ec.(3.28). Con tal definición podemos definir el funcional generatriz de las funciones de Green desconectadas como:

$$Z_\Lambda[J] = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda} \int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)} = \frac{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi]}}. \quad (3.31)$$

Si derivamos con respecto a la escala de energía obtenemos:

$$\frac{d}{d\Lambda} Z_\Lambda[J] = -\frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda} \left(\frac{d}{d\Lambda} \mathcal{Z}_\Lambda \right) Z_\Lambda[J] + \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda} \int \mathcal{D}[\Psi] \frac{d}{d\Lambda} S_{0,\Lambda}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)}. \quad (3.32)$$

La derivada de la acción gaussiana puede tratarse usando Ec.(3.29) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d\Lambda} S_{0,\Lambda}[\Psi] = \frac{1}{2} \int d^4x \Psi \frac{d}{d\Lambda} \left[G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} \Psi, \quad (3.33)$$

la cual puede reescribirse usando la siguiente identidad:

$$\Psi(x)^n e^{\int d^4x J(x)\Psi(x)} = \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^n e^{\int d^4x J(x)\Psi(x)}, \quad (3.34)$$

de tal forma que:

$$\frac{d}{d\Lambda} S_{0,\Lambda}[\Psi] = \frac{1}{2} \int d^4x \frac{d}{d\Lambda} \left[G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} \frac{\delta^2}{\delta J^2}. \quad (3.35)$$

Así, la ecuación de flujo para $Z_\Lambda[J]$ se escribe:

$$\frac{d}{d\Lambda} Z_\Lambda[J] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\left[\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} Z_\Lambda^{(2)}[J] \right] - (\partial_\Lambda \ln \mathcal{Z}_\Lambda) Z_\Lambda[J], \quad (3.36)$$

donde el operador

$$Z_\Lambda^{(2)}[J] = \frac{\vec{\delta}}{\delta J} Z_\Lambda[J] \frac{\vec{\delta}}{\delta J} \quad (3.37)$$

es la segunda derivada funcional del funcional generatriz y STr se refiere a la traza del operador respecto a todos los índices del supercampo Ψ [137, 138].

Del mismo modo es posible definir un funcional generatriz regularizado de las funciones de Green conectadas. Usando Ec.(3.8) se puede definir el funcional:

$$\begin{aligned} W_\Lambda[J] &= \ln \left(\frac{\mathcal{Z}_\Lambda}{\mathcal{Z}_{0,\Lambda}} Z_\Lambda[J] \right) \\ &= \ln \left(\frac{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_\Lambda[\Psi] + \int J(x)\Psi(x)}}{\int \mathcal{D}[\Psi] e^{-S_{0,\Lambda}[\Psi]}} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

el cual satisface la ecuación exacta de flujo:

$$\partial_\Lambda W_\Lambda[J] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\left[\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} W_\Lambda^{(2)}[J] \right] - (\partial_\Lambda \ln \mathcal{Z}_{0,\Lambda}) - \frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{(2)} \right]^{-1} \left(\frac{\delta W_\Lambda[J]}{\delta J} \right)^2. \quad (3.39)$$

Capítulo 4

El grupo de renormalización funcional

El término *grupo de renormalización funcional* se refiere al conjunto de soluciones aproximadas de la ecuación exacta de flujo para la acción efectiva utilizando esquemas de truncamiento apropiados, debido a que estas aproximaciones no necesariamente son con respecto a la pequeñez de una constante de acoplamiento, entonces pueden representar resultados no perturbativos.

En lugar de calcular paso a paso el cambio en la acción efectiva utilizaremos los métodos detallados anteriormente para construir un funcional dependiente de la escala de energía que represente el flujo de la teoría desde la escala de cutoff hasta la escala infrarroja donde desembocará hacia la acción efectiva. Este funcional recibe el nombre de *acción promedio efectiva* [57, 58, 59].

La acción promedio efectiva, Γ_k , dependerá de un parámetro de cascarón de momentum k que interpola entre $k = 0$ y $k = \Lambda$ y cumple con las condiciones de borde:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \begin{cases} S[\bar{\Psi}] & \text{si } k \rightarrow \Lambda \\ \Gamma[\bar{\Psi}] & \text{si } k \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

de tal forma que para los modos de momentum de escalas cercanas a las del cutoff, la acción tienda a la acción clásica y las fluctuaciones se congelen, mientras que para escalas lejanas al cutoff, la acción tienda a la acción efectiva usual.

Para un estudio más completo de la aplicación del grupo de renormalización funcional en teoría de campos se puede recurrir a [55, 139, 126, 131, 127].

4.1. Reguladores

Anteriormente se revisaron algunas ecuaciones de flujo para funcionales regularizados mediante la regularización del propagador gaussiano sin detenernos en la forma explícita en que se realiza la misma. Volviendo a Ec.(3.28) y Ec.(3.29) vemos que con tal de que el cutoff Λ actúe como límite entre los modos que deben y no deben ser integrados fuera, de forma que únicamente los modos no integrados se propaguen entonces, se requiere que el propagador regularizado cumpla:

$$G_{0,\Lambda}^{(2)} = \begin{cases} G_0^{(2)} & \text{si } \Lambda \rightarrow 0 \\ 0 & \text{si } \Lambda \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.2)$$

Una característica del grupo de renormalización funcional es que implementa esta condición a través de un regulador infrarrojo de la forma:

$$G_{0,k}^{(2)} = \left[1 + G_0^{(2)} R_k \right]^{-1} G_0^{(2)}, \quad (4.3)$$

donde el regulador infrarrojo R_k cumple las condiciones:

$$R_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \rightarrow 0 \\ \infty & \text{si } k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.4)$$

y k es el parámetro de escala de momentum.

De Ec.(3.29) se obtiene que:

$$\begin{aligned} S_{0,k}[\bar{\Psi}] &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} \left[G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} \bar{\Psi} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} \left[G_0^{(2)} \right]^{-1} \bar{\Psi} + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} R_k \bar{\Psi} \\ &= S_0[\bar{\Psi}] + \Delta S_k[\bar{\Psi}], \end{aligned} \quad (4.5)$$

con lo cual

$$R_k = \Delta S_k^{(2)} = \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}} \Delta S_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \bar{\Psi}}. \quad (4.6)$$

Si denotamos por $\Delta_{\alpha,k}(q)$ al propagador del campo tipo α en el espacio de momento, entonces, de Ec.(4.3) vemos que se cumple la relación:

$$\Delta_{\alpha,k}^{-1}(q^2) = \Delta_{\alpha}^{-1}(q^2) + \tilde{r}_{\alpha,k}(q^2), \quad (4.7)$$

donde $\tilde{r}_\alpha(q^2)$ son los autovalores del operador R_k en el espacio de momento y los llamaremos *funciones reguladoras*. El subíndice α etiqueta a los distintos tipos posibles de campos.

Es conveniente escribir las funciones reguladoras en términos de una función adimensional:

$$\tilde{r}_k^B(q^2) = q^2 r_k^B \left(\frac{q^2}{k^2} \right), \quad \tilde{r}_k^F(q) = q r_k^F \left(\frac{q^2}{k^2} \right), \quad (4.8)$$

donde “B” se refiere a bosones y “F” a fermiones. Las funciones reguladoras pueden ser de dos clases: reguladores de clase I o de tipo masa y reguladores de clase II o de tipo momentum. Ambas clases pueden esquematizarse en su función dentro del propagador de la siguiente manera:

$$\Delta_{\alpha,k}^B \sim \frac{1}{q^2(1+r_{II}) + (m^2+r_I)}, \quad \Delta_{\alpha,k}^F \sim \frac{1}{q(1+r_{II}) + (m+r_I)}. \quad (4.9)$$

Adicionalmente es necesario normalizar el regulador, definiendo así la escala a la cual se vuelve efectivo. La condición viene dada por [140]:

$$\tilde{r}_k(c_B k^2) = c_B k^2 \quad \text{o} \quad r_k(c_B) = 1 \quad (4.10)$$

para bosones y

$$\tilde{r}_k^2(c_F k^2) = c_F k^2 \quad \text{o} \quad r_k^2(c_F) = 1 \quad (4.11)$$

para fermiones. Un listado de varios reguladores que pueden ser utilizados se encuentra en la Tabla 4.1.

4.2. La ecuación de Wetterich

El corazón del estudio del grupo de renormalización funcional se encuentra en la ecuación de flujo exacta para la acción promedio efectiva, la primera obtención de la misma fue hecha usando un cutoff “duro” [141], sin embargo, las formulaciones modernas implementan un cutoff suave [56, 142, 143, 132] de la forma que se definió en Ec.(4.3).

Comenzamos con la definición de la acción promedio efectiva. Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, definimos una acción efectiva dependiente de la escala de energía:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \int d^4x J_k(x) \bar{\Psi}(x) - W_k[J] - S_{0,k}[\bar{\Psi}]. \quad (4.12)$$

Regulador	Clase
$r_{\text{exp}} = \frac{1}{e^{cy^b} - 1}$	II
$r_{\text{mexp}} = \frac{b}{e^{cy} - 1}$	I
$r_{\text{mod}} = \frac{1}{e^{\frac{c}{b}(y+(b-1)y^b)} - 1}$	I
$r_{\text{mix}} = e^{-\frac{b}{2a}(y^a - \frac{1}{y^a})}$	II
$r_{\text{step}} = \left(\frac{2b-2}{b}\right) \frac{y^{b-2}}{e^{cy^{b-1}-1}}$	I
$r_{\text{power}} = y^{-b}$	II
$r_{\text{sharp}} = \frac{1}{\theta(y-1)} - 1$	II

Tabla 4.1: Distintos tipos de funciones reguladoras que pueden ser utilizadas y sus clases [5]

Para efectos prácticos de la derivación utilizaremos el operador de Ec.(3.16), ahora dependiente de la escala de energía, así:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] - S_{0,k}[\bar{\Psi}]. \quad (4.13)$$

Si derivamos respecto a una escala logarítmica de momentum,

$$t = \ln \frac{k}{\Lambda}, \quad \partial_t = \frac{k}{\Lambda} \partial_{\frac{k}{\Lambda}}, \quad (4.14)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] &= \partial_t \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] - \partial_t S_{0,k}[\bar{\Psi}] \\ &= \partial_t \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] - \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} \left[\partial_t G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por su parte, la derivada de \mathcal{V} tiene la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] &= \int d^4x \partial_t J_k \bar{\Psi} - \partial_t W_k[J] \\ &= \int d^4x \partial_t J_k \bar{\Psi} - \int d^4x \partial_t J_k \frac{\delta W_k}{\delta J} - \partial_t W_k[J] \Big|_{J=J_k} \\ &= - \partial_t W_k[J] \Big|_{J=J_k}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando Ec.(3.39) se puede reescribir:

$$\partial_t \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] = - \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\partial_t G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} W_k^{(2)}[J] \right\} + (\partial_t \ln \mathcal{Z}_{0,k}). \quad (4.17)$$

De Ec.(3.22) vemos que $W_k^{(2)}[J]$ se relaciona con $\mathcal{V}_k^{(2)}[\bar{\Psi}]^{-1}$, así:

$$\partial_t \mathcal{V}_k[\bar{\Psi}] = - \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\partial_t G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} \mathcal{V}_k^{(2)}[\bar{\Psi}]^{-1} \right\} + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} \left[\partial_t G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} \bar{\Psi} + (\partial_t \ln \mathcal{Z}_{0,k}). \quad (4.18)$$

Reemplazando Ec.(4.15) y Ec.(4.3):

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] = - \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + \left[G_0^{(2)} \right]^{-1} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\} + (\partial_t \ln \mathcal{Z}_{0,k}), \quad (4.19)$$

donde:

$$\left[\Gamma_k^{(2)} \right]_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\vec{\delta}}{\delta\Psi_\alpha(x)} \Gamma_k \frac{\vec{\delta}}{\delta\Psi_\beta(y)} \quad (4.20)$$

Esta ecuación, si bien es útil para el estudio del flujo de los vértices irreducibles en lo que se conoce como *expansión de vértices*:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x \Gamma_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{\Psi}(x_1), \dots, \bar{\Psi}(x_n), \quad (4.21)$$

contiene no analiticidades problemáticas para su solución en la expansión derivativa, con lo cual es conveniente trabajar con la versión de Wetterich de la acción promedio efectiva [56], la cual satisface las condiciones vistas al inicio de esta sección en Ec.(4.1). Para obtenerla debemos realizar el siguiente cambio:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] \rightarrow -\Gamma_k[\bar{\Psi}] + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\Psi} \left[\partial_t G_{0,k}^{(2)} \right]^{-1} \bar{\Psi} + (\partial_t \ln \mathcal{Z}_{0,k}), \quad (4.22)$$

con lo cual se obtiene la ecuación de flujo conocida en la literatura como *la ecuación de Wetterich* [56]:

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\}. \quad (4.23)$$

La ecuación es exacta en cuanto a que ha sido derivada directamente de la definición de $\Gamma_k[\bar{\Psi}]$ sin utilizar aproximaciones, lo cual no asegura que pueda resolverse de forma exacta, es más, si utilizamos la expansión de Ec.(4.21) obtendremos una jerarquía infinita ecuaciones diferenciales acopladas para los vértices propios y su solución será exacta únicamente si tomamos en cuenta todos sus posibles términos.

4.2.1. Optimización de las funciones reguladoras

Como hemos visto hasta el momento, la acción promedio efectiva contiene toda la información física del modelo que vaya a ser tratado, sin embargo, solucionar la ecuación de Wetterich implica solucionar a la vez una jerarquía infinita de ecuaciones diferenciales fuertemente acopladas, con lo cual su aplicación a problemas de interés físico implica el truncamiento de dicha jerarquía, lo cual veremos más adelante. Un problema que surge de esto es que las soluciones truncadas de la ecuación de flujo retienen una dependencia

en la elección del regulador IR [144, 145], similar a la dependencia del esquema en la renormalización usual debido a que el regulador se acopla a todos los vértices irreducibles de la teoría vía la ecuación de flujo, en consecuencia, las interacciones efectivas poseerán ciertos residuos provenientes de la forma específica en que el regulador elimine los grados de libertad integrados fuera. Estos residuos no son un inconveniente para la solución completa, pero al truncar los operadores de la teoría estos pueden no cancelarse completamente. Para minimizar el efecto de esta dependencia se ha propuesto un método de optimización [5, 140] basado en cuatro principios:

1. que optimice las soluciones aproximadas de la ecuación de flujo,
2. que sea compatible con la expansión derivativa,
3. que solo dependa de los objetos que aparecen en la ecuación de flujo,
4. que no dependa de la teoría específica en la que se aplique.

La opción propuesta en [5, 140] es el llamado en la literatura como *regulador optimizado de Litim*:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\text{B}\alpha,k}^{\text{opt}}(q^2) &= Z_{\alpha,k} q^2 \left(\frac{k^2}{q^2} - 1 \right) \theta \left(1 - \frac{q^2}{k^2} \right), \\ \tilde{r}_{\text{F}\alpha,k}^{\text{opt}}(q^2) &= Z_{\alpha,k} \not{q} \left(\sqrt{\frac{k^2}{q^2}} - 1 \right) \theta \left(1 - \frac{q^2}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde α se refiere al tipo de campo y $Z_{\alpha,k}$ es la constante de renormalización de la función de onda del campo tipo α . Usando las funciones adimensionales de Ec.(4.8) tendremos que:

$$\begin{aligned} r_{\text{B}\alpha,k}(y) &= \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \theta(1 - y), \\ r_{\text{F}\alpha,k}(y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \theta(1 - y), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde $y = \frac{q^2}{k^2}$.

El criterio de optimización es el siguiente: dado que toda la información física de la ecuación de flujo Ec.(4.23) se encuentra en el propagador inverso:

$$\Gamma_k^{(2)}(q) + R_k(q^2), \quad (4.26)$$

el cual estará bien definido siempre y cuando [140, 146]:

$$\min_{q^2 \geq 0} \left(\Gamma_k^{(2)}(q) + R_k(q^2) \right) = Ck^2 > 0, \quad (4.27)$$

donde la *brecha* $C > 0$ es consecuencia de R_k siendo un regulador IR y su valor es dependiente del regulador. Si se realiza una expansión de la ecuación de flujo en potencias del propagador inverso

$$P^2(y) = y [1 + r_k(y)], \quad (4.28)$$

los coeficientes tendrán la siguiente forma [144]:

$$a_n = \int_0^\infty dy K[r_k] P^{-n}(y), \quad (4.29)$$

donde K es una función de r_k y sus derivadas. Para n grande, los factores P^{-n} suprimen los coeficientes de tal forma que:

$$a_n \sim C^{-\frac{n}{2}}, \quad (4.30)$$

para n suficientemente grande. Así, el radio de convergencia, dependiente de a_n/a_{n+2} viene dado por el tamaño de la brecha. En consecuencia, el criterio de optimización será maximizar este radio de convergencia:

$$C_{\text{opt}} = \max_{\text{ER}} \left(\min_{y \geq 0} P^2(y) \right), \quad (4.31)$$

donde ER se refiere al “Esquema de Regulador”. Los reguladores de Ec.(4.24) cumplen esta condición.

4.3. Esquemas de truncamiento

Ya ha sido comentado el hecho de que la Ec.(4.23) es en extremo difícil de solucionar, con lo cual es necesario realizar algún tipo de aproximación. Una de las ventajas de la ecuación de Wetterich es que es una ecuación a 1 lazo, esto se puede ver ya que STr denota una única integración en el momentum y es consecuencia de la regularización gaussiana de la acción efectiva, lo que la hace fácil de solucionar pero también que sea necesario tomar en cuenta todos los términos posibles que las simetrías permitan en la acción. A pesar de estos “inconvenientes”, la ecuación es suficientemente flexible para permitir aproximaciones sistemáticas agrupadas en *esquemas de truncamiento*, estos esquemas distan de la expansión usual en términos de la intensidad de los acoplamientos, permitiendo acceder a resultados que no están relegados a la región de acoplamiento débil.

