

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA SISTEMAS DE
CONTROL COMUNICADOS A TRAVÉS DE
CANALES CON RUIDO MULTIPLICATIVO
CORRELACIONADO ESPACIALMENTE**

Tesis de Grado presentada por

Jimmy Andrés Zamora Borquez

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Profesor Guía

Dr. Francisco Vargas Parra

Valparaíso, 2020.

TÍTULO DE LA TESIS:

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA SISTEMAS DE CONTROL
COMUNICADOS A TRAVÉS DE CANALES CON RUIDO MUL-
TIPLICATIVO CORRELACIONADO ESPACIALMENTE**

AUTOR:

Jimmy Andrés Zamora Borquez

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Francisco Vargas P.

Dr. Alejandro Maass M.

Dr. Juan Agüero V.

Valparaíso, 2020.

*dedicado a mi familia
y amigos*

AGRADECIMIENTOS

Tengo mucho que agradecerle a varias personas por acompañarme a lo largo de la universidad. Especialmente en este último período, en el cual no faltaron imprevistos y situaciones difíciles que me pusieron a prueba.

Quiero agradecer primero a mi familia. Especialmente a mi madre, mi hermana y mi abuela. Por estar ahí en todo momento y entregar su cariño. Agradecer las muchas conversaciones, su honestidad, su paciencia y apoyo, incluso cuando andaba un poco idiota o distante. Es curioso como este último tiempo, ante las dificultades, nos hemos acercado mucho. Ha sido una sorpresa muy grata. Las quiero un montón.

Mencionar también, a los amigos y compañeros de carrera y plan común, especialmente a Felipe y Jose, con quienes compartí casi desde el primer día de universidad (al menos con Felipe). Muchas historias dentro y fuera de la U. Por ellos también entré al magíster, movido por la curiosidad y su contagiosa motivación. Como no mencionar a Daniela, una amiga muy querida.

A Sebastián y la Gabriela, por todas las anécdotas que nos han ido ocurriendo desde que nos conocimos. Muchas tardes (y noches) de juegos de mesa, buenas conversaciones y vinitos.

A Scarlet de Punto de encuentro, a Francisca, psicóloga de la Universidad, por su buena disposición y su escucha atenta. Me ayudaron a escuchar mi intuición, en especial en los momentos difíciles. Me ayudaron a sentir confianza y esperanza.

A mis compañeros de departamento en la cuarentena. Me refiero a Paola y Ariel, que me han escuchado, comprendido y aconsejado durante esta larga cuarentena. Me siento afortunado de haber llegado a esta casa. Me gusta el ambiente familiar y acogedor que se ha ido creando. Su compañía ha sido muy importante para terminar este trabajo. Gracias, en especial para Paola, que me enseñó mucho sobre mí y mis emociones, cómo entenderlas y expresarlas de forma más asertiva, a tenerme paciencia en los procesos, a compartir lo que siento, confiar en los demás y especialmente en mí mismo.

Por último, a mi profesor Guía en este trabajo, Francisco Varga. Destaco su calidad docente, su compromiso con el aprendizaje de sus estudiantes, su cordialidad y calidad humana. Agradezco en especial su paciencia, y que me diera ánimos en momentos donde estaba estancado con el trabajo, y tenía problemas personales.

Aprovecho de extender el saludo y las gracias al departamento de electrónica, el cual me dió la posibilidad de estudiar becado. En particular, quiero agradecer a los profesores del departamento que realizan una excelente labor docente. Destaco su compromiso con el aprendizaje y favorecer un buen ambiente para ello. También, su disposición a escuchar a sus estudiantes y su calidad humana. Un saludo especial para los profesores Milan Derpich, Juan Agüero, Juan Yuz, María José Escobar, Andres Peters, Matias Zañartu, Hector Ramirez que contagian su alegría, curiosidad y motivación.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	V
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Sistema de control sobre redes	1
1.2. Restricciones de comunicación	2
1.2.1. Restricciones en la relación de señal a ruido	2
1.2.2. Pérdida aleatoria de paquetes	2
1.2.3. Retardos aleatorios	3
1.2.4. Canales con ruido aditivo	3
1.2.5. Canales con ruido multiplicativo	4
1.3. Estado del arte de NCS con canales multiplicativos	5
1.4. Objetivo y marco de trabajo	6
1.5. Contribución y Organización de la tesis	7
2. PRELIMINARES	8
2.1. Notación	8
2.2. Elementos de álgebra lineal	8
2.3. Elementos de teoría de sistemas lineales de tiempo discreto	9
2.4. Procesos estocásticos	11
2.5. Lazo de control generalizado	12
3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	17
3.1. Descripción del lazo de control	17
3.2. Planteamiento del problema	20
4. EQUIVALENCIA ESPECTRAL	22
4.1. Análisis del sistema con canal multiplicativo	22
4.2. Análisis del sistema con canal con ganancia y ruido aditivo	25
4.3. Condiciones para equivalencia	27
5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	29
5.1. Estadísticas estacionarias	29
5.1.1. Estadísticas estacionarias para caso con ruido multiplicativo	29
5.1.2. Estadísticas estacionarias para caso con ruido aditivo	32