4.3.1. Expansión en lazos

En primer lugar discutiremos la expansión de la acción efectiva promedio en serie de potencias de \hbar , la cual nos permite obtener la expansión perturbativa usual, esta es [147]:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = S_\Lambda[\bar{\Psi}] + \sum_{l=1}^n \hbar^l \Gamma_{k(l)}[\bar{\Psi}]. \quad (4.32)$$

Por ejemplo, a un lazo la expansión será:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = S_\Lambda[\bar{\Psi}] + \hbar \Gamma_{k(1)}[\bar{\Psi}], \quad (4.33)$$

introduciendo $S_\Lambda[\bar{\Psi}]$ en el lado derecho de Ec.(4.23) se obtiene [63]

$$\partial_t \Gamma_{k(1)} = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[S_\Lambda^{(2)} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\}, \quad (4.34)$$

cuya solución:

$$\Gamma_{k(1)} = S_\Lambda + \frac{1}{2} \text{STr} \ln S_\Lambda^{(2)} + \text{cte}, \quad (4.35)$$

puede ser reemplazada en la ecuación para $\partial_t \Gamma_{k(2)}$ y así sucesivamente. La desventaja de este procedimiento es que es equivalente a la teoría de perturbaciones para acoplamiento débil.

4.3.2. Expansión en vértices

La expansión en vértices corresponde a resolver las ecuaciones de flujo para los vértices irreducibles, $\Gamma_k^{(n)}$, de Ec.(4.21) truncando la jerarquía en algún orden finito, por ejemplo, para la función de 2-puntos se tiene [63]:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k^{(2)} &= \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \Gamma_k^{(3)} \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \Gamma_k^{(3)} \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \Gamma_k^{(4)} \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

En general, la ecuación de flujo para $\Gamma_k^{(n)}$ contiene a $\Gamma_k^{(n+1)}$ y $\Gamma_k^{(n+2)}$. El truncamiento viene al despreciar la contribución de vértices de orden superior, por ejemplo, de $\Gamma_k^{(4)}$. La ventaja de la expansión en vértices es que retiene la dependencia completa en el momento de los mismos, mientras que la desventaja viene al truncar la dependencia de la acción en los campos [148, 149, 150].

4.3.3. Expansión derivativa

Finalmente, el esquema de truncamiento relevante para este trabajo es la expansión de la acción efectiva promedio en operadores derivativos, es decir, en derivadas de los campos; esto permite jerarquizar los operadores en términos de su dimensión de masa para luego truncar dicha jerarquía de forma conveniente. La expansión será de la forma:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \int d^4x \left\{ V_k[\bar{\Psi}] + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_k[\bar{\Psi}] \partial_\mu \bar{\Psi}_\alpha \partial^\mu \bar{\Psi}^\alpha + \frac{1}{4} \mathcal{Y}_k[\bar{\Psi}] (\partial_\mu \bar{\Psi}_\alpha \partial^\mu \bar{\Psi}^\alpha)^2 + \mathcal{O}(\partial^6) \right\}, \quad (4.37)$$

donde \mathcal{Z}_k y \mathcal{Y}_k son funciones arbitrarias de los campos. Este tipo de expansión es apropiada para el estudio de baja energía, manteniendo una dependencia completa tanto en la intensidad de los acoplamientos como en la cantidad de campos.

El orden principal de esta expansión es la *aproximación de potencial local* (APL), correspondiente a $\mathcal{Z}_k \rightarrow 1$ y anular los siguientes órdenes, manteniendo la dependencia del potencial en la escala de energía. Esta expansión puede combinarse con la expansión en vértices truncando el potencial a un orden finito en polinomios de los campos. Las funciones beta pueden obtenerse proyectando el flujo de la acción promedio efectiva en el operador que contenga el acoplamiento deseado, por ejemplo, si consideramos solo un tipo de campo y un potencial de la forma

$$V_k[\bar{\Psi}] = \sum_n^\infty g_k^{(n)} \bar{\Psi}^n \quad (4.38)$$

en la APL tendremos:

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q \left\{ \sum_n^\infty g_k^{(n)} \bar{\Psi}^n(q) + \frac{1}{2} q^2 \bar{\Psi}^2(q) \right\}. \quad (4.39)$$

Aplicando la derivada en t se obtiene

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q \sum_n^\infty \partial_t g_k^{(n)} \bar{\Psi}^n(q), \quad (4.40)$$

por lo tanto la función beta asociada a g_n será

$$\beta \left(g_k^{(n)} \right) = \partial_t g_k^{(n)} = \left. \frac{d^n}{d\Psi^n} \partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] \right|_{\Psi=0}, \quad (4.41)$$

la cual, en principio, será función de todos los demás acoplamientos.

Tal como está definida la APL no permite tener acceso a las dimensiones anómalas de la teoría, sin embargo, es posible mejorar la aproximación añadiendo al término cinético la renormalización de la función de onda del campo $\bar{\Psi}$ (sin ser función de los campos), esta mejora se conoce como APL':

$$\Gamma_k[\bar{\Psi}] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q \left\{ \sum_n^{\infty} g_k^{(n)} \bar{\Psi}^n(q) + \frac{1}{2} Z_k q^2 \bar{\Psi}^2(q) \right\}. \quad (4.42)$$

A diferencia del caso anterior ahora no sólo tendremos acceso a las funciones beta sino también a las dimensión anómala del campo, aplicando la derivada en t se obtiene

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q \left\{ \sum_n^{\infty} \partial_t g_k^{(n)} \bar{\Psi}^n(q) + \frac{1}{2} \partial_t Z_k q^2 \bar{\Psi}^2(q) \right\}, \quad (4.43)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial_t g_k^{(n)} &= \left. \frac{d^n}{d\Psi^n} \partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] \right|_{\Psi, q=0}, \\ \gamma &= -\partial_t \ln Z_k = - \left. \frac{1}{Z_k} \frac{d^2}{d\Psi^2} \partial_t \Gamma_k[\bar{\Psi}] \right|_{\Psi=0}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Los ordenes superiores de la expansión derivativa supondrán solucionar ecuaciones de flujo para V_k , Z_k , \mathcal{Y}_k , etc. las cuales en la gran mayoría de los casos estarán acopladas.

Capítulo 5

Aplicación del grupo de renormalización funcional a teorías supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$

En este capítulo se recopilan los resultados obtenidos de la aplicación del grupo de renormalización funcional para un supermultiplete quirral acoplado a un supermultiplete vectorial abeliano [2] y para la extensión supersimétrica de QED [3].

5.1. Supercampo quirral acoplado a un supercampo vectorial con simetría $U(1)$

La acción clásica para este modelo viene dada por Ec.(2.8) y Ec.(2.11), utilizaremos la expansión derivativa del grupo de renormalización funcional con tal de estudiar las funciones beta de las constante de acoplamiento entre Φ y V en el régimen no perturbativo.

5.1.1. Acción promedio efectiva en APL' y regulador supersimétrico

Los ingredientes necesarios para el calculo de la ecuación de Wetterich, Ec.(4.23), son la acción efectiva promedio y las funciones reguladoras contenidas en ΔS_k , Ec.(4.6). El

anzats para la acción efectiva promedio en APL' es [2]:

$$\begin{aligned} \Gamma_k = & \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} Z_\Phi \Phi^\dagger e^{2Z_g \sqrt{Z_V} g_k V} \Phi + \left[\int d^4x d^2\theta W_k(\Phi) + \text{h.c} \right] \\ & + \frac{2}{\xi} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} Z_V (D^2 V) (\bar{D}^2 V) + \frac{1}{32} \int d^4x d^2\theta Z_V W^\alpha W_\alpha, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $Z_{\Phi/V}$ es la renormalización de la función de onda del supercampo quiral/vectorial y Z_g es la renormalización de la constante de acoplamiento $U(1)$. Los campos y constante de acoplamiento renormalizadas se definen por:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sqrt{Z_\Phi} \Phi, \\ V_0 &= \sqrt{Z_V} V, \\ g_0 &= Z_g g_k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

En términos de las componentes de campos, la acción efectiva promedio será:

$$\begin{aligned} \Gamma_k = & \int d^4x \left\{ Z_\Phi \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i Z_\Phi \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + Z_\Phi F^\dagger F - i Z_G g_k \partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi + i Z_G g_k A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right. \\ & + Z_S g_k^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi - Z_G g_k \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu A_\mu \psi + i \sqrt{2} Z_G g_k [\phi^\dagger \psi \lambda - \phi \bar{\psi} \bar{\lambda}] + Z_G g_k \phi^\dagger \phi D \\ & + Z_V \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2\xi} A_\mu A^\mu + i \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right) \\ & \left. + \left[\frac{\partial W_k}{\partial \phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_k}{\partial \phi^2} \psi_\alpha \psi^\alpha + \text{h.c} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde, en principio, consideraremos un superpotencial renormalizable:

$$W_k = \frac{1}{2} m_k \phi^2 + \frac{1}{6} y_k \phi^3. \quad (5.4)$$

Las constantes se definen como:

$$\begin{aligned} Z_G &= Z_\Phi Z_g \sqrt{Z_V} \quad \text{y} \\ Z_S &= Z_\Phi Z_g^2 Z_V. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Respecto a la parte reguladora, utilizaremos reguladores de las dos clases distintas definidas en el Capítulo 4. El término regulador de la acción será, siguiendo [64, 70], de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta S_k = & \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \tilde{r}_k^{\text{opt}}(\square) e^{2g_k V} \Phi + \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \tilde{r}_k^{\text{M}}(\square) \Phi \\ & + \frac{1}{32} \int d^4x d^2\theta W^\alpha t_k^{\text{opt}}(\square) W_\alpha + \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} V \tilde{t}_k^{\text{M}}(\square) V, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde “opt” se refiere a las funciones reguladoras optimizadas de Ec.(4.25) para fermiones:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_k^{\text{opt}}(q^2) &= Z_\Phi \not{q} r_k^{\text{opt}}(y), & r_k^{\text{opt}}(y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right) \theta(1-y) \quad y \\ \tilde{t}_k^{\text{opt}}(q^2) &= Z_V \not{q} t_k^{\text{opt}}(y), & t_k^{\text{opt}}(y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right) \theta(1-y),\end{aligned}\tag{5.7}$$

y “M” es un regulador de tipo masa fermiónico, denotado como *regulador de Callan-Symanzik* [64, 70]:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_k^{\text{M}}(q^2) &= Z_\Phi k r_k^{\text{M}}(q^2), & r_k^{\text{M}}(q^2) &= 1 \quad y \\ \tilde{t}_k^{\text{M}}(q^2) &= Z_V k t_k^{\text{M}}(q^2), & t_k^{\text{M}}(q^2) &= 1.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Expandiendo Ec.(5.6) usando Ec.(1.167) se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta S_k &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \tilde{r}_k^{\text{opt}}(\square) \Phi + 2g \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \tilde{r}_k^{\text{opt}(2)}(\square) V \Phi + 4g^2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \tilde{r}_k^{\text{opt}(3)}(\square) V^2 \Phi \\ &\quad + \frac{1}{32} \int d^2\theta W^\alpha \tilde{t}_k^{\text{opt}}(\square) W_\alpha + \left\{ \int d^4x d^2\theta \Phi \tilde{r}_k^{\text{M}}(\square) \Phi + \text{h.c.} \right\} + \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} V \tilde{t}_k^{\text{M}}(\square) V.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Las funciones $r_k^{\text{opt}(2/3)}$ se han renombrado para absorber las renormalizaciones de función de onda correspondientes. Una ventaja de la aplicación del grupo de renormalización funcional es que todos sus ingredientes respetan supersimetría.

5.1.2. Ecuaciones de flujo

Calcularemos las ecuaciones de flujo para el superpotencial y la constante de acoplamiento g_k .

La estrategia de cálculo es la siguiente: en primer lugar, escribiremos Ec.(5.1) y Ec.(5.9) en el espacio de momentum; luego, debido a que no estamos considerando las renormalizaciones de las funciones de onda como dependientes del momentum, es posible restringir todos los campos a constantes reales $\Psi_\alpha(q) = (\sqrt{2\pi})^4 \Psi_\alpha \delta(q)$, por ejemplo:

$$\int d^4x Z_\Phi F^\dagger(x) F(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q Z_\Phi F^\dagger(-q) F(q) = Z_\Phi F^\dagger F \delta(0).\tag{5.10}$$

Luego, se calculan todos los elementos de Ec.(4.23) respecto al siguiente arreglo de campos:

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger &= (\phi^\dagger, \phi, F^\dagger, F, D, A_\mu, \bar{\psi}, \psi^T, \bar{\lambda}, \lambda^T) \\ \Psi &= (\phi, \phi^\dagger, F, F^\dagger, D, A_\nu, \psi, \bar{\psi}^T, \lambda, \bar{\lambda}^T),\end{aligned}\tag{5.11}$$

y finalmente se toma la supertraza. Los operadores pueden verse de forma explícita en el Apéndice D.

El teorema de no renormalización

Como vimos en el Capítulo 4, para obtener el flujo de un elemento de la acción efectiva promedio es posible proyectar la misma en una configuración conveniente de campos. En el caso del superpotencial, si hacemos $\psi = \bar{\psi} = \lambda = \bar{\lambda} = D = A = 0$ en Ec.(5.1) se obtiene

$$\partial_t \Gamma_k = (\sqrt{2\pi})^4 \delta(0) \partial_t \left[Z_\Phi F^\dagger F + \frac{\partial W_k}{\partial \phi} F + \frac{\partial W_k^\dagger}{\partial \phi^\dagger} F^\dagger \right],\tag{5.12}$$

por lo tanto, podemos obtener el flujo del superpotencial derivando el resultado de la ecuación de Wetterich en la proyección propuesta respecto a F o F^\dagger y luego haciendo $F = F^\dagger = 0$ respectivamente. El resultado es:

$$\partial_t W_k = 0,\tag{5.13}$$

lo cual confirma el teorema de no renormalización para esta teoría en la APL', siendo esta una comprobación del mismo a través de un método no perturbativo. Una consecuencia del mismo es que si queremos analizar el superpotencial renormalizable más general podemos simplemente reemplazar Ec.(5.4) en Ec.(5.1) ya que Ec.(5.13) nos asegura que el proceso de renormalización no generará nuevos operadores más que los considerados en la acción clásica, por lo que calcularemos también sus ecuaciones de flujo.

Funciones beta

Ya que consideraremos el superpotencial de Ec.(5.4), el teorema de no renormalización nos muestra que su renormalización vendrá dada por:

$$m_0 = Z_\Phi k m_k\tag{5.14}$$

$$y_0 = \sqrt{(Z_\Phi)^3} y_k,\tag{5.15}$$

con lo cual las funciones beta serán:

$$\beta_{g_k} = \gamma_g g_k \quad (5.16)$$

$$\beta_{y_k} = -\frac{3}{2} \gamma_\Phi y_k \quad (5.17)$$

$$\beta_{m_k} = (\gamma_\Phi - 1) m_k, \quad (5.18)$$

en consecuencia, necesitamos las dimensiones anómalas asociadas a $Z_{\Phi/g}$:

$$\gamma_{\Phi/g} = -\frac{d \ln Z_{\Phi/g}}{d \ln k}. \quad (5.19)$$

Para obtener ambas dimensiones anómalas podemos usar la proyección: $\psi = \psi^\dagger = F = F^\dagger = A = \lambda = \lambda^\dagger = 0$ con lo cual se tiene:

$$\partial_t \Gamma_k = (\sqrt{2\pi})^4 \delta(0) \partial_t \left[g_k Z_G \phi^\dagger \phi D + \frac{Z_V}{2} D^2 \right]. \quad (5.20)$$

El procedimiento de extracción de las dimensiones anómalas será:

- De Ec.(5.12) derivando respecto a F, F^\dagger para $F = F^\dagger = 0$ se obtiene $\partial_t Z_\Phi$, por lo tanto:

$$\gamma_\Phi = -\frac{1}{Z_\Phi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial F \partial F^\dagger} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\psi=\bar{\psi}=\lambda=\bar{\lambda}=D=A=0} \right\} \Big|_{F=F^\dagger=0}. \quad (5.21)$$

- De Ec.(5.20) derivando dos veces respecto a D para $D = 0$ se obtiene $\partial_t Z_V$, por lo tanto:

$$\gamma_V = -\frac{1}{Z_V} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial D^2} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\psi=\psi^\dagger=F=F^\dagger=A=\lambda=\lambda^\dagger=0} \right\} \Big|_{D=0}. \quad (5.22)$$

- De Ec.(5.20) derivando respecto a ϕ, ϕ^\dagger, D para $\phi = \phi^\dagger = D = 0$ se obtiene $\partial_t Z_G$, por lo tanto:

$$\gamma_G = -\frac{1}{Z_G} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \phi \partial \phi^\dagger \partial D} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\psi=\psi^\dagger=F=F^\dagger=A=\lambda=\lambda^\dagger=0} \right\} \Big|_{\phi=\phi^\dagger=D=0}. \quad (5.23)$$

Finalmente γ_g se obtiene de la relación:

$$\gamma_g = \gamma_G - \gamma_\Phi - \frac{1}{2}\gamma_V, \quad (5.24)$$

la cual se deduce de Ec.(5.5).

Analizaremos las funciones beta obtenidas en dos casos distintos: para $r^{\text{opt}}/t^{\text{opt}} = 0$, que llamaremos el caso ‘‘Callan-Symanzik’’ (CS) y para $r^{\text{M}}/t^{\text{M}} = 0$ que llamaremos el caso ‘‘Tipo Litim’’ (TL).