5.2. Relación de estabilidad entre el sistema con canal con ruido multiplicativo y canal con ruido aditivo y ganancia	34
6. SIMULACIONES	37
6.1. Caso estable	38
6.2. Caso inestable al variar P_θ	40
6.3. Caso inestable al variar μ_θ	43
7. CONCLUSIONES	46
REFERENCIAS	48

RESUMEN

En esta tesis, se presenta una relación entre sistemas de control sobre redes comunicados a través de canales con ruido multiplicativo, y una versión alternativa comunicada a través de canales con ruido aditivo. Esta relación se traduce en una equivalencia espectral donde los momentos de primer y segundo orden del NCS original sobre canales de desvanecimiento son iguales a los momentos de primer y segundo orden del NCS auxiliar sobre canales aditivos. Utilizamos esta equivalencia para relacionar la estabilidad cuadrática media del NCS sobre los canales de desvanecimiento (correlacionados espacialmente) con la estabilidad interna del NCS LTI sobre los canales aditivos. Esta relación define nuestro marco de trabajo.

Para complementar se comparan la media y la covarianza del estado del NCS con canal con desvanecimiento y el NCS auxiliar con ruido aditivo. En esta comparación, se incluyen las expresiones analíticas para las estadísticas de ambos sistema, y estadísticas calculadas a partir de realizaciones de las señales de cada sistema. Para las expresiones analíticas basta dar un horizonte de tiempo. En cambio, se utiliza el método de Montecarlo para estimar las estadísticas en base a las realizaciones. Estas simulaciones permiten verificar la equivalencia y estudiar el efecto del ruido multiplicativo sobre la estabilidad del sistema.

INTRODUCCIÓN

Este capítulo pone en contexto el trabajo de tesis, presentando sus motivaciones, objetivos, marco de trabajo y el estado del arte sobre los temas a tratar. También, se describen brevemente los contenidos de cada uno de los capítulos de esta tesis.

1.1. Sistema de control sobre redes

La teoría del control clásica se basa en gran medida en la abstracción de que la información se transmite a lo largo de canales de comunicación perfectos [15], [12]. Esta abstracción ha servido bien durante mucho tiempo, existiendo una amplia variedad de aplicaciones exitosas. Este tipo de canales utilizan conexiones cableadas que comunican el controlador con los sensores y actuadores de la planta [16]. Las redes de comunicación se han visto mejoradas significativamente por los avances tecnológicos, especialmente las redes inalámbricas, y han permitido bajas en los precios asociados a su producción e implementación, convirtiéndolas en una alternativa atractiva. El área de control no ha sido la excepción, y esto ha traído nuevos desafíos y desarrollos, de los que se ha encargado el área de Sistemas de Control sobre Redes (*NCS* por sus siglas en inglés). En ella se utiliza la teoría de control y comunicación para estudiar los efectos de las restricciones de comunicación en los sistemas de control realimentados [38]. Los principales problemas en la teoría del control clásico, es decir, la estabilización, el control y la estimación óptima, se han vuelto a estudiar dentro de un marco NCS (e.g. [45], [40], [37], [42], [27], [10], [16], [30]).

Dentro de sus aplicaciones, se encuentran las redes de sensores móviles [24], coordinación de múltiples vehículos en un sistema de autopistas automatizado [28], cirugía remota [23], y la coordinación de vehículos aéreos no tripulados [29], entre muchas otras. Estos sistemas suelen tener arquitecturas de control, en donde plantas, sensores y actuadores se encuentran conectados a través de canales de comunicación inalámbricos. Dichas redes poseen grandes ventajas sobre su contra parte de conexiones independientes y dedicadas, pues reducen en gran medida los costos de instalación y mantenimiento, y permiten mayor flexibilidad para modificar la arquitectura de los sistemas y su interconexión [12].

En la Figura 1.1 podemos ver la representación general de un NCS [16]. Una de las características que distinguen a los NCS de los sistemas de control clásicos es la presencia de canales no transparentes, y de codificadores y decodificadores, en los cuales las señales son procesadas y modificadas antes de entrar y salir de la red.