En el caso de la APL’, al ser los campos constantes reales, la solución de la ecuación de Wetterich se reduce a la traza del producto de las matrices del Apéndice D:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int d^4 q \text{Tr} \left\{ \left(\left[\Gamma_k^{(2)} \right] + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \delta^{(4)}(p - q) \right\}. \quad (5.25)$$

En el caso (CS), se obtienen las siguientes integrales de momentum:

$$\gamma_\Phi^{\text{CS}} = - \int_0^\infty dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{4y_k^2 \alpha_M (1 - \gamma_\Phi^{\text{CS}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{M}}}{(\alpha_M^2 - q^2)^3} \quad (5.26)$$

$$\gamma_V^{\text{CS}} = - \int_0^\infty dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{8g_k^2 \alpha_M (1 - \gamma_\Phi^{\text{CS}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{M}}}{(\alpha_M^2 - q^2)^3} \quad (5.27)$$

$$\gamma_g^{\text{CS}} = \int_0^\infty dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{4\alpha_M [3g_k^2 (\alpha_M^2 - q^2) - y_k^2 (\alpha_M^2 + 5q^2)] (1 - \gamma_\Phi^{\text{CS}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{M}}}{(\alpha_M^2 - q^2)^4}, \quad (5.28)$$

donde $\Omega_d = \frac{2(\pi)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma[\frac{d}{2}]}$ es la superficie de una esfera $d - 1$ dimensional,

$$\alpha_M = m + 2r_k^{\text{M}}, \quad (5.29)$$

y q se refiere a q^2/k^2 . Reemplazando las funciones reguladoras de Ec.(5.8) y resolviendo la integral obtenemos [2]

$$\beta_{y_k}^{\text{CS}} = \frac{24\sqrt{2}\pi^2 y_k^3}{96 + 192\pi + 48\pi^3 + 6\pi^4 + 3(2 + \pi)^4 m_k - 16\pi^2 (\sqrt{2}y_k^2 - 9)}, \quad (5.30)$$

$$\beta_{m_k}^{\text{CS}} = - \frac{3(2 + \pi)^4 m_k (m_k + 2)}{96 + 192\pi + 48\pi^3 + 6\pi^4 + 3(2 + \pi)^4 m_k - 16\pi^2 (\sqrt{2}y_k^2 - 9)}, \quad (5.31)$$

$$\beta_{g_k}^{\text{CS}} = \frac{48\sqrt{2}\pi^2 g_k (g_k^2 + y_k^2)}{48 + 96\pi + 24\pi^3 + 3\pi^4 + 3(2 + \pi)^4 m_k - 8\pi^2 (\sqrt{2}y_k^2 - 9)}. \quad (5.32)$$

Del mismo modo para el caso (TL), la ecuación de Wetterich nos entrega las siguientes integrales para las dimensiones anómalas:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Phi}^{\text{TL}} &= - \int_0^1 dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{y_k^2 \alpha_r (\alpha_r^2 q^2 + m_k^2) (-\gamma_{\Phi}^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{opt}}}{(\alpha_r^2 q^2 - m_k^2)^3} \\
\gamma_V^{\text{TL}} &= - \int_0^1 dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{1}{(\alpha_r^2 q^2 - m_k^2)^3} \left\{ 2g_k^2 \alpha_r \alpha_G \left[\alpha_G (\alpha_r^2 q^2 + m_k^2) (-\gamma_{\Phi}^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{opt}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_r (\alpha_r^2 q^2 - m_k^2) (-\gamma_g^{\text{TL}} - \gamma_{\Phi}^{\text{TL}} - \frac{1}{2}\gamma_V^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{opt}(2)} \right] \right\} \\
\gamma_g^{\text{TL}} &= - \int_0^1 dq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} q^{d-1} \frac{1}{(\alpha_r^2 q^2 - m_k^2)^4 \alpha_t^2} \left\{ \alpha_t \left[y_k^2 \alpha_t \left(m_k^4 (r_k^{\text{opt}} - r_k^{\text{opt}(2)}) - 8m_k^2 q^2 \alpha_r^2 \alpha_G \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q^4 \alpha_r^4 \left(4 + r_k^{\text{opt}} + 3r_k^{\text{opt}(2)} \right) - g_k^2 \alpha_r (\alpha_r^4 q^4 - m_k^4) \alpha_G^2 \left(3 + 2r_k^{\text{opt}(2)} + t_k^{\text{opt}} \right) \right] (-\gamma_{\Phi}^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{opt}} \right. \\
&\quad \left. - \alpha_r (\alpha_r^2 - m_k^2) \left[g_k^2 \alpha_r (\alpha_r^2 q^2 - m_k^2) \alpha_G^3 (-\gamma_V^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) t_k^{\text{opt}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_t \left(g_k^2 \alpha_r (\alpha_r^2 q^2 - m_k^2) \alpha_G \left(4 + 3r_k^{\text{opt}(2)} + t_k^{\text{opt}} \right) - y_k^2 \alpha_t (\alpha_r^2 q^2 + m_k^2) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (-\gamma_g^{\text{TL}} - \gamma_{\Phi}^{\text{TL}} - \frac{1}{2}\gamma_V^{\text{TL}} + \partial_t - q\partial_q) r_k^{\text{opt}(2)} \right] \right\}, \tag{5.33}
\end{aligned}$$

donde $\alpha_r = r_k^{\text{opt}} + 1$, $\alpha_G = r_k^{\text{opt}(2)} + 1$ y $\alpha_t = t_k^{\text{opt}} + 1$. La solución a las integrales es:

$$\beta_{y_k}^{\text{TL}} = - \frac{36\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}} (m_k^2 + 1) y_k^3}{9\sqrt{\pi} (m_k^2 - 1)^3 + 8\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}} (m_k^2 + 1) y_k^2} \tag{5.34}$$

$$\beta_{m_k}^{\text{TL}} = \frac{\sqrt{\pi} m_k \left(16\sqrt{2}\pi^2 y_k^2 (m_k^2 + 1) - 9(2 + \pi)^4 (m_k^2 - 1)^3 \right)}{9\sqrt{\pi} (m_k^2 - 1)^3 + 8\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}} (m_k^2 + 1) y_k^2} \tag{5.35}$$

$$\beta_{g_k}^{\text{TL}} = \frac{g_k \left(m_k^2 (m_k^2 - 1)^3 (144 + \pi + 72\pi^3 + 9\pi^4 + 216\pi^2) - 4\pi^2 \sqrt{2} (7m_k^4 + 4m_k^2 - 3) \right)}{(m_k^2 - 1)^4 (144 + \pi + 72\pi^3 + 9\pi^4 + 216\pi^2) + 8\sqrt{2}\pi^2 (m_k^4 - 1) y_k^2}. \tag{5.36}$$

5.1.3. Puntos fijos

El estudio de los puntos fijos, es decir, valores de las constantes $\{m_*, y_*, g_*\}$ para los cuales todas las funciones beta se anulan es de vital importancia. Si la función beta posee puntos fijos no triviales estables en el sentido en que pequeñas perturbaciones en torno a él no se alejan hacia un nuevo punto fijo, entonces existen ciertas configuraciones de los

parámetros que dan lugar a una teoría bien definida en torno a él; si además existe un camino que lo una con el punto fijo trivial entonces se puede decir que la teoría es segura asintóticamente, es decir, existe una cierta escala de energía a la cual las interacciones se congelan [151].

Para analizar los puntos fijos de esta teoría es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\beta_{y_k}(m_*, y_*, g_*) = \beta_{m_k}(m_*, y_*, g_*) = \beta_{g_k}(m_*, y_*, g_*) = 0 \quad (5.37)$$

para $\{m_*, y_*, g_*\}$, esto se ha realizado usando los comandos `NSolve` y `FindRoot` del software `Mathematica`.

En el caso del regulador (CS) el sistema solo exhibe el punto fijo gaussiano $m_* = y_* = g_* = 0$. Por otro lado, en el caso del regulador (TL), las funciones beta exhiben un continuo de puntos fijos estables para $g_* = 0$ y $m_k \neq 1$, además de un punto fijo inestable para $m_* = 1$. En la Figura 5.1 se puede ver el cambio del punto fijo cuando y_k crece, mientras en la Figura 5.2 se muestra la distribución de puntos fijos para distintos valores de y_k .

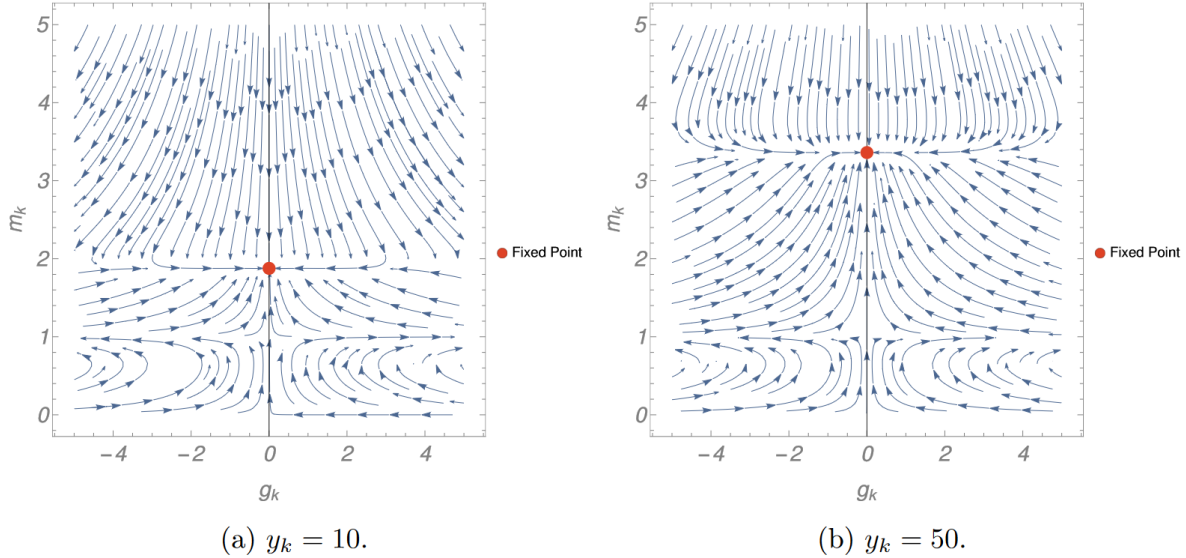


Figura 5.1: Diagrama de flujo en el plano $g_k - m_k$ para distintos valores de y_k . Aquí $m(g)$ se representa en el eje $y(x)$ [2].

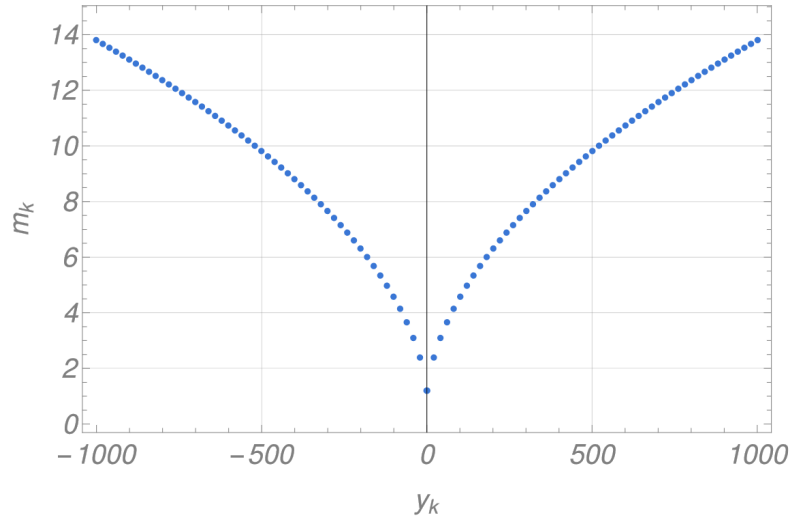


Figura 5.2: Puntos fijos para distintos valores de m_k y y_k [2].

Usualmente se esperaría que distintos reguladores reprodujeran los mismos puntos fijos con distinta precisión, sin embargo, lo que aquí se observa es que ambos tipos de reguladores entregan resultados completamente distintos, mientras uno (TL) entrega funciones beta con un continuo de puntos fijos no triviales tanto estables como no estables, el otro (CS) entrega funciones beta sin puntos fijos. En primer lugar podemos notar que el regulador de Callan-Symanzyk no es un regulador optimizado según el criterio de Ec.(4.31), esto hace que la dependencia espuria del regulador sea mayor que la del regulador optimizado; sin embargo, otra razón es que los reguladores de tipo masa no son buenas opciones para teorías supersimétricas vectoriales cuando se trabaja en el gauge de Wess-Zumino, debido a que los mismos se construyen con el término V^2 , el cual según Ec.(1.169) es proporcional únicamente a A^2 con lo cual no regulariza los modos de alta energía de los campos λ y D [2].

5.2. Electrodinámica cuántica supersimétrica

La acción clásica del modelo fue vista en Ec.(2.18) y Ec.(2.19). Aplicaremos la APL' y el segundo orden de la expansión derivativa en la teoría para encontrar la función beta del acoplamiento, la constante de estructura fina, y la dimensión anómala de los campos de materia en el régimen no perturbativo.

5.2.1. Acción promedio efectiva en APL' y regulador supersimétrico

El ansatz para la acción promedio efectiva en APL' será [3]

$$\Gamma_k = Z_\Phi \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\Phi_-^\dagger e^{-2V} \Phi_- + \Phi_+^\dagger e^{2V} \Phi_+ \right] + \frac{Z_V^2}{32e^2} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \frac{2Z_V^2}{\chi e^2} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V) (\bar{D}^2V) + m_0 \left\{ \int d^4x d^2\theta \Phi_- \Phi_+ + \text{h.c.} \right\}, \quad (5.38)$$

o en términos de las componentes de campos

$$\Gamma_k = \int d^4x Z_\Phi \left[D_\mu \phi_-^\dagger D^\mu \phi_- + \left(D_\mu \phi_+^\dagger \right)^\dagger D^\mu \phi_+^\dagger + i\bar{\psi}_- \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_- + i\bar{\psi}_+ \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_+ + F_-^\dagger F_- + F_+^\dagger F_+ \right] + \frac{Z_V^2}{e^2} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\chi e^2} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + i\bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right] + i\sqrt{2} Z_\Phi \left\{ \left[\phi_-^\dagger \psi_- \lambda - \phi_+^\dagger \psi_+ \lambda \right] + i\sqrt{2} \left[\phi_+ \bar{\psi}_+ \bar{\lambda} - \phi_- \bar{\psi}_- \bar{\lambda} \right] \right\} + Z_\Phi \left(\phi_-^\dagger \phi_- D - \phi_+^\dagger \phi_+ D \right) + m_0 \left(\phi_- F_+ + \phi_+ F_- - \psi_- \cdot \psi_+ + \text{h.c.} \right). \quad (5.39)$$

La renormalización de la carga y los campos será de la siguiente manera:

$$\Phi_0 \rightarrow Z_\Phi^{\frac{1}{2}} \Phi, \quad V_0 \rightarrow Z_V^{\frac{1}{2}} V, \quad e_0 \rightarrow Z_e e. \quad (5.40)$$

Con tal de evitar violar la simetría de gauge, la renormalización de la carga eléctrica no es independiente de las demás, en particular, se cumple que $Z_e = Z_V^{-\frac{1}{2}}$ [108], lo que lleva a la siguiente relación:

$$e_0 = Z_e e = Z_V^{-\frac{1}{2}} e. \quad (5.41)$$

Respecto al término que regula la acción, su forma será

$$\Delta S_k = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\Phi_-^\dagger \tilde{r}_k(\square) \Phi_- + \Phi_+^\dagger \tilde{r}_k(\square) \Phi_+ \right] + \frac{1}{32} \int d^2\theta W^\alpha \tilde{t}_k(\square) W_\alpha, \quad (5.42)$$

donde a diferencia del modelo anterior, aquí únicamente regularizaremos los términos cinéticos del contenido de campos, mas no el término cinético de los supercampos. Las funciones reguladoras serán las funciones optimizadas de Litim:

$$\tilde{r}_k(q^2) = Z_\Phi q r_k(y), \quad r_k(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \theta(1-y) \quad y$$

$$\tilde{t}_k(q^2) = Z_V q^2 t_k(y), \quad t_k(y) = \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \theta(1-y). \quad (5.43)$$

5.2.2. Ecuaciones de flujo en APL'

Utilizaremos el formalismo del grupo de renormalización funcional para calcular una forma no perturbativa de la función beta de la carga eléctrica de electrodinámica cuántica supersimétrica en la APL'. Nuevamente es posible restringir los campos a constantes reales en el espacio de momentum, tal como en Ec.(5.10), ya que las renormalizaciones de las funciones de onda no dependen del momentum.

Los operadores que se usarán para solucionar la ecuación de Wetterich, Ec.(4.23), se construirán respecto al siguiente arreglo de campos:

$$\begin{aligned}\Psi &= \left\{ \phi_-, \phi_-^\dagger, F_-, F_-^\dagger, \phi_+, \phi_+^\dagger, F_+, F_+^\dagger, D, A, \psi_-, \bar{\psi}_-^\dagger, \psi_+, \bar{\psi}_+^\dagger, \lambda, \bar{\lambda}^\dagger \right\}, \\ \Psi^\dagger &= \left\{ \phi_-^\dagger, \phi_-, F_-^\dagger, F_-, \phi_+^\dagger, \phi_+, F_+^\dagger, F_+, D, A, \bar{\psi}_-, \psi_-^\dagger, \bar{\psi}_+, \psi_+^\dagger, \bar{\lambda}, \lambda^\dagger \right\}.\end{aligned}\quad (5.44)$$

La forma explícita de los operadores puede ser vista en el Apéndice E.

El teorema de no renormalización

En el ansatz de la acción promedio efectiva hemos reemplazado explícitamente un superpotencial cuadrático, ya que como vimos en Ec.(5.13), el teorema de no renormalización se respeta para supercampos quirales acoplados a supercampos vectoriales, sin embargo, por completitud lo comprobaremos nuevamente de forma explícita. Rebobinando hasta Ec.(2.15) y manteniendo el superpotencial sin especificar obtenemos un término extra en Ec.(5.39)

$$\mathcal{L}_{\Phi\text{int}} = \frac{\partial W_k}{\partial \phi_-} F_+ + \frac{\partial W_k}{\partial \phi_+} F_- - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_k}{\partial \phi_- \partial \phi_+} \psi_+ \cdot \psi_- + \text{h.c.} \quad (5.45)$$

por lo tanto, proyectando la acción efectiva promedio en $\phi_+ = F_- = \psi_+ = \psi_- = \lambda = D = A = 0$ se obtiene:

$$\partial_t \Gamma_k = (\sqrt{2\pi})^4 \delta^{(4)}(0) \partial_t \left[Z_\Phi F_+^\dagger F_+ + \frac{\partial W_k}{\partial \phi_-} F_+ \right]. \quad (5.46)$$

Proyectando la ecuación de Wetterich en la misma configuración de campos podemos obtener el flujo del superpotencial derivando respecto a F_+ para $F_+ = \phi_- = 0$, el resultado es

$$\partial_t W_k = 0, \quad (5.47)$$

comprobando que el teorema de no renormalización se mantiene en la APL'. Este resultado justifica la elección de la acción promedio efectiva ya nos asegura que el superpotencial no recibirá correcciones de nuevos operadores, además, también nos muestra que la renormalización de la masa es de la forma

$$m_0 = Z_\Phi km. \quad (5.48)$$

La función beta

Para encontrar la función beta necesitamos las dimensiones anómalas, como indica Ec.(5.41). La función beta será:

$$\beta_e = -\frac{1}{2}\gamma_V e. \quad (5.49)$$

Las dimensiones anómalas se pueden encontrar de las siguientes proyecciones de la acción efectiva promedio: $\phi_- = \phi_+ = \psi_- = \psi_+ = F_+ = F_- = A = \lambda = 0$ nos da:

$$\partial_t \Gamma_k = (\sqrt{2\pi})^4 \delta^{(4)}(0) \partial_t \left[\frac{Z_V^2}{2e^2} D^2 \right], \quad (5.50)$$

y $F_- = F_+ = \psi_- = \psi_+ = A = \lambda = 0$ nos entrega:

$$\partial_t \Gamma_k = (\sqrt{2\pi})^4 \delta^{(4)}(0) \partial_t \left[Z_\Phi \phi_-^\dagger \phi_- D + \frac{Z_V^2}{2e^2} D^2 \right]. \quad (5.51)$$

El procedimiento para obtener las dimensiones anómalas será:

- De Ec.(5.50) derivando respecto a D dos veces se obtiene $\partial_t Z_V^2$, con lo cual:

$$-\frac{1}{2}\gamma_V = \frac{e^2}{4Z_V^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial D^2} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\phi_- = \phi_+ = \psi_- = \psi_+ = F_+ = F_- = A = \lambda = 0} \right\} \Big|_{D=0}. \quad (5.52)$$

- De Ec.(5.51) derivando respecto a ϕ_-^\dagger, ϕ_- y D se obtiene $\partial_t Z_\Phi$, así:

$$\gamma_\Phi = -\frac{1}{Z_\Phi} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \phi_- \partial \phi_-^\dagger \partial D} \partial_t \Gamma_k \Big|_{F_- = F_+ = \psi_- = \psi_+ = A = \lambda = 0} \right\} \Big|_{\phi_- = D = 0}. \quad (5.53)$$

En el caso de la APL', al ser los campos constantes reales, la solución de la ecuación de Wetterich se reduce a la traza de la matriz producto de las matrices del Apéndice E:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int d^4 q \text{Tr} \left\{ \left(\left[\Gamma_k^{(2)} \right] + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \delta^{(4)}(p - q) \right\}. \quad (5.54)$$

Las dimensiones anómalas vienen dadas por las siguientes integrales [3]:

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} \frac{e_R^2 [2\rho(q)\tau(q)\mathcal{M}_+(q)\partial_t r(q) - \rho(q)^2 \mathcal{M}_-(q)\partial_t t(q)]}{\mathcal{M}_-(q)^3 \tau(q)^2} \\ &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} \frac{e_R^2 [2\rho(q)\tau(q)\mathcal{M}_+(q)(-\gamma_\Phi - q\partial_q)r(q) - \rho(q)^2 \mathcal{M}_-(q)(\gamma_V - q\partial_q)t(q)]}{\mathcal{M}_-(q)^3 \tau(q)^2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\gamma_V &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} \frac{e_R^2 \rho(q)\mathcal{M}_+(q)\partial_t r(q)}{\mathcal{M}_-(q)^3} \\ &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} \frac{e_R^2 \rho(q)\mathcal{M}_+(q)(-\gamma_\Phi - q\partial_q)r(q)}{\mathcal{M}_-(q)^3}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(q) &= r(q) + 1 \\ \tau(q) &= t(q) + 1 \\ \mathcal{M}_\pm(q) &= m_0^2 \pm q^2 \rho(q)^2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

La solución de las integrales nos entrega la dimensión anómala del supercampo quiral [3]:

$$\gamma_\Phi(\alpha) = \frac{5\alpha \left(\alpha(1 + m^2) - 6\pi(1 - m^2)^2 \right)}{5(1 + m^2)\alpha^2 - 9\pi\alpha(1 - m^2)^2(1 + m^2) + 60\pi^2(1 - m^2)^5} \quad (5.58)$$

y la función beta

$$\beta(\alpha) = \frac{3\alpha^2 \left((7 + 4m^2 - 3m^4)\alpha + 20(1 - m^2)^3(1 + m^2)\pi \right)}{10\alpha^2(1 - m^4) - 18\pi\alpha(1 - m^2)^3(1 + m^2) + 120\pi^2(1 - m^2)^6}, \quad (5.59)$$

donde $\alpha = e^2/4\pi$ es la constante de estructura fina renormalizada.

El resultado principal de este trabajo es que ambas funciones se relacionan de la siguiente forma:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 (1 + m^2)}{2\pi (1 - m^2)^3} (1 - \gamma_\Phi(\alpha)), \quad (5.60)$$

que es la relación NSVZ de Ec.(2.52) modificado por un término dependiente de la masa.

Los términos $1 \pm m^2$ son un reflejo de que el proceso de regularización involucra explícitamente al momentum, si expresamos Ec.(5.60) en términos de la masa desnuda vemos que

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 \left(1 + \left(\frac{m_0}{k}\right)^2\right)}{2\pi \left(1 - \left(\frac{m_0}{k}\right)^2\right)^3} (1 - \gamma_\Phi(\alpha)), \quad (5.61)$$

Si la escala de regularización se mueve por debajo de la masa del campo, entonces la función beta se ve suprimida por $1/m^2$, de tal forma que para $k \sim m$ es cero, ya que estamos dejando al campo fuera del rango de validez de la teoría efectiva. En el caso contrario, si la escala de regularización se mueve por encima de la masa, entonces los términos de masa son cada vez más despreciables y la teoría se desacopla de la escala de regularización. En este límite la función beta y dimensión anómala son [3]:

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi(\alpha) &= \frac{5\alpha(\alpha - 6\pi)}{5\alpha^2 - 9\alpha\pi + 60\pi^2}, \\ \beta(\alpha) &= \frac{3\alpha^2(7\alpha + 20\pi)}{10\alpha^2 - 18\alpha\pi + 120\pi^2}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

En este caso se cumple la relación NSVZ,

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\pi} (1 - \gamma_\Phi(\alpha)), \quad (5.63)$$

lo cual puede ser visto si expandimos en serie de α ambas funciones:

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi(\alpha) &= -\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha^2}{120\pi^2} + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ \beta(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{2\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} - \frac{\alpha^4}{240\pi^3} + \mathcal{O}(\alpha^5). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Por otro lado, la función beta no perturbativa de Ec.(5.62) es consistente con los resultados perturbativos, expresamos la expansión en serie anterior en términos de la carga eléctrica se obtiene,

$$\beta_e(e) = \frac{e^3}{4(4\pi^2)} + \frac{e^5}{8(4\pi^2)^2} + \mathcal{O}(e^7), \quad (5.65)$$

el cual concuerda con Ec.(2.31). En la Figura 5.3 podemos ver una comparación entre la función beta a dos lazos y en APL'.

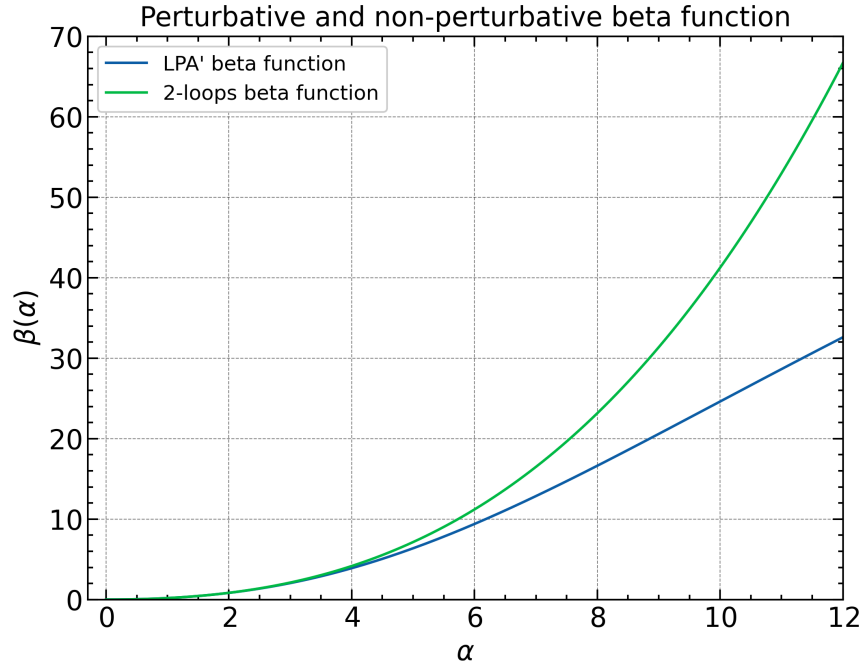


Figura 5.3: Comparación entre la función beta en APL' y la función beta a 2 lazos [3].

5.2.3. Puntos fijos

Analizaremos los puntos fijos de la función beta de Ec.(5.59). La relación NSVZ nos muestra que de forma análoga se pueden encontrar los puntos fijos con la condición $\gamma_{\Phi}(\alpha_*) = 1$. Claramente existe un punto fijo trivial para $\alpha_* = 0$ y respecto a los puntos fijos no triviales, se puede ver que Ec.(5.59) se anula cuando:

$$\alpha_* = -\frac{20\pi(-1 + 3m^2 - 3m^4 + m^6)}{-7 + 3m^2}. \quad (5.66)$$

Dado que α depende del cuadrado de la carga eléctrica, sólo nos interesan los puntos fijos que representen $\alpha_* > 0$.

De Ec.(5.66) vemos por un lado que hay valores para los cuales α es positivos, y por otro que existe un valor de la masa que genera una discontinuidad. Numéricamente, el rango en el cual existirán puntos fijos no triviales válidos es $m \in (1, 1,5275')$. En la Figura 5.4 se puede ver la forma de la función beta para un valor de la masa en el rango de validez, en el cual se pueden identificar claramente dos regiones separadas por la asíntota, donde en una de ellas vive el punto fijo gaussiano y en la otra un punto fijo no trivial. El punto fijo no trivial es estable en cuanto a que pequeñas perturbaciones en torno a él nos traen de vuelta al punto fijo, sin embargo, no podemos decir que la teoría posea seguridad asintótica ya que no existen trayectorias que unan a ambos puntos.

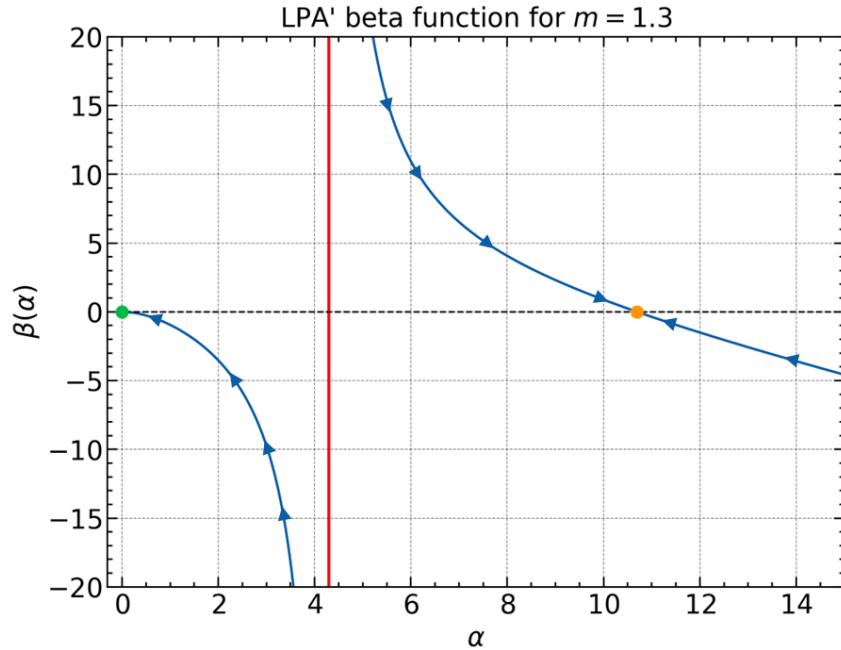


Figura 5.4: Diagrama de flujo de la función beta en Ec.(5.59) para $m = 1,3$. El punto verde corresponde al punto fijo gaussiano y el punto naranja corresponde al punto fijo no trivial en $\alpha_* = 10,6947$. La discontinuidad de la función beta para $\alpha = 4,2954'$ se representa por la línea vertical roja [3].

En el límite de desacoplamiento, la función beta de Ec.(5.62) no posee puntos fijos no triviales.

Finalmente veremos que aún incluyendo los términos de masa es posible obtener la relación NSVZ definiendo la siguiente constante efectiva:

$$\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 \frac{(1+m^2)^2}{(1-m^2)^6}. \quad (5.67)$$

Además de la función beta y dimensión anómala

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\Phi(\tilde{\alpha}) &= \gamma_\Phi(\tilde{\alpha}) \\ \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) &= \frac{(1+m^2)}{(1-m^2)} \beta(\tilde{\alpha}). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Sus formas son:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\Phi(\tilde{\alpha}) &= \frac{5\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}(1+m^2) - 6\pi)}{5(1-m^2)\tilde{\alpha}^2 - 9\pi\tilde{\alpha}(1+m^2)^2(1+m^2) + 60\pi^2(1+m^2)} \\ \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) &= \frac{3\tilde{\alpha}^2((7-3m^2)\tilde{\alpha} + 20(1+m^2)\pi)}{10\tilde{\alpha}^2(1-m^2) + 18\pi\tilde{\alpha}(1+m^2) - 120\pi^2(1+m^2)}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

En el límite de desacoplamiento son equivalentes a Ec.(5.62) y satisfacen la Ec.(2.52):

$$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{2\pi} (1 - \tilde{\gamma}_\Phi(\tilde{\alpha})). \quad (5.70)$$

5.2.4. Acción promedio efectiva a segundo orden de expansión derivativa

La expansión derivativa tiene como ventaja que permite encontrar la función beta y dimensión anómala en un régimen no perturbativo en la intensidad del acoplamiento a costa de ser efectiva a momentum bajo. Con tal de obtener un primer vistazo acerca de como los modos de momentum mas alto modifican la función beta, estudiaremos el flujo usando el segundo orden de la expansión derivativa de Ec.(4.37). Añadiremos los efectos de los modos de momentum del orden del término cinético, para ello promoveremos las renormalizaciones de las funciones de onda a funciones dependientes de la escala de momentum $Z_k(\square)$, las cuales modularán la parte cinética de la acción promedio efectiva.

El ansatz para la acción promedio efectiva a segundo orden de la expansión derivativa será [3]:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} Z_{\Phi,k}(\square) [\Phi_-^\dagger e^{-2V} \Phi_- + \Phi_+^\dagger e^{2V} \Phi_+] + \frac{1}{32e^2} \int d^4x d^2\theta Z_{V,k}(\square)^2 W^\alpha W_\alpha \\ &+ \frac{2Z_{V,k}(\square)^2}{\chi e^2} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (D^2V)(\bar{D}^2V) + m_0 \left\{ \int d^4x d^2\theta \Phi_- \Phi_+ + \text{h.c} \right\}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Con tal de respetar los resultados de la APL', requerimos que las funciones arbitrarias tiendan a las renormalizaciones de las funciones de onda ordinarias en el límite $q \rightarrow 0$,

$$Z_{\Phi/V,k}(q \rightarrow 0) \rightarrow Z_{\Phi/V}, \quad (5.72)$$

lo cual será implementado parametrizando la dependencia del momentum en una función $\zeta_{\Phi/V,k}(q)$ dependiente del momentum [70], de tal forma que:

$$Z_{\Phi/V,k}(q) = Z_{\Phi/V} \zeta_{\Phi/V,k}(q), \quad (5.73)$$

con $\zeta_{\Phi/V,k}(0) = 1$.

Respecto al término regulador, mantendremos la forma de Ec.(5.42), sin embargo, se usarán las funciones reguladoras:

$$\begin{aligned} r(y) &= \sqrt{\zeta_{\Phi,k}(y)} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{\zeta_{\Phi,k}(1)}{\zeta_{\Phi,k}(y)}} - 1 \right) \theta(1-y) \\ t(y) &= \zeta_{\Phi,k}(y) \left(\frac{1}{y} \frac{\zeta_{\Phi,k}(1)}{\zeta_{\Phi,k}(y)} - 1 \right) \theta(1-y), \end{aligned} \quad (5.74)$$

conocidas como ‘‘Reguladores de tipo Litim II’’ en [70]. La ventaja de estas funciones reguladoras es que eliminan la dependencia en q de los denominadores para cualquier orden de truncamiento de $\zeta_{\Phi,k}$.

5.2.5. Ecuaciones de flujo a segundo orden

La función beta se obtendrá nuevamente de Ec.(5.49) utilizando el arreglo de campos de Ec.(5.44).

Ya que las funciones de renormalización de las funciones de onda dependen explícitamente del momentum, no podemos restringir la totalidad de los campos a constantes reales; por ejemplo, utilizando el mismo procedimiento de Ec.(5.10), si restringimos todos los campos a constantes reales sucede que:

$$\int d^4x Z_{\Phi}(\square) F^\dagger(x) F(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q Z_{\Phi}(q^2) F^\dagger(-q) F(q) = Z_{\Phi} F^\dagger F \delta(0) \quad (5.75)$$

y perdemos toda la información del momentum. Debido a esto restringiremos todos los campos a constantes reales excepto aquellos necesarios para extraer la función Z_k en cuestión.