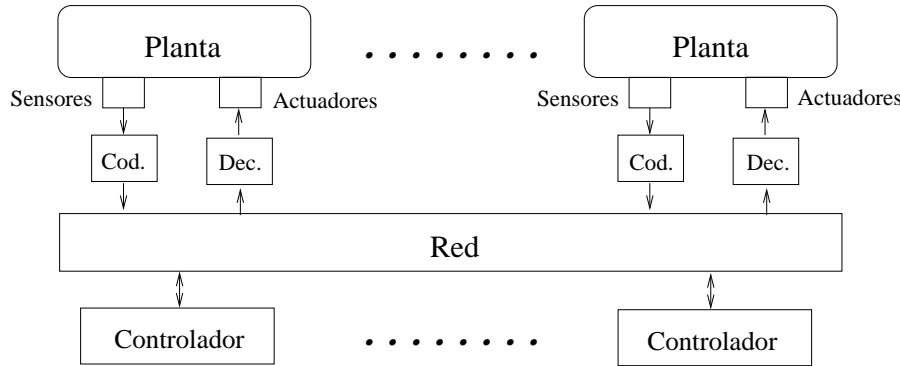


Figura 1.1. Arquitectura general de un NCS.

1.2. Restricciones de comunicación

Como ya mencionamos, el uso de NCS presenta grandes ventajas, pero también nuevos desafíos. Para su estudio y comprensión es clave considerar las restricciones de comunicación asociadas a estas redes. En la literatura, encontramos distintos tipos de restricciones tales como retrasos aleatorios, pérdidas de paquetes, restricciones en la relación de señal a ruido (SNR), errores de cuantificación, entre otros [2], [6], [10], [22], [5]. En general, los canales inalámbricos comunes poseen una naturaleza estocástica: los retrasos suelen ser de duración aleatoria y los paquetes pueden perderse, también de forma aleatoria [12]. Estos problemas pueden modificar significativamente la estabilidad y desempeño del lazo cerrado pudiendo tener consecuencias catastróficas [20]. Como solución, se puede rediseñar el controlador para que tenga robustez frente a estos escenarios. En un caso ideal, se puede diseñar el controlador en conjunto con el canal de comunicación para ofrecer el mejor rendimiento posible.

A continuación, describimos algunas de las principales restricciones que son estudiadas en la literatura sobre NCS:

1.2.1. Restricciones en la relación de señal a ruido

Los canales de comunicación pueden tener niveles de ruido tales que las señales transmitidas queden inutilizables para el receptor. Para lidiar con tal problema, una estrategia es aumentar el nivel de potencia de la señal transmitida, aumentando así la relación de señal a ruido (SNR). Esto, disminuye el efecto negativo del ruido sobre la señal. Sin embargo en la práctica, la potencia de transmisión no puede ser arbitrariamente alta, lo que se traduce en una restricción en la SNR . Dicha restricción puede tener un efecto negativo en el desempeño del lazo de control diseñado. En [5], [39], [26] podemos ver algunos ejemplos que consideran dicha restricción para distintas arquitecturas de diseño.

1.2.2. Pérdida aleatoria de paquetes

En las redes digitales, puede ocurrir que la información enviada como paquetes a través de la red no llegue a su destino. Esto debido a errores físicos en la red, interferencia, congestión excesiva o demoras que podrían llevar al receptor a considerar un paquete como perdido [44]. Para lidiar con las pérdidas de paquetes, existen protocolos de comunicación que usan

paquetes de reconocimiento. Estos paquetes son enviados por el receptor al transmisor para indicar si los paquetes enviados desde el transmisor al receptor han sido recibidos satisfactoriamente (tipo *TCP*). Los protocolos que no usan paquetes de reconocimiento se les conoce como tipo *UDP*. La elección del protocolo puede modificar la estabilidad y el rendimiento del sistema realimentado [27]. Este tipo de canales se puede encontrar en la literatura como canales de borrado y suelen ser modelados por una variable aleatoria con distribución de probabilidad Bernoulli. Entre los trabajos que tratan con pérdida de paquetes podemos mencionar [18], [27], [17].

1.2.3. Retardos aleatorios

La congestión en las redes que usan protocolos de transmisión de datos, por ejemplo tipo *TCP*, provoca que los paquetes pasen tiempo almacenados en las memorias de los nodos intermedios de la red. Esto genera que los paquetes lleguen a destino con un retardo generalmente aleatorio. Al igual que en escenarios con pérdida de paquetes, este tipo de problemas puede significar pérdida de desempeño o incluso de estabilidad. En [43] se trabaja con este tipo de restricciones.