La función beta

Realizando la proyección $\phi_- = \phi_+ = \psi_- = \psi_+ = F_+ = F_- = A = \lambda = 0$ y manteniendo la dependencia del momentum del campo D se obtiene:

$$\partial_t \Gamma_k = \int d^4 p \partial_t \left[\frac{Z_{V,k}(p)^2}{2e^2} D(p) D(-p) \right], \quad (5.76)$$

por otro lado, realizando la proyección $F_- = F_+ = \psi_- = \psi_+ = A = \lambda = 0$ y manteniendo la dependencia en el momentum de los campos ϕ_- y D se obtiene:

$$\partial_t \Gamma_k = \int d^4 p \partial_t \left[\int d^4 p' Z_{\Phi,k}(p) \phi_-(p) \phi_-^\dagger(p') D(p' - p) + \frac{Z_{V,k}(p)^2}{2e^2} D(p) D(-p) \right]. \quad (5.77)$$

El procedimiento de extracción será:

- De Ec.(5.76) derivando respecto a $D(p)$, $D(-p)$ se obtiene $\partial_t Z_{V,k}(p)^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Z_V} \partial_t Z_{V,k}(p) &= -\frac{1}{2} \gamma_V \zeta_{V,k}(p) + \frac{1}{2} \partial_t \zeta_{V,k}(p) \\ &= \frac{e^2}{4Z_V Z_{V,k}(p)} \left\{ \frac{\delta^2}{\delta D(p) \delta D(-p)} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\phi_- = \phi_+ = \psi_- = \psi_+ = F_+ = F_- = A = \lambda = 0} \right\} \Big|_{D=0}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

- De Ec.(5.77) derivando respecto a $\phi(p)$, $\phi^\dagger(p')$ y $D(p' - p)$ se obtiene $\partial_t Z_{\Phi,k}(p)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_\Phi} \partial_t Z_{\Phi,k}(p) &= -\gamma_\Phi \zeta_{\Phi,k}(p) + \partial_t \zeta_{\Phi,k}(p) \\ &= \frac{1}{Z_\Phi} \left\{ \frac{\delta^3}{\delta \phi_-(p) \delta \phi_-^\dagger(p') \delta D(p' - p)} \partial_t \Gamma_k \Big|_{F_- = F_+ = \psi_- = \psi_+ = A = \lambda = 0} \right\} \Big|_{\phi_- = D = 0}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

En este caso los operadores que van en la ecuación de Wetterich tienen una dependencia no trivial en el momentum:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int d^4 q \text{Tr} \left\{ \left(\left[\Gamma_k^{(2)} \right] (p, q) + R_k(p, q) \right)^{-1} \partial_t R_k(p, q) \right\}, \quad (5.80)$$

por lo tanto la ecuación no puede ser calculada simplemente tomando la matriz inversa del propagador regularizado. La estrategia para solucionar la ecuación es descomponer el propagador inverso regularizado,

$$G_k = \Gamma_k^{(2)} + R_k, \quad (5.81)$$

en una parte independiente de los campos $G_{0,k}$ y una parte dependiente de los campos ΔG_k [152]:

$$G_k = G_{0,k} + \Delta G_k, \quad (5.82)$$

cuyas formas específicas se encuentran en el Apéndice F. Sustituyendo esta descomposición en Ec.(4.23) podemos realizar una expansión en serie de potencias de la ecuación de Wetterich respecto a la parte dependiente de los campos:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \frac{1}{2} \text{STr} \tilde{\partial}_t \ln [G_{0,k} + \Delta G_k] \\ &= \frac{1}{2} \text{STr} \tilde{\partial}_t (G_{0,k}^{-1} \Delta G_k) - \frac{1}{4} \text{STr} \tilde{\partial}_t (G_{0,k}^{-1} \Delta G_k)^2 + \frac{1}{6} \text{STr} \tilde{\partial}_t (G_{0,k}^{-1} \Delta G_k)^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde $\tilde{\partial}_t$ solo afecta al operador R_k . El operador inverso de la parte independiente de los campos puede ser calculada simplemente como una matriz inversa. Ya que Ec.(5.78) y Ec.(5.79) son cuadrática y cúbica en los campos respectivamente, sólo necesitamos expandir hasta el tercer orden en la parte dependiente.

Definiendo

$$W(q, q') = G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q + q') \quad (5.84)$$

vemos que el operador cuadrático tendrá la forma

$$W^2(q, q') = \int d^4 q'' W(q, q'') W(q'', q') = \int d^4 q'' G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q'' + q) G_{0,k}^{-1}(q'') \Delta G_k(q'' + q'), \quad (5.85)$$

cuya traza corresponde a integrar en q haciendo $q' \rightarrow q$ [66]. Así, la solución de Ec.(5.83) hasta segundo orden en los campos tendrá la forma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \text{STr} \tilde{\partial}_t (G_{0,k}^{-1} \Delta G_k)^2 &= \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4 q d^4 q' G_{0,k}^{-1}(q) \partial_t R_k(q) G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q' + q) G_{0,k}^{-1}(q') \Delta G_k(q' + q) \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4 q d^4 q' G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q' + q) G_{0,k}^{-1}(q') \partial_t R_k(q') G_{0,k}^{-1}(q') \Delta G_k(q' + q). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Del mismo modo, el término cúbico será:

$$\begin{aligned}
W^3(q, q') &= \int d^4 q'' d^4 q''' W(q, q'') W(q'', q''') W(q''', q') \\
&= \int d^4 q'' d^4 q''' G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q'' + q) G_{0,k}^{-1}(q'') \Delta G_k(q'' + q''') G_{0,k}^{-1}(q''') \Delta G_k(q''' + q'),
\end{aligned} \tag{5.87}$$

por lo tanto la solución de Ec.(5.83) hasta tercer orden en los campos será de la forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6} \text{STr} \tilde{\partial}_t (G_{0,k}^{-1} \Delta G_k)^3 = \\
&\frac{1}{6} \int d^4 q d^4 q' d^4 q'' G_{0,k}^{-1}(q) \partial_t R_k(q) G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q' + q) G_{0,k}^{-1}(q') \Delta G_k(q' + q'') G_{0,k}^{-1}(q'') \Delta G_k(q'' + q) \\
&+ \frac{1}{6} \int d^4 q d^4 q' d^4 q'' G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q' + q) G_{0,k}^{-1}(q') \partial_t R_k(q') G_{0,k}^{-1}(q') \Delta G_k(q' + q'') G_{0,k}^{-1}(q'') \Delta G_k(q'' + q) \\
&+ \frac{1}{6} \int d^4 q d^4 q' d^4 q'' G_{0,k}^{-1}(q) \Delta G_k(q' + q) G_{0,k}^{-1}(q') \Delta G_k(q' + q'') G_{0,k}^{-1}(q'') \partial_t R_k(q'') G_{0,k}^{-1}(q'') \Delta G_k(q'' + q).
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Realizando los productos de matrices, tomando la traza y realizando las integrales en q' y q'' podemos realizar las derivadas correspondientes, de esto se obtienen los siguientes resultados [3]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2Z_V} \partial_t Z_{V,k}(p) &= -\frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} \frac{e^2 \rho(q-p) \mathcal{M}_+(q) \partial_t r(q)}{\mathcal{M}_-(q)^2 \mathcal{M}_-(q-p)} \\
\frac{1}{Z_\Phi} \partial_t Z_{\Phi,k}(p) &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 dq q^{d-1} (e^2 [\partial_t t(q) \tau(q-p) \rho(q-p) \mathcal{M}_-(q)^2 (\rho(q-p) + 2\rho(q)) \\
&- 2\partial_t r(q) \tau(q) \mathcal{M}_+(q) (\tau(q) \rho(q-p) \mathcal{M}_-(q-p) + \tau(q-p) \rho(q-p) \mathcal{M}_-(q) \\
&+ \tau(q) \rho(q) \mathcal{M}_-(q-p))] \times (3\tau(q)^2 \tau(q-p) \mathcal{M}_-(q)^2 \mathcal{M}_-(q-p)^2)^{-1},
\end{aligned} \tag{5.89}$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho(q) &= r(q) + 1 \\
\tau(q) &= t(q) + 1 \\
\mathcal{M}_\pm(q) &= m_0^2 \pm q^2 \rho(q)^2.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Hasta este punto las funciones $\zeta_{\Phi/V,k}(p)$ siguen siendo arbitrarias, para extraer información explícita sobre los modos de momentum haremos una aproximación polinomial de las

funciones [70]:

$$\zeta_{\Phi/V,k}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{\Phi/V,n} p^n, \quad (5.91)$$

con $\zeta_{\Phi/V,0} = 1$. La función beta y dimensión anómala se obtienen reemplazando $p = 0$ en Ec.(5.89):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Z_V} \partial_t Z_{V,k}(0) &= -\frac{1}{2} \gamma_V \zeta_{V,k}(0) + \frac{1}{2} \partial_t \zeta_{V,k}(0) = -\frac{1}{2} \gamma_V = \frac{1}{e} \beta(e) \\ \frac{1}{Z_\Phi} \partial_t Z_{\Phi,k}(0) &= -\gamma_\Phi \zeta_{\Phi,k}(0) + \partial_t \zeta_{\Phi,k}(0) = -\gamma_\Phi. \end{aligned} \quad (5.92)$$

En este punto necesitamos truncar la aproximación, para el caso particular de una aproximación lineal tendremos:

$$\zeta_{\Phi/V}(p) = 1 + \zeta_{\Phi/V,1} p, \quad (5.93)$$

haciendo $p = 0$ en Ec.(5.89) y resolviendo las integrales se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi &= \frac{g_{0,2} \alpha^2 + g_{0,1} \alpha}{g_{1,2} \alpha^2 + g_{1,1} \alpha + g_{1,0}} \quad \text{y} \\ \beta(\alpha) &= \frac{b_{0,3} \alpha^3 + b_{0,2} \alpha^2}{b_{1,2} \alpha^2 + b_{1,1} \alpha + b_{1,0}}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

donde

$$\begin{aligned}
g_{0,2} &= -5(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(1 + \zeta_{\Phi,1})^3(2 + 3\zeta_{\Phi,1})(3\zeta_{V,1}(7\zeta_{V,1} + 12) + 14) \\
g_{0,1} &= 10\pi(1 + \zeta_{\Phi,1})(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^2 [8\zeta_{V,1}(m^2(-3 + 4\zeta_{\Phi,1}) + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2(24 + 31\zeta_{\Phi,1})) \\
&\quad + 7\zeta_{V,1}^2(m^2(-3 + \zeta_{\Phi,1}) + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2(15 + 19\zeta_{\Phi,1})) \\
&\quad + 28\zeta_{\Phi,1}(m^2 + \zeta_{\Phi,1}(11 + 4\zeta_{\Phi,1}) + 10) + 84] \\
g_{1,2} &= g_{0,2} \\
g_{1,1} &= 84\pi(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(1 + \zeta_{\Phi,1})(3 + 5\zeta_{\Phi,1})(1 + \zeta_{V,1})^2 \\
g_{1,0} &= 1680\pi^2(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^5(1 + \zeta_{V,1})^4, \\
b_{0,3} &= (1 + \zeta_{\Phi,1})^2(2 + 3\zeta_{\Phi,1})(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \{ (1 + \zeta_{\Phi,1})^2 [\zeta_{V,1}(7\zeta_{V,1}(57 + 65\zeta_{\Phi,1}) \\
&\quad + 820\zeta_{\Phi,1} + 708) + 350\zeta_{\Phi,1} + 294] - m^2 [5\zeta_{V,1}\zeta_{\Phi,1}(52 + 35\zeta_{V,1}) \\
&\quad + 3\zeta_{V,1}(124 + 77\zeta_{V,1}) + 70\zeta_{\Phi,1} + 126] \} \\
b_{0,2} &= -840\pi(1 + \zeta_{V,1})^4(1 + \zeta_{\Phi,1})^2(2 + 3\zeta_{\Phi,1})(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\
b_{1,2} &= -10(1 + \zeta_{\Phi,1})^3(2 + 3\zeta_{\Phi,1})(14 + 13\zeta_{V,1}(12 + 7\zeta_{V,1})) \\
&\quad \times (m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\
b_{1,1} &= 168\pi(1 + \zeta_{V,1})^2(1 + \zeta_{\Phi,1})(3 + 5\zeta_{\Phi,1})(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\
b_{1,0} &= 3360\pi^2(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^6(1 + \zeta_{V,1})^4. \tag{5.95}
\end{aligned}$$

Ambos siguen cumpliendo una especie de relación NSVZ:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2\pi} \left(\frac{(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)}{2(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^3} \right) (1 + \zeta_{\Phi,1})(2 + 3\zeta_{\Phi,1})(1 - \gamma_{\Phi}(\alpha)), \tag{5.96}$$

modificada por los coeficientes de la aproximación. Al igual que en la APL' es posible obtener una relación NSVZ definiendo una constante de acoplamiento efectiva:

$$\tilde{\alpha}^2 = -\alpha^2 \left(\frac{(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)}{2(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^3} \right) (1 + \zeta_{\Phi,1})(2 + 3\zeta_{\Phi,1}), \tag{5.97}$$

y redefiniendo la función beta y dimensión anómala:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{\Phi}(\tilde{\alpha}) &= \gamma_{\Phi}(\tilde{\alpha}) \\
\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) &= - \left(\frac{(m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)}{2(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2)^3} \right) (1 + \zeta_{\Phi,1})(2 + 3\zeta_{\Phi,1})\beta(\tilde{\alpha}), \tag{5.98}
\end{aligned}$$

con lo cual se obtienen:

$$\tilde{\gamma}_{\Phi}(\tilde{\alpha}) = \frac{\bar{g}'_{0,2}\tilde{\alpha}^2 + \bar{g}'_{0,1}\tilde{\alpha}}{\bar{g}'_{1,2}\tilde{\alpha}^2 + \bar{g}'_{1,1}\tilde{\alpha} + \bar{g}'_{1,0}} \tag{5.99}$$

y

$$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) = \frac{\bar{b}_{0,3}\tilde{\alpha}^3 + \bar{b}_{0,2}\tilde{\alpha}^2}{\bar{b}_{1,2}\tilde{\alpha}^2 + \bar{b}_{1,1}\tilde{\alpha} + \bar{b}_{1,0}}, \quad (5.100)$$

donde,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{0,2} &= 5(-14 - 3\zeta_{V,1}(12 + 7\zeta_{V,1}))(1 + \zeta_{\Phi,1})(-m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{g}_{0,1} &= 5\pi 84 + 28\zeta_{\Phi,1} [10 + m^2 + \zeta_{\Phi,1}(11 + 4\zeta_{\Phi,1})] + 7\zeta_{V,1}^2 m^2(-3 + \zeta_{\Phi,1}) \\ &\quad \{+(1 + \zeta_{\Phi,1})^2(15 + 19\zeta_{\Phi,1})\} + 8\zeta_{V,1} [m^2(-3 + 4\zeta_{\Phi,1}) + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2(24 + 31\zeta_{\Phi,1})] \\ \bar{g}_{1,2} &= -5 [14 + 3\zeta_{V,1}(12 + 7\zeta_{V,1})] (1 + \zeta_{\Phi,1}) (-m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{g}_{1,1} &= 42\pi(1 + \zeta_{V,1})^2(3 + 5\zeta_{\Phi,1}) (m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{g}_{1,0} &= -420\pi^2(1 + \zeta_{V,1})^4(2 + 3\zeta_{\Phi,1}) (m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{b}_{0,3} &= m^2 [126 + 3\zeta_{V,1}(124 + 77\zeta_{V,1}) + 70\zeta_{\Phi,1} + 5\zeta_{V,1}(52 + 35\zeta_{V,1})\zeta_{\Phi,1}] \\ &\quad - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2 \{294 + 350\zeta_{\Phi,1} + \zeta_{V,1} [708 + 820\zeta_{\Phi,1} + 7\zeta_{V,1}(57 + 65\zeta_{\Phi,1})]\} \\ \bar{b}_{0,2} &= -420\pi(1 + \zeta_{V,1})^4(2 + 3\zeta_{\Phi,1}) (m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{b}_{1,2} &= 10 [14 + 3\zeta_{V,1}(12 + 7\zeta_{V,1})] (1 + \zeta_{\Phi,1})(m^2 - (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{b}_{1,1} &= 84\pi(1 + \zeta_{V,1})^2(3 + 5\zeta_{\Phi,1}) (m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2) \\ \bar{b}_{1,0} &= -420\pi^2(1 + \zeta_{V,1})^4(4 + 6\zeta_{\Phi,1}) (m^2 + (1 + \zeta_{\Phi,1})^2). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Bajo esta redefinición se cumple la relación de Ec.(2.52)

$$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{2\pi} (1 - \tilde{\gamma}_{\Phi}(\tilde{\alpha})). \quad (5.102)$$

Este procedimiento se puede hacer para un truncamiento de orden arbitrario de Ec.(5.91), por lo tanto, siempre es posible recuperar la relación. Como vimos en el Capítulo 2, esta relación es consecuencia de la estructura del vacío de las teorías de gauge supersimétricas, con lo cual que la estructura de los modos de momentum puedan seguir siendo representados en una relación NSVZ incluso cuando se incrementa el nivel de truncamiento de la acción promedio efectiva es una consecuencia directa de la preservación de la supersimetría en la implementación del método.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la aplicación del grupo de renormalización funcional a dos modelos supersimétricos: un supercampo quirral acoplado a un supercampo vectorial abeliano con un superpotencial renormalizable, y electrodinámica cuántica masiva. Se han obtenido formas no polinómicas de las funciones beta utilizando la expansión derivativa de la acción efectiva promedio.

Para el primer modelo se han calculado las ecuaciones del grupo de renormalización a primer orden en la expansión derivativa de la acción efectiva promedio utilizando dos métodos de regularización que preservan supersimetría: una regularización tipo masa (CS) y una regularización optimizada (TL) según el criterio de Ec.(4.31). La solución de la ecuación de flujo para el superpotencial en Ec.(5.13) muestra que el teorema de no renormalización se mantiene incluso al añadir el acoplamiento del supercampo vectorial, lo cual puede ser visto como una demostración complementaria y no perturbativa de su validez. Por su parte, las ecuaciones de flujo para los acoplamientos en Ec.(5.32) y Ec.(5.36) muestran una clara diferenciación en cuanto al tipo de regularización utilizada. Para el caso del regulador CS, las ecuaciones del grupo de renormalización no poseen puntos fijos no triviales mientras que para el caso TL sí lo hacen, en particular, para cualquier valor de $y \neq 0$ existe un punto fijo no trivial estable de la forma $\{g_*, m_*\} = \{0, m\}$ y un punto fijo no trivial inestable para $\{g_*, m_*\} = \{0, 1\}$, muestra de que la aproximación es válida hasta $m_0 \rightarrow k$; además, en el caso $y = 0$ sólo existe el punto fijo gaussiano y el inestable. La gran diferencia que exhiben los distintos tipos de reguladores puede deberse, por un lado, al hecho de que el regulador de Callan-Symanzik no cumple con el criterio de optimización de Ec.(4.31), y por otro lado al hecho de que, en el gauge de Wess-Zumino, los términos cuadráticos del supercampo vectorial son proporcionales únicamente a términos cuadráticos del bosón vectorial mas no

de los otros grados de libertad contenidos en V como muestra la Ec.(1.169) con lo cual no se regularizan todos los grados de libertad.

Respecto al segundo modelo, las ecuaciones de flujo se han calculado a primer orden de la expansión derivativa de la acción promedio efectiva y luego se ha encontrado la forma funcional de las contribuciones de los modos de momentum del orden del término cinético usando el segundo orden de la expansión derivativa. Esta vez la regularización sólo se ha realizado sobre el término cinético de los supercampos sin tomar en cuenta el potencial de Kähler. A primer orden, nuevamente se ha comprobado la validez del teorema de no renormalización al calcular la ecuación de flujo del superpotencial en Ec.(5.47); por otro lado, la ecuación de flujo para la carga eléctrica y la dimensión anómala del supercampo quiral han demostrado estar naturalmente relacionadas por la relación de Novikov-Shiftman-Vainshtein-Zakharov como muestra Ec.(5.60). El proceso de regulación infrarroja genera términos dependientes del parámetro adimensional de masa, los cuales desaparecen para $m \rightarrow 0$, es decir, para la masa del supercampo quiral muy lejos de la escala de renormalización y anulan la función beta para $m \rightarrow 1$, es decir, para la masa del supercampo quiral aproximándose a la escala de renormalización. La razón de esto es que para $m \geq k$ nuestra acción efectiva ha integrado fuera todos los modos del supercampo quiral, con lo cual la masa de la partícula deja de tener sentido y la función beta se anula. Centrándonos en el caso $m \rightarrow 0$, la función beta y dimensión anómala satisfacen la relación NSVZ como se muestra en Ec.(5.63), lo cual puede entenderse como una comprobación no perturbativa de la relación, además, expandiendo la función beta en potencias de la carga eléctrica vemos que los primeros coeficientes se corresponden con los resultados perturbativos (comparar Ec.(5.65) con Ec.(2.31)), así, se ha obtenido una función beta no perturbativa para baja energía.

El análisis de puntos fijos muestra que para rangos en los que la masa tiene importancia, existen puntos fijos ultravioletas estables, sin embargo, no existen trayectorias que fluyan desde el punto fijo gaussiano hacia este punto fijo no trivial. En el límite de desacoplamiento sólo se tiene el punto fijo trivial.

El análisis a segundo orden de la expansión derivativa se ha llevado a cabo promoviendo las renormalizaciones de las funciones de onda a funciones dependientes del momentum, esto permite incluir en la ecuación de flujo modos de momentum del orden del término cinético de los campos, como muestra Ec.(5.96), la solución de la ecuación de flujo muestra que la función beta depende ahora tanto de los términos de masa como de los coeficientes del truncamiento polinómico de los modos de momentum. La forma en que aparecen tales coeficientes muestran claramente que su función es la de extender el rango de validez de la aproximación, ya que para $m \rightarrow 1$ la función beta no se anula, esto debido a que pueden existir modos de los supercampos que sobreviven. Finalmente, dado un orden fijo

de truncamiento siempre es posible recobrar la relación NSVZ mediante la definición de una constante de estructura fina como se ve en Ecs.(5.97-5.102).

Referencias

- [1] Cesar Seijas. The beta function of gauge theories at two loops in differential renormalization. *arXiv preprint*, 2007. [arXiv:0706.1793\[hep-th\]](#).
- [2] Jeremy Echeverria, Maximiliano Binder, and Iván Schmidt. Functional renormalization group flows of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric abelian gauge model with one chiral and one vector superfield. *The European Physical Journal C*, 83(2):125, 2023. DOI: [10.1140/epjc/s10052-023-11251-1](#). [arXiv:2211.11864\[hep-th\]](#).
- [3] Jeremy Echeverria Puentes and Iván Schmidt. Non-perturbative SQED beta function using functional renormalization group approach and the NSVZ exact beta function. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2024(1):013B01, 2023. DOI: [10.1093/ptep/ptad150](#). [arXiv:2307.08488\[hep-th\]](#).
- [4] Mikhail Shifman. *Advanced topics in quantum field theory: A lecture course*. Cambridge University Press, 2022.
- [5] Daniel F Litim. Optimisation of the exact renormalisation group. *Physics Letters B*, 486(1-2):92–99, 2000. DOI: [10.1016/S0370-2693\(00\)00748-6](#). [arXiv:hep-th/0005245](#).
- [6] Sheldon L Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear physics*, 22(4):579–588, 1961. DOI: [10.1016/0029-5582\(61\)90469-2](#).
- [7] Steven Weinberg. A model of leptons. *Physical review letters*, 19(21):1264, 1967. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1264](#).
- [8] J. R. Oppenheimer. Note on the theory of the interaction of field and matter. *Phys. Rev.*, 35:461–477, Mar 1930. DOI: [10.1103/PhysRev.35.461](#).
- [9] Bemerkungen über die rolle der eigenenergie des elektrons in der quantentheorie der strahlung. *Zeitschrift für Physik*, 62(9-10):673–676, 1930. DOI: [10.1007/BF01843484](#).

- [10] Willis E Lamb Jr and Robert C Retherford. Fine structure of the hydrogen atom. part i. *Physical Review*, 79(4):549, 1950. DOI: [10.1103/PhysRev.79.549](https://doi.org/10.1103/PhysRev.79.549).
- [11] H. A. Bethe. The electromagnetic shift of energy levels. *Phys. Rev.*, 72:339–341, Aug 1947. DOI: [10.1103/PhysRev.72.339](https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.339).
- [12] Sin-itiro Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Progress of Theoretical Physics*, 1(2):27–42, 1946. DOI: [10.1143/PTP.1.27](https://doi.org/10.1143/PTP.1.27).
- [13] G Iwata, K Ono, Y Nambu, Z Koba, S Hayakawa, Y Miyamoto, S Kaneshawa, T Tati, S Tomonaga, D Ito, et al. Abstracts of the papers presented to the symposium on the theory of elementary particles: at physics department, kyoto university, november 24–25, 1947. *Progress of Theoretical Physics*, 3(2):207–218, 1948. DOI: [10.1143/ptp/3.2.207](https://doi.org/10.1143/ptp/3.2.207).
- [14] Julian Schwinger. Quantum electrodynamics. i. a covariant formulation. *Physical Review*, 74(10):1439, 1948. DOI: [10.1103/PhysRev.74.1439](https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.1439).
- [15] Julian Schwinger. Quantum electrodynamics. ii. vacuum polarization and self-energy. *Physical Review*, 75(4):651, 1949. DOI: [10.1103/PhysRev.75.651](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.651).
- [16] Julian Schwinger. Quantum electrodynamics. iii. the electromagnetic properties of the electron—radiative corrections to scattering. *Physical Review*, 76(6):790, 1949. DOI: [10.1103/PhysRev.76.790](https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.790).
- [17] Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of modern physics*, 20(2):367, 1948. DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367).
- [18] A relativistic cut-off for classical electrodynamics. *Physical Review*, 74(8):939, 1948. DOI: [10.1103/PhysRev.74.939](https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.939).
- [19] Yu A Gol’Fand and EP Likhtman. Extension of the algebra of poincare group generators and violation of p invariance. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 13:323, 1971.
- [20] Marcus T Grisaru, W Siegel, and M Roček. Improved methods for supergraphs. *Nuclear Physics B*, 159(3):429–450, 1979. DOI: [10.1016/0550-3213\(79\)90344-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90344-4).
- [21] Kenichi Konishi. Anomalous supersymmetry transformation of some composite operators in sqcd. *Physics Letters B*, 135(5-6):439–444, 1984. DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)90311-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)90311-3).

- [22] TE Clark, O Piguet, and K Sibold. The absence of radiative corrections to the axial current anomaly in supersymmetric qed. *Nuclear Physics B*, 159(1-2):1–15, 1979. DOI: [10.1016/0550-3213\(79\)90322-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90322-5).
- [23] BFL Ward. Confinement and supersymmetry. *Physical Review D*, 29(4):765, 1984. DOI: [10.1103/PhysRevD.29.765](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.29.765).
- [24] Kenichi Konishi. Confinement, soft supersymmetry breaking and θ parameter dependence in the seiberg-witten model. *Physics Letters B*, 392(1-2):101–105, 1997. DOI: [10.1016/S0370-2693\(96\)01527-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(96)01527-4). [arXiv:hep-th/9609021v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/9609021v1).
- [25] Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $n=2$ supersymmetric yang-mills theory. *Nuclear Physics B*, 426(1):19–52, 1994. DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)90124-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90124-4). [arXiv:hep-th/9407087](https://arxiv.org/abs/hep-th/9407087).
- [26] K Intriligator and N Seiberg. Duality, monopoles, dyons, confinement and oblique confinement in supersymmetric so (nc) gauge theories. *Nuclear Physics B*, 444(1-2):125–160, 1995. DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00159-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00159-P). [arXiv:hep-th/9503179](https://arxiv.org/abs/hep-th/9503179).
- [27] VA Novikov, Mikhail A Shifman, AI Vainshtein, and Valentin I Zakharov. Exact Gell-Mann-Low function of supersymmetric Yang-Mills theories from instanton calculus. *Nuclear Physics B*, 229(2):381–393, 1983. DOI: [10.1016/0550-3213\(83\)90338-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90338-3).
- [28] VA Novikov, Mikhail A Shifman, AI Vainshtein, and Valentin I Zakharov. The beta function in supersymmetric gauge theories. instantons versus traditional approach. *Physics Letters B*, 166(3):329–333, 1986. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90810-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90810-5).
- [29] DRT Jones. More on the axial anomaly in supersymmetric Yang-Mills theory. *Physics Letters B*, 123(1-2):45–46, 1983. DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90955-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90955-3).
- [30] DRT Jones and L Mezincescu. The β -function in supersymmetric Yang-Mills theory. *Physics Letters B*, 136(4):242–244, 1984. DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)91154-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)91154-7).
- [31] DRT Jones and L Mezincescu. The chiral anomaly and a class of two-loop finite supersymmetric gauge theories. *Physics Letters B*, 138(4):293–295, 1984. DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)91663-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)91663-0).
- [32] AI Vainshtein, VI Zakharov, VA Novikov, and MA Shifman. The axial anomaly puzzle in supersymmetry gauge theories. *JETP Lett*, 40(4), 1984.

- [33] VA Novikov, Mikhail A Shifman, AI Vainshtein, and Valentin I Zakharov. Supersymmetric extension of the Adler-Bardeen theorem. *Physics Letters B*, 157(2-3):169–173, 1985. DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)91539-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)91539-4).
- [34] Mikhail A Shifman and AI Vainshtein. Solution of the anomaly puzzle in SUSY gauge theories and the Wilson operator expansion. *Nuclear Physics B*, 277:456–486, 1986. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90451-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90451-7).
- [35] E Kraus, C Rupp, and K Sibold. Supersymmetric Yang-Mills theories with local coupling: The supersymmetric gauge. *Nuclear Physics B*, 661(1-2):83–98, 2003. DOI: [10.1016/S0550-3213\(03\)00295-5](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(03)00295-5). [arXiv:hep-th/0212064](https://arxiv.org/abs/hep-th/0212064).
- [36] IO Goriachuk, AL Kataev, and KV Stepanyantz. A class of the NSVZ renormalization schemes for $\mathcal{N} = 1$ SQED. *Physics Letters B*, 785:561–566, 2018. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.09.014](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.014). [arXiv:1808.02050](https://arxiv.org/abs/1808.02050).
- [37] IO Goriachuk and Andrei L’vovich Kataev. Exact β -function in Abelian and non-Abelian $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge models and its analogy with the QCD β -function in the C-scheme. *JETP Letters*, 111(12):663–667, 2020. DOI: [10.1134/S0021364020120085](https://doi.org/10.1134/S0021364020120085). [arXiv:2005.03445](https://arxiv.org/abs/2005.03445)[hep-th].
- [38] AL Kataev, AE Kazantsev, and KV Stepanyantz. On-shell renormalization scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED and the NSVZ relation. *The European Physical Journal C*, 79(6):1–11, 2019. DOI: [10.1140/epjc/s10052-019-6993-z](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6993-z). [arXiv:1905.02222](https://arxiv.org/abs/1905.02222)[hep-th].
- [39] AL Kataev and KV Stepanyantz. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED. *Nuclear Physics B*, 875(2):459–482, 2013. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2013.07.010](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2013.07.010). [arXiv:1305.7094](https://arxiv.org/abs/1305.7094)[hep-th].
- [40] Stephen P Martin. A supersymmetry primer. In *Perspectives on supersymmetry II*, pages 1–153. World Scientific, 2010. DOI: [10.1142/9789814307505_0001](https://doi.org/10.1142/9789814307505_0001). [arXiv:hep-ph/9709356](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356).
- [41] C Froggatt, R Nevzorov, and HB Nielsen. On the smallness of the cosmological constant in SUGRA models. *Nuclear Physics B*, 743(1-2):133–152, 2006. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2006.03.008](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.03.008). [arXiv:hep-ph/0511259](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0511259).
- [42] Ian Aitchison. *Supersymmetry in particle physics: an elementary introduction*. Cambridge University Press, 2007.

- [43] Marcus T Grisaru, P Van Nieuwenhuizen, and JAM Vermaseren. One-loop renormalizability of pure supergravity and of Maxwell-Einstein theory in extended supergravity. *Physical Review Letters*, 37(25):1662, 1976. DOI: [10.1103/PhysRevLett.37.1662](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.1662).
- [44] RN Mohapatra. Supersymmetric grandunification: An update. *arXiv preprint hep-ph/9911272*, 1999. [arXiv:hep-ph/9911272](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9911272).
- [45] Charanjit S Aulakh, Borut Bajc, Alejandra Melfo, G Senjanović, and Francesco Visani. The minimal supersymmetric grand unified theory. *Physics Letters B*, 588(3-4):196–202, 2004. DOI: [10.1016/j.physletb.2004.03.031](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.031). [arXiv:hep-ph/0306242](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0306242).
- [46] Gerard Jungman, Marc Kamionkowski, and Kim Griest. Supersymmetric dark matter. *Physics Reports*, 267(5-6):195–373, 1996. DOI: [10.1016/0370-1573\(95\)00058-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00058-5).
- [47] Jonathan A Bagger. Weak-scale supersymmetry: theory and practice. *arXiv preprint hep-ph/9604232*, 1996. [arXiv:hep-ph/9604232](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9604232).
- [48] Sung-Sik Lee. Emergence of supersymmetry at a critical point of a lattice model. *Physical Review B*, 76(7):075103, 2007. DOI: [10.1103/PhysRevB.76.075103](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.075103). [arXiv:cond-mat/0611658](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0611658).
- [49] Sung-Sik Lee. Tasi lectures on emergence of supersymmetry, gauge theory and string in condensed matter systems. *arXiv preprint arXiv:1009.5127*, 2010. [arXiv:1009.5127](https://arxiv.org/abs/1009.5127) [[hep-th](#)].
- [50] Pedro Ponte and Sung-Sik Lee. Emergence of supersymmetry on the surface of three-dimensional topological insulators. *New Journal of Physics*, 16(1):013044, 2014. DOI: [10.1088/1367-2630/16/1/013044](https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/013044). [arXiv:1206.2340](https://arxiv.org/abs/1206.2340) [[cond-mat.str-el](#)].
- [51] Shao-Kai Jian, Chien-Hung Lin, Joseph Maciejko, and Hong Yao. Emergence of supersymmetric quantum electrodynamics. *Physical review letters*, 118(16):166802, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.166802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.166802). [arXiv:1609.02146](https://arxiv.org/abs/1609.02146) [[cond-mat.str-el](#)].
- [52] Bertrand Delamotte. An introduction to the nonperturbative renormalization group. In *Renormalization group and effective field theory approaches to many-body systems*, pages 49–132. Springer, 2012. [arXiv:cond-mat/0702365](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0702365) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [53] C Bagnuls and C Bervillier. Exact renormalization group equations: an introductory review. *Physics Reports*, 348(1-2):91–157, 2001. DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00137-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00137-X). [arXiv:hep-th/0002034](https://arxiv.org/abs/hep-th/0002034)[[hep-th](#)].

- [54] Oliver J Rosten. Fundamentals of the exact renormalization group. *Physics Reports*, 511(4):177–272, 2012. DOI: [10.1016/j.physrep.2011.12.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.12.003). [arXiv:1003.1366](https://arxiv.org/abs/1003.1366)[hep-th].
- [55] Nicolas Dupuis, L Canet, Astrid Eichhorn, W Metzner, Jan M Pawłowski, M Tissier, and N Wschebor. The nonperturbative functional renormalization group and its applications. *Physics Reports*, 910:1–114, 2021. DOI: [10.1016/j.physrep.2021.01.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.01.001). [arXiv:2006.04853](https://arxiv.org/abs/2006.04853)[cond-mat.stat-mech].
- [56] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, 301(1):90–94, 1993. DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)90726-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90726-X). [arXiv:1710.05815](https://arxiv.org/abs/1710.05815)[hep-th].
- [57] Christof Wetterich. Average action and the renormalization group equations. *Nuclear Physics B*, 352(3):529–584, 1991. DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90099-J](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90099-J).
- [58] Christof Wetterich. The average action for scalar fields near phase transitions. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 57(3):451–469, 1993. DOI: [10.1007/BF01474340](https://doi.org/10.1007/BF01474340).
- [59] Ch Wetterich. Improvement of the average action. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 60(3):461–469, 1993. DOI: [10.1007/BF01560044](https://doi.org/10.1007/BF01560044).
- [60] Michael E Fisher. Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics. *Reviews of Modern Physics*, 70(2):653, 1998. DOI: [10.1103/RevModPhys.70.653](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.653).
- [61] Tim R Morris. Elements of the continuous renormalization group. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 131:395–414, 1998. DOI: [10.1143/PTPS.131.395](https://doi.org/10.1143/PTPS.131.395). [arXiv:hep-th/9802039](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802039).
- [62] Ken-Ichi Aoki. Introduction to the non-perturbative renormalization group and its recent applications. *International Journal of Modern Physics B*, 14(12n13):1249–1326, 2000. DOI: [10.1142/S0217979200000923](https://doi.org/10.1142/S0217979200000923).
- [63] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4-6):223–386, 2002. DOI: [10.1016/S0370-1573\(01\)00098-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00098-9). [arXiv:0005122](https://arxiv.org/abs/0005122)[hep-ph].
- [64] Franziska Synatschke, Georg Bergner, Holger Gies, and Andreas Wipf. Flow equation for supersymmetric quantum mechanics. *Journal of High Energy Physics*, 2009(03):028, 2009. DOI: [10.1088/1126-6708/2009/03/028](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/03/028). [arXiv:0809.4396](https://arxiv.org/abs/0809.4396)[hep-th].