1.2.4. Canales con ruido aditivo

Para propósitos de esta tesis, es conveniente profundizar en los canales afectados con ruido aditivos. Por simplicidad, nos referiremos a ellos como canales aditivos. Este modelo de canal es el más utilizado para caracterizar ruidos en los sistemas debido a las múltiples herramientas matemáticas que permiten estudiarlo. Cuando el ruido es blanco, tiene igual intensidad para diferentes frecuencias (densidad espectral de potencia constante), y aunque es un modelo simple, puede representar muchos tipos de incertidumbre en modelos físicos. Se puede atribuir ciertos comportamientos del canal a las estadísticas del ruido. Por ejemplo, si la varianza de ruido es cero, el receptor recibe la información transmitida perfectamente. En cambio, si la varianza de ruido no es cero y no hay restricciones en la entrada, podemos elegir un subconjunto arbitrariamente grande de entradas arbitrariamente separadas, de modo que se pueda recibir la información en la salida con una probabilidad arbitrariamente pequeña de error. Tal esquema idealizado supone una capacidad infinita en el canal. La capacidad de canal hace referencia a la cantidad de información en cierto tiempo que puede transmitir el enlace de comunicación. Para canales que además son Gaussianos, se puede calcular su capacidad de canal según la fórmula [9]

$$C = B \log(1 + \Gamma)$$

donde C es la capacidad de canal, B es la tasa de bits por segundo, y Γ es la relación de señal a ruido (SNR). Por lo tanto, si la SNR es arbitrariamente grande (la varianza del ruido es cercana a cero o la entrada tiene varianza arbitrariamente grande), la capacidad de los canales también lo es. Esta limitación en la entrada se traduce en una restricción de energía o potencia.

También, es frecuente suponer que el ruido aditivo blanco tiene una distribución de probabilidad gaussiana. Esta suposición se basa en el teorema del límite central, que aplicado en este contexto concluye que el efecto acumulativo de un gran número de fenómenos aleatorios serán aproximadamente normales, por lo que la suposición gaussiana es válida en una gran cantidad de situaciones [9]. Adicionalmente, el ruido gaussiano tiene un conjunto

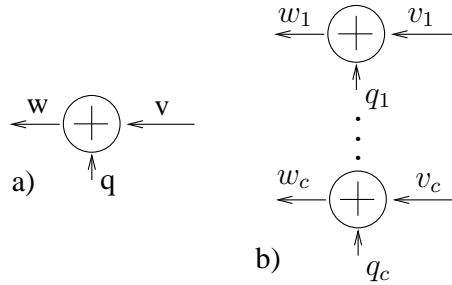


Figura 1.2. Canales con ruido aditivo. a) Canal individual. b) Múltiples canales paralelos.

de propiedades atractivas y gran versatilidad, las cuales son ampliamente aprovechadas en control óptimo y filtrado óptimo [35], [1].

El modelo básico de un canal de ruido aditivo es tal que $w = q + v$, donde v es la entrada del canal, q es el ruido del canal y w es la salida del canal. Cuando v , w y q son escalares, el canal es escalar, o individual, Por el contrario cuando v , w y q son vectores, se dice que el canal posee múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) y, si no hay diálogo cruzado entre cada rama de un canal MIMO, el canal se reduce a un conjunto de canales paralelos. Estos canales son representados en la Fig. 1.2. Como ejemplo, podemos mencionar el trabajo [9], donde se estudia la forma de distribuir la potencia que soporta el canal total a través de sus canales individuales, y así maximizar la capacidad del canal. En ese caso, se utiliza un modelo de canal con ruido aditivo gaussiano no blanco donde cada canal individual representa una frecuencia diferente.

1.2.5. Canales con ruido multiplicativo

Los canales multiplicativos o con desvanecimiento han sido estudiados principalmente en la teoría de comunicaciones e información. Esta área se encarga de tratar con mayor detalle las causas y efectos del desvanecimiento en la información transmitida y recibida [9], [12], [16]. El término desvanecimiento es ampliamente usado en la teoría de comunicación, llegando a ser ambiguo. En comunicación inalámbrica, se describe a este término como una atenuación variable sobre la señal. Las variables que contribuyen a este efecto y sus clasificaciones son variadas. Entre ellas destacamos la *pérdida en el trayecto*, la cual es causada por la disipación de potencia irradiada por el transmisor, y los efectos de propagación del canal [33], [12]. El *opacamiento* es causado por obstáculos entre el transmisor y el receptor que atenúan la potencia de la señal debido a absorción, la reflexión, la dispersión y la difracción. Cuando la atenuación es muy fuerte, la señal se bloquea. La variación debido a la pérdida de trayectoria se produce a distancias muy grandes (100-1000 metros), mientras que la variación debida al desvanecimiento se produce a distancias proporcionales a la longitud del objeto obstructor (10-100 metros