- [65] Franziska Synatschke, Holger Gies, and Andreas Wipf. The Phase Diagram for Wess-Zumino Models. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1200, pages 1097–1100. American Institute of Physics, 2010. DOI: [10.1063/1.3327547](https://doi.org/10.1063/1.3327547). [arXiv:0909.4189](https://arxiv.org/abs/0909.4189)[hep-th].
- [66] Franziska Synatschke-Czerwonka, Thomas Fischbacher, and Georg Bergner. Two-dimensional $\mathcal{N} = (2, 2)$ Wess-Zumino model in the functional renormalization group approach. *Physical Review D*, 82(8):085003, 2010. DOI: [10.1103/PhysRevD.82.085003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.085003). [arXiv:1006.1823](https://arxiv.org/abs/1006.1823)[hep-th].
- [67] Franziska Synatschke, Jens Braun, and Andreas Wipf. $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino model in $d = 3$ at zero and finite temperature. *Physical Review D*, 81(12):125001, 2010. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.125001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.125001). [arXiv:1001.2399](https://arxiv.org/abs/1001.2399)[hep-th].
- [68] M Mastaler, F Synatschke-Czerwonka, and A Wipf. Supersymmetric renormalization group flows. *Physics of Particles and Nuclei*, 43:593–599, 2012. DOI: [10.1134/S1063779612050255](https://doi.org/10.1134/S1063779612050255).
- [69] Polina Feldmann. *Functional Renormalization Group Approach to the 3-Dimensional $\mathcal{N} = 2$ Wess-Zumino Model*. PhD thesis, Faculty of Physics and Astronomy, Friedrich Schiller University Jena, 2016.
- [70] Polina Feldmann, Andreas Wipf, and Luca Zambelli. Critical wess-zumino models with four supercharges in the functional renormalization group approach. *Physical Review D*, 98(9):096005, 2018. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.096005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.096005). [arXiv:1712.03910](https://arxiv.org/abs/1712.03910)[hep-th].
- [71] Marianne Heilmann, Tobias Hellwig, Benjamin Knorr, Marcus Ansorg, and Andreas Wipf. Convergence of derivative expansion in supersymmetric functional RG flows. *Journal of High Energy Physics*, 2015(2):1–27, 2015. DOI: [10.1007/JHEP02\(2015\)109](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)109). [arXiv:1409.5650](https://arxiv.org/abs/1409.5650)[hep-th].
- [72] Jan Lopuszanski. *Introduction to symmetry and supersymmetry in quantum field theory*. World Scientific, 1990.
- [73] John Terning. *Modern supersymmetry: Dynamics and duality*. Oxford University Press, 2006.
- [74] S James Gates Jr, Marcus T Grisaru, Martin Rocek, and Warren Siegel. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *arXiv preprint hep-th/0108200*, 2001.

- [75] David Tong. Supersymmetric field theory. *Online source*, 2021. [/www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy/susy.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy/susy.pdf).
- [76] David Bailin and Alexander Love. *Supersymmetric gauge field theory and string theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [77] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields: volume 3, supersymmetry*. Cambridge university press, 2005.
- [78] Sidney Coleman and Jeffrey Mandula. All possible symmetries of the s matrix. *Physical Review*, 159(5):1251, 1967. DOI: [10.1103/PhysRev.159.1251](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.1251).
- [79] Rudolf Haag, Jan T Łopuszański, and Martin Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the s-matrix. *Nuclear Physics B*, 88(2):257–274, 1975. DOI: [10.1016/0550-3213\(75\)90279-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90279-5).
- [80] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 17(10):891–921, 1905.
- [81] Henri Poincaré. *La dynamique de l'électron*. A. Dumas, 1913.
- [82] Hermann Minkowski. Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern. *Mathematische Annalen*, 68(4):472–525, 1910.
- [83] Hermann Minkowski. *Raum und zeit*. Springer, 1988.
- [84] Robin Ticciati. *Quantum field theory for mathematicians*. Number 72. Cambridge University Press, 1999.
- [85] Karin Erdmann and Mark J Wildon. *Introduction to Lie algebras*, volume 122. Springer, 2006.
- [86] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras: Chapters 1-3*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1989.
- [87] Julius Wess and Bruno Zumino. A Lagrangian model invariant under supergauge transformations. *Physics Letters B*, 49(1):52–54, 1974. DOI: [10.1016/0370-2693\(74\)90578-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(74)90578-4).
- [88] Sergio Ferrara and B Zumino. Supergauge invariant Yang-Mills theories. *Nuclear Physics B*, 79(3):413–421, 1974. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90559-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90559-8).

- [89] Kenneth G Wilson. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Physical review B*, 4(9):3174, 1971. DOI: [10.1103/PhysRevB.4.3174](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3174).
- [90] Kenneth G Wilson. Renormalization group and critical phenomena. ii. phase-space cell analysis of critical behavior. *Physical Review B*, 4(9):3184, 1971. DOI: [10.1103/PhysRevB.4.3184](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3184).
- [91] Kenneth G Wilson. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics reports*, 12(2):75–199, 1974. DOI: [10.1016/0370-1573\(74\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(74)90023-4).
- [92] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.
- [93] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press, 1996.
- [94] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [95] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [96] Tian Yu Cao and Silvan S Schweber. The conceptual foundations and the philosophical aspects of renormalization theory. *Synthese*, 97:33–108, 1993. DOI: [10.1007/BF01255832](https://doi.org/10.1007/BF01255832).
- [97] Olivier Piguet and Silvio P Sorella. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, volume 28. Springer Science & Business Media, 1995.
- [98] Quantum electrodynamics at small distances. *Physical Review*, 95(5):1300, 1954. DOI: [10.1103/PhysRev.95.1300](https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.1300).
- [99] Curtis G Callan Jr. Broken scale invariance in scalar field theory. *Physical Review D*, 2(8):1541, 1970. DOI: [10.1103/PhysRevD.2.1541](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.2.1541).
- [100] Small distance behaviour in field theory and power counting. *Communications in Mathematical Physics*, 18:227–246, 1970. DOI: [10.1007/BF01649434](https://doi.org/10.1007/BF01649434).
- [101] Leo P Kadanoff. Scaling laws for ising models near t c. *Physics Physique Fizika*, 2(6):263, 1966. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.2.263](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.2.263).

- [102] Kenneth G Wilson. The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem. *Reviews of modern physics*, 47(4):773, 1975. DOI: [10.1103/RevModPhys.47.773](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.773).
- [103] Sergio Ferrara and O Piguet. Perturbation theory and renormalization of supersymmetric yang-mills theories. *Nuclear Physics B*, 93(2):261–302, 1975. DOI: [10.1016/0550-3213\(75\)90573-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90573-8).
- [104] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265, 1927. DOI: [10.1098/rspa.1927.0039](https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0039).
- [105] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44(1):189–213, 1972. DOI: [10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9).
- [106] CG Bollini and JJ Giambiagi. Dimensional regularization in configuration space. *Physical Review D*, 53(10):5761, 1996. DOI: [10.1103/PhysRevD.53.5761](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.5761).
- [107] G. Cicuta and E. Montaldi. Analytic renormalization via continuous space dimension. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 4(9):329–332, 1972.
- [108] AL Cherchiglia, Marcos Sampaio, B Hiller, and AP Baêta Scarpelli. Subtleties in the beta-function calculation of $n=1$ supersymmetric gauge theories. *The European Physical Journal C*, 76(2):47, 2016. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3859-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3859-x). [arXiv:1508.05421\[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1508.05421).
- [109] Laurence F Abbott. The background field method beyond one loop. *Nuclear Physics B*, 185(1):189–203, 1981. DOI: [10.1016/0550-3213\(81\)90371-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90371-0).
- [110] MT Grisaru and D Zanon. Covariant supergraphs:(i). yang-mills theory. *Nuclear Physics B*, 252:578–590, 1985. DOI: [10.1016/0550-3213\(85\)90463-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90463-8).
- [111] M Shifman. Non-perturbative dynamics in supersymmetric gauge theories. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 39:1–116, 1997. DOI: [10.1016/S0146-6410\(97\)00042-2](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(97)00042-2). [arXiv:hep-th/9704114](https://arxiv.org/abs/hep-th/9704114).
- [112] Y Meurice and GC Rossi. Non-perturbative aspects in supersymmetric gauge theories. *Physics reports*, 162(4):169–248, 1988. DOI: [10.1016/0370-1573\(88\)90182-2](https://doi.org/10.1016/0370-1573(88)90182-2).
- [113] PC West. The supersymmetric effective potential. 1976.

- [114] B Zumino. Broken supergauge symmetry and renormalization. *Nuclear Physics B*, 76(2):310–332, 1974. DOI: [doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90388-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90388-5).
- [115] Nathan Seiberg. Naturalness versus supersymmetric non-renormalization theorems. *Physics Letters B*, 318(3):469–475, 1993. DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)91541-T](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91541-T). [arXiv:hep-ph/9309335](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9309335).
- [116] Peter West. *Introduction To Supersymmetry And Supergravity (Revised And Extended 2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company, 1990.
- [117] Stephen L Adler and William A Bardeen. Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation. *Physical Review*, 182(5):1517, 1969. DOI: [10.1103/PhysRev.182.1517](https://doi.org/10.1103/PhysRev.182.1517).
- [118] DRT Jones and Jacques P Leveille. Dimensional regularization and the two-loop axial anomaly in abelian, non-abelian and supersymmetric gauge theories. *Nuclear Physics B*, 206(3):473–495, 1982. DOI: [10.1016/0550-3213\(82\)90279-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90279-6).
- [119] Stephen L Adler, John C Collins, and Anthony Duncan. Energy-momentum-tensor trace anomaly in spin-1/2 quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 15(6):1712, 1977. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.1712](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.1712).
- [120] LV Avdeev, OV Tarasov, and AA Vladimirov. Vanishing of the three-loop charge renormalization function in a supersymmetric gauge theory. *Physics Letters B*, 96(1-2):94–96, 1980. DOI: [10.1016/0370-2693\(80\)90219-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90219-1).
- [121] B Milewski and D Zanon. Supercurrents, anomalies, and the adler-bardeen theorem. *Physics Letters B*, 157(2-3):174–178, 1985. DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)91540-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)91540-0).
- [122] Marcus T Grisaru, B Milewski, and D Zanon. The supercurrent and the adler-bardeen theorem. *Nuclear Physics B*, 266(3-4):589–619, 1986. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90187-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90187-2).
- [123] Nima Arkani-Hamed and Hitoshi Murayama. Holomorphy, rescaling anomalies and exact β functions in supersymmetric gauge theories. *Journal of High Energy Physics*, 2000(06):030, 2000. DOI: [10.1088/1126-6708/2000/06/030](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2000/06/030). [arxiv:hep-th/9707133](https://arxiv.org/abs/hep-th/9707133).
- [124] KV Stepanyantz. Derivation of the exact NSVZ β -function in $\mathcal{N} = 1$ SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of feynman diagrams. *Nuclear Physics B*, 852(1):71–107, 2011. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2011.06.018](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2011.06.018). [arXiv:1102.3772\[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1102.3772).

- [125] KV Stepanyantz. The NSVZ β -function and the Schwinger-Dyson equations for n $\mathcal{N}=1$ SQED with n_f flavors, regularized by higher derivatives. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):1–77, 2014. DOI: [10.1007/JHEP08\(2014\)096](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)096). [arXiv:1404.6717](https://arxiv.org/abs/1404.6717)[hep-th].
- [126] Peter Kopietz, Lorenz Bartosch, and Florian Schütz. *Introduction to the functional renormalization group*, volume 798. Springer Science & Business Media, 2010.
- [127] Vieri Mastropietro. *Non-perturbative renormalization*. World Scientific, 2008.
- [128] Jean Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*, volume 171. Oxford university press, 2021.
- [129] Timothy J Hollowood. *Renormalization Group and Fixed Points: In Quantum Field Theory*, volume 48. Springer, 2013.
- [130] Alexander Krasnitz, Yuri A Kubyshev, Robertus Potting, and P Sa. *Exact Renormalization Group, The-Proceedings Of The Workshop*. World Scientific, 1999.
- [131] Jan M Pawłowski. Aspects of the functional renormalisation group. *Annals of Physics*, 322(12):2831–2915, 2007. DOI: [10.1016/j.aop.2007.01.007](https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.01.007). [arXiv:hep-th/0512261](https://arxiv.org/abs/hep-th/0512261).
- [132] Tim R Morris. The exact renormalization group and approximate solutions. *International Journal of Modern Physics A*, 9(14):2411–2449, 1994. DOI: [10.1142/S0217751X94000972](https://doi.org/10.1142/S0217751X94000972). [arXiv:9308265](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9308265)[hep-ph].
- [133] Florian Schütz, Lorenz Bartosch, and Peter Kopietz. Collective fields in the functional renormalization group for fermions, ward identities, and the exact solution of the tomonaga-luttinger model. *Physical Review B*, 72(3):035107, 2005. DOI: [10.1103/PhysRevB.72.035107](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.035107). [arXiv:cond-mat/0409404](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0409404).
- [134] Florian Schütz. *Aspects of strong correlations in low dimensions*. PhD thesis, Frankfurt (Main), Univ., Diss., 2005, 2005.
- [135] Florian Schütz and Peter Kopietz. Functional renormalization group with vacuum expectation values and spontaneous symmetry breaking. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(25):8205, 2006. DOI: [10.1088/0305-4470/39/25/S28](https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/25/S28). [arXiv:cond-mat/0512027](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0512027).
- [136] The s matrix in quantum electrodynamics. *Physical Review*, 75(11):1736, 1949. DOI: [10.1103/PhysRev.75.1736](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1736).

- [137] KB Efetov. Supersymmetry and theory of disordered metals. *advances in Physics*, 32(1):53–127, 1983.
- [138] Konstantin Efetov. *Supersymmetry in disorder and chaos*. Cambridge university press, 1999.
- [139] Holger Gies. Introduction to the functional rg and applications to gauge theories. In *Renormalization group and effective field theory approaches to many-body systems*, pages 287–348. Springer, 2012. DOI: [10.1007/978-3-642-27320-9-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-27320-9-6). [arXiv:hep-ph/0611146](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0611146).
- [140] Daniel F Litim. Optimized renormalization group flows. *Physical Review D*, 64(10):105007, 2001. DOI: [10.1103/PhysRevD.64.105007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.105007). [arXiv:hep-th/010319](https://arxiv.org/abs/hep-th/010319).
- [141] JF Nicoll and TS Chang. An exact one-particle-irreducible renormalization-group generator for critical phenomena. *Physics Letters A*, 62(5):287–289, 1977. DOI: [10.1016/0375-9601\(77\)90417-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90417-0).
- [142] Ulrich Ellwanger. Flow equations for n point functions and bound states. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 62(3):503–510, 1994. DOI: [10.1007/BF01555911](https://doi.org/10.1007/BF01555911). [arXiv:9308260](https://arxiv.org/abs/9308260)[hep-ph].
- [143] M Bonini, M D’Attanasio, and G Marchesini. Perturbative renormalization and infrared finiteness in the wilson renormalization group: The massless scalar case. *Nuclear Physics B*, 409(2):441–464, 1993. DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90588-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90588-G). [arXiv:9301114](https://arxiv.org/abs/9301114)[hep-th].
- [144] Daniel F Litim. Scheme independence at first order phase transitions and the renormalisation group. *Physics Letters B*, 393(1-2):103–109, 1997. DOI: [10.1016/S0370-2693\(96\)01613-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(96)01613-9). [arXiv:hep-th/9609040](https://arxiv.org/abs/hep-th/9609040).
- [145] Richard D Ball, Peter E Haagensen, JoséI Latorre, and Enrique Moreno. Scheme independence and the exact renormalization group. *Physics Letters B*, 347(1-2):80–88, 1995. DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)00025-G](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00025-G). [arXiv:hep-th/9411122](https://arxiv.org/abs/hep-th/9411122).
- [146] Daniel F Litim. Mind the gap. *International Journal of Modern Physics A*, 16(11):2081–2087, 2001. DOI: [10.1142/S0217751X01004748](https://doi.org/10.1142/S0217751X01004748). [arXiv:hep-th/0104221](https://arxiv.org/abs/hep-th/0104221).
- [147] Alessio Baldazzi, Roberto Percacci, and Luca Zambelli. Functional renormalization and the ms scheme. *Physical Review D*, 103(7):076012, 2021. DOI: [10.1103/PhysRevD.103.076012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.076012).

- [148] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolas Wschebor. Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n-point functions. i. *Physical Review E*, 74(5):051116, 2006. DOI: [10.1103/PhysRevE.74.051116](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.051116). [arXiv:hep-th/0512317](https://arxiv.org/abs/hep-th/0512317).
- [149] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolas Wschebor. A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations. *Physics Letters B*, 632(4):571–578, 2006. DOI: [10.1016/j.physletb.2005.10.086](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.10.086). [arXiv:hep-th/0503103](https://arxiv.org/abs/hep-th/0503103).
- [150] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolas Wschebor. Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n-point functions. ii. *Physical Review E*, 74(5):051117, 2006. DOI: [10.1103/PhysRevE.74.051117](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.051117). [arXiv:hep-th/0603163](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603163).
- [151] Roberto Percacci. Asymptotic safety. *arXiv preprint*, 2009. [arXiv:0709.3851\[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0709.3851).
- [152] Holger Gies and Christof Wetterich. Renormalization flow of bound states. *Physical Review D*, 65(6):065001, 2002. DOI: [10.1103/PhysRevD.65.065001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.065001). [arXiv:hep-th/0107221](https://arxiv.org/abs/hep-th/0107221).

Apéndice

Apéndice A

Notaciones y convenciones

En este trabajo se usarán las siguientes convenciones para espinores, se han adoptado de [76]:

- Métrica espaciotemporal plana: $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- Matrices sigma: $\sigma^\mu \equiv (I_2, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (I_2, -\vec{\sigma}) = \sigma_\mu$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu).$$

Los índices espinoriales se adoptan de tal forma que:

$$\sigma^\mu = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$$
$$\bar{\sigma}^\mu = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}$$
$$\sigma^{\mu\nu} = (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

- Representación de Weyl de las matrices gamma:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

- Espinores derechos e izquierdos. Sea un espinor de Dirac $\Psi_D = \Psi_L + \Psi_R$:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &\equiv \Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \Psi_D \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &\equiv \Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \Psi_D\end{aligned}$$

- Métricas en índices espinoriales:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon^{\gamma\beta} \epsilon_{\beta\alpha} &= \delta^\gamma_\alpha \\ \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} &= \delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

- Productos espinoriales. Se definen:

$$\begin{aligned}\psi^\alpha &\equiv \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta = \psi^T(-i\sigma^2) \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &\equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = \bar{\chi}^T(i\sigma^2),\end{aligned}$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned}\psi \cdot \chi &\equiv \psi^\alpha \chi_\alpha = \psi^T(-i\sigma^2)\chi = -\chi^\alpha \psi_\alpha \\ \bar{\psi} \cdot \bar{\chi} &\equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^T(i\sigma^2)\bar{\chi} = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

Algunas propiedades útiles que se extraen (omitiendo los índices) son:

$$\begin{aligned}\psi \cdot \chi &= \chi \cdot \psi \\ \bar{\psi} \cdot \bar{\chi} &= \bar{\chi} \cdot \bar{\psi} \\ \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \psi &= -\psi \sigma^\mu \bar{\chi} \\ \chi \sigma^{\mu\nu} \psi &= -\psi \sigma^{\mu\nu} \chi \\ \bar{\chi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\psi} &= -\bar{\psi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\chi} \\ \text{Tr} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] &= \text{Tr} [\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu] = 2\eta^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho \bar{\sigma}^\tau] &= 2(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\tau} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\tau} + \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\tau}) \\ \text{Tr} [\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\tau] &= 2(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\tau} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\tau} + \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\tau}).\end{aligned}$$

$$\theta^\alpha \theta_\beta = \frac{1}{2}(\theta\theta)\delta^\alpha_\beta$$
$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}.$$

La convención para el espacio de momentum será:

$$F(q) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int d^d x F(x) e^{iq_\mu x^\mu}. \quad (\text{A.1})$$

Apéndice B

Representaciones irreducibles de $SU(2)$

Comenzaremos diciendo que el grupo $SU(2)$, cuyos generadores respetan las relaciones de conmutación:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J_k, \quad (\text{B.1})$$

es un grupo compacto, esto quiere decir que sus representaciones irreducibles son de dimensión finita. El grupo consta de tres generadores, J^1 , J^2 y J^3 , de los cuales sólo es posible diagonalizar de forma simultánea uno de ellos, el cual se toma por convención J^3 . Denotamos por $|j_3\rangle$ al autovector de J^3 con autovalor j_3 , de tal forma que:

$$J^3 |j_3\rangle = j_3 |j_3\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Por otro lado, redefiniremos los generadores restantes J^1 y J^2 de la siguiente forma:

$$J^\pm = J^1 \pm iJ^2, \quad (\text{B.3})$$

los cuales cumplen con las siguientes relaciones de conmutación:

$$[J^3, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = J^3, \quad (\text{B.4})$$

y además $J^{\pm\dagger} = J^\mp$.

Ahora veremos que los operadores J^\pm actúan de forma interesante sobre los autovectores de J^3 , usando Ec.(B.4):

$$\begin{aligned} J^3 J^\pm |j_3\rangle &= J^\pm J^3 |j_3\rangle + [J^3, J^\pm] |j_3\rangle \\ &= (j_3 \pm 1) J^\pm |j_3\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

es decir, los operadores J^\pm aumentan/disminuyen en 1 el autovalor j_3 , por ello se denominan *operadores de subida/bajada*.

Como ya fue mencionado, este grupo es compacto, por lo tanto la dimensión de sus representaciones irreducibles debe ser finita, debido a que $|j_3\rangle$ es un autovector de una representación irreducible entonces debe existir un valor máximo $j_{\text{máx}} = j_3 + N$ y uno mínimo $j_{\text{mín}} = j_3 - M$ de tal forma que

$$J^+ |j_{\text{máx}}\rangle = J^- |j_{\text{mín}}\rangle = 0. \quad (\text{B.6})$$

De Ec.(B.5) se puede ver que

$$J^+ |j_3\rangle \propto |j_3 + 1\rangle, \quad \text{y} \quad J^- |j_3\rangle \propto |j_3 - 1\rangle, \quad (\text{B.7})$$

además, debido a la hermiticidad de los operadores, entonces $j_{\text{máx}} = j_{\text{mín}} = j$. La forma explícita de Ec.(B.7) es:

$$J^\pm |j_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j \pm j_3 + 1)(j \mp j_3)}, \quad (\text{B.8})$$

y la dimensión de la representación es $\dim = 2j + 1$ ya que $j_3 = -j, -j + 1, \dots, 0, \dots, j - 1, j$. Por otro lado, el grupo $SU(2)$ posee un operador de Casimir, es decir, un operador que conmuta con los tres generadores. El operador es:

$$\begin{aligned} J^2 &= (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 \\ &= J^+ J^- + J^- J^+ + (J^3)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para encontrar el autovalor de J^2 en el estado $|j_3\rangle$ podemos usar Ec.(B.8), de esta forma vemos que

$$J^2 |j, j_3\rangle = j(j + 1) |j, j_3\rangle. \quad (\text{B.10})$$

En conclusión, cada representación irreducible del álgebra de $SU(2)$ está caracterizada por un valor semientero j y tiene dimensión $2j + 1$.

Apéndice C

Cálculo en variables de Grassmann

Las variables de Grassman son coordenadas complejas que transforman como fermiones de Weyl de dos componentes $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$.

Si ζ es una variable de Grassman, entonces la función escalar más general que puede definirse es:

$$f(\zeta) = f_0 + \zeta f_1, \quad (\text{C.1})$$

ya que $\zeta^2 = 0$ ¹. Se define la derivada de la función respecto a ζ como:

$$\frac{df}{d\zeta} = f_1. \quad (\text{C.2})$$

Del mismo modo se puede definir la integración, imponiendo las identidades:

$$\int d\zeta = 0, \quad \int d\zeta \zeta = 1 \quad (\text{C.3})$$

e imponiendo linealidad. Esto muestra que la integral de la función escalar es

$$\int d\zeta f(\zeta) = f_1, \quad (\text{C.4})$$

mostrando la curiosa propiedad de que, respecto a variables de Grassman, la integración y diferenciación son iguales.

¹El orden importa, ya que f_1 podría ser otra variable de Grassman.

Apéndice D

Operadores APL' para modelo quirral + vectorial

Los operadores usados para el cálculo de la ecuación de Wetterich son:

$$\Gamma^{(2)}_k = \begin{pmatrix} \Gamma^{(2)}_{kBB} & \Gamma^{(2)}_{kBF} \\ \Gamma^{(2)}_{kFB} & \Gamma^{(2)}_{kFF} \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\Gamma^{(2)}_{kBB} = \begin{pmatrix} \gamma & y_k F^\dagger & 0 & m_k + y_k \phi^\dagger & g_k Z_G \phi & 2g_k^2 Z_S \phi A \\ y_k F & \gamma & m_k + y_k \phi & 0 & g_k Z_G \phi^\dagger & 2g_k^2 Z_S \phi^\dagger A \\ 0 & m_k + y_k \phi^\dagger & Z_\Phi & 0 & 0 & 0 \\ m_k + y_k \phi & 0 & 0 & Z_\Phi & 0 & 0 \\ g_k Z_G \phi^\dagger & g_k Z_G \phi & 0 & 0 & Z_V & 0 \\ 2g_k^2 Z_S \phi^\dagger A & 2g_k^2 Z_S \phi A & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2}{\xi} Z_V + 2g_k^2 Z_S \phi \phi^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\Gamma^{(2)}_{kFB} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{iy_k \bar{\psi}}{8\pi^2} \sigma^2 & \sqrt{2} g_k Z_G \psi^T \sigma^2 & 0 \\ \frac{iy_k \psi^T}{8\pi^2} \sigma^2 & \sqrt{2} g_k Z_G \bar{\lambda} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_k Z_G \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu & g_k Z_G \psi^T \bar{\sigma}^\mu & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$\Gamma^{(2)}_{kBF} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{iy_k\bar{\psi}^T}{8\pi^2}\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & g_k Z_G \psi \bar{\sigma}^\mu \\ \frac{iy_k\psi}{8\pi^2}\sigma^2 & \sqrt{2}g_k Z_G \lambda \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & g_k Z_G \bar{\psi}^T \bar{\sigma}^\mu \\ \sqrt{2}g_k Z_G \bar{\psi}^T \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\Gamma^{(2)}_{kFF} = \begin{pmatrix} Z_\phi q_\mu \bar{\sigma}^\mu + g_k Z_G A_\mu \bar{\sigma}^\mu & -\frac{i(m_k + y_k \phi^\dagger)}{4\pi^2}\sigma^2 & 0 & 0 \\ \frac{i(m_k + y_k \phi)}{4\pi^2}\sigma^2 & Z_\phi q_\mu \bar{\sigma}^{T\mu} + g_k Z_G A_\mu \bar{\sigma}^{T\mu} & \sqrt{2}g_k Z_G \phi^\dagger \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}g_k Z_G \phi \sigma^2 & Z_V q_\mu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_V q_\mu \bar{\sigma}^{\mu T} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

donde

$$\gamma = Z_\Phi q^2 + Z_S g_k^2 A^2 + Z_G g_k D. \quad (\text{D.6})$$

Por otro lado,

$$R_k = \begin{pmatrix} R_{kBB} & R_{kBF} \\ R_{kFB} & R_{kFF} \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$R_{kBB} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 2r^M & g_k r^{\text{opt}(2)} \phi & 2g_k^2 r^{\text{opt}(3)} \phi A \\ 0 & \delta & 2r^M & 0 & g_k r^{\text{opt}(2)} \phi^\dagger & 2g_k^2 r^{\text{opt}(3)} \phi^\dagger A \\ 0 & 2r^M & r^{\text{opt}} & 0 & 0 & 0 \\ 2r^M & 0 & 0 & r^{\text{opt}} & 0 & 0 \\ g_k r^{\text{opt}(2)} \phi^\dagger & g_k r^{\text{opt}(2)} \phi & 0 & 0 & t^{\text{opt}} & 0 \\ 2g_k^2 r^{\text{opt}(3)} \phi^\dagger A & 2g_k^2 r^{\text{opt}(3)} \phi A & 0 & 0 & 0 & t^M + \frac{q^2}{\xi} t^{\text{opt}} + 2g_k^2 r^{\text{opt}(3)} \phi \phi^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$R_{kFB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}g_k r^{\text{opt}(2)} \psi^T \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\lambda} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi} & g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\sigma}^\mu \psi^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$R_{kBF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\sigma}^\mu \psi \\ 0 & \sqrt{2} g_k r^{\text{opt}(2)} \lambda \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi}^T \\ \sqrt{2} g_k r^{\text{opt}(2)} \bar{\psi}^T \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$R_{kFF} = \begin{pmatrix} r^{\text{opt}} q_\mu \bar{\sigma}^\mu + g_k r^{\text{opt}(2)} A_\mu \bar{\sigma}^\mu & i r^{\text{M}} \sigma^2 & 0 & 0 \\ -i r^{\text{M}} \sigma^2 & r^{\text{opt}} q_\mu \bar{\sigma}^{T\mu} + g_k r^{\text{opt}(2)} A_\mu \bar{\sigma}^{T\mu} & \sqrt{2} g_k r^{\text{opt}(2)} \phi^\dagger \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} g_k r^{\text{opt}(2)} \phi \sigma^2 & t^{\text{opt}} q_\mu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{\text{opt}} q_\mu \bar{\sigma}^{\mu T}, \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

donde,

$$\delta = r^{\text{opt}} q^2 + g_k r^{\text{opt}(2)} D + g_k r^{\text{opt}(3)} A^2. \quad (\text{D.12})$$

Apéndice E

Operadores APL' para electrodinámica cuántica supersimétrica

Los operadores usados son:

$$G_k = \Gamma_k^{(2)} + R_k \quad (\text{E.1})$$

y

$$\partial_t R_k. \quad (\text{E.2})$$

Su forma explícita es:

$$G_k = \begin{pmatrix} G_{BB} & G_{BF} \\ G_{FB} & G_{FF} \end{pmatrix}, \quad \partial_t R_k = \begin{pmatrix} \partial_t R_{kBB} & 0 \\ 0 & \partial_t R_{kFF} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$G_{BB} =$

$$\begin{pmatrix} K_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & Z_\Phi \phi_- & -2Z_\Phi A \phi_- \\ 0 & K_- & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 & Z_\Phi \phi_-^\dagger & -2Z_\Phi A \phi_-^\dagger \\ 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0 & K_+ & 0 & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+ & 2AZ_\Phi \phi_+ \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & K_+ & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+^\dagger & 2AZ_\Phi \phi_+^\dagger \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 \\ m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 \\ Z_\Phi \phi_-^\dagger & Z_\Phi \phi_- & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+^\dagger & -Z_\Phi \phi_+ & 0 & 0 & \mathcal{T} & 0 \\ -2Z_\Phi A \phi_-^\dagger & -2Z_\Phi A \phi_- & 0 & 0 & 2AZ_\Phi \phi_+^\dagger & 2AZ_\Phi \phi_+ & 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

$$G_{BF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\psi_-^T & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\psi_+^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{\Phi}\bar{\sigma}\bar{\psi}_- & 0 & Z_{\Phi}\bar{\sigma}\bar{\psi}_+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$G_{FB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{\Phi}\bar{\sigma}\psi_- \\ 0 & \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\Phi}\bar{\sigma}\psi_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\bar{\psi}_-^T & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\bar{\psi}_+^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$G_{FF} = \begin{pmatrix} \hat{K}_+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}} & i\sigma_2 m & 0 & \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\phi_-^\dagger & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 m & \hat{K}_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\phi_+^\dagger & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\phi_- & 0 & -\sqrt{2}Z_{\Phi}\sigma_2\phi_+ & \hat{\mathcal{T}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{T}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

$$\partial_t R_{kBB} = \begin{pmatrix} q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e^2} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2}{e^2 \xi} t \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$\partial_t R_{kFF} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\sigma} \cdot q}{e^2} \partial_t t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\sigma} \cdot q}{e^2} \partial_t t \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= r + Z_\Phi \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{e^2} (t + Z_V^2) \\ \hat{\mathcal{R}} &= \bar{\sigma} \cdot q \mathcal{R} \\ \hat{\mathcal{T}} &= \bar{\sigma} \cdot q \mathcal{T} \\ K_\mp &= q^2 \mathcal{R} \mp Z_\Phi D \pm Z_\Phi A^2 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{q^2}{\xi} \mathcal{T} - 2Z_\Phi \phi_- \phi_-^\dagger + 2Z_\Phi \phi_+ \phi_+^\dagger \\ \hat{K}_\pm &= \hat{\mathcal{R}} \pm Z_\Phi \bar{\sigma} \cdot A. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Apéndice F

Operadores a segundo orden para electrodinámica cuántica supersimétrica

El propagador regularizado G_k fue descompuesto en $G_{0,k}$ y ΔG_k . Su forma explícita es

$$G_{0,k} = \begin{pmatrix} G_{0,k_{BB}} & 0 \\ 0 & G_{0,k_{FF}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

$$G_{0,k_{BB}} = \begin{pmatrix} q^2\mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2\mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0 & q^2\mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & q^2\mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 \\ m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\xi}\mathcal{T} \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

$$G_{0,k_{FF}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}} & i\frac{m_0}{2}\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{m_0}{2}\sigma_2 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.3})$$

$$\Delta G_k = \begin{pmatrix} \Delta G_{k_{BB}} & \Delta G_{k_{BF}} \\ \Delta G_{k_{FB}} & \Delta G_{k_{FF}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.4})$$

$$\Delta G_{k_{BB}} = \begin{pmatrix} K_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_\Phi \phi_- & -2Z_\Phi A \phi_- \\ 0 & K_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_\Phi \phi_-^\dagger & -2Z_\Phi A \phi_-^\dagger \\ 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_+ & 0 & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+ & 2AZ_\Phi \phi_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_+ & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+^\dagger & 2AZ_\Phi \phi_+^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 \\ Z_\Phi \phi_-^\dagger & Z_\Phi \phi_- & 0 & 0 & -Z_\Phi \phi_+^\dagger & -Z_\Phi \phi_+ & 0 & 0 & \mathcal{T} & 0 \\ -2Z_\Phi A \phi_-^\dagger & -2Z_\Phi A \phi_- & 0 & 0 & 2AZ_\Phi \phi_+^\dagger & 2AZ_\Phi \phi_+ & 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad (\text{F.5})$$

$$\Delta G_{kBF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\psi_-^T & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\psi_+^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_\Phi\bar{\sigma}\bar{\psi}_- & 0 & Z_\Phi\bar{\sigma}\bar{\psi}_+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

$$\Delta G_{kFB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_\Phi\bar{\sigma}\psi_- \\ 0 & \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_\Phi\bar{\sigma}\psi_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\bar{\psi}_-^T & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\bar{\psi}_+^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.7})$$

$$\Delta G_{kFF} = \begin{pmatrix} \hat{K}_+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}} & 0 & 0 & \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\phi_-^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{R}} & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\phi_+^\dagger & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\phi_- & 0 & -\sqrt{2}Z_\Phi\sigma_2\phi_+ & \hat{\mathcal{T}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathcal{T}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

$$\partial_t R_k = \begin{pmatrix} \partial_t R_{kBB} & 0 \\ 0 & \partial_t R_{kFF} \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

$$\partial_t R_{kBB} = \begin{pmatrix} q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e^2} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q^2}{e^2 \xi} t \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

$$\partial_t R_{kFF} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma} \cdot q \partial_t r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\sigma} \cdot q}{e^2} \partial_t t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\sigma} \cdot q}{e^2} \partial_t t \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= r + Z_{\Phi,k} \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{e^2} (t + Z_{V,k}^2) \\ \hat{\mathcal{R}} &= \bar{\sigma} \cdot q \mathcal{R} \\ \hat{\mathcal{T}} &= \bar{\sigma} \cdot q \mathcal{T} \\ K_{\mp} &= \mp Z_{\Phi,k} D \pm Z_{\Phi,k} A^2 \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} J &= -2Z_{\Phi,k} \phi_- \phi_-^\dagger + 2Z_{\Phi,k} \phi_+ \phi_+^\dagger \\ \hat{K}_{\pm} &= \pm Z_{\Phi,k} \bar{\sigma} \cdot A. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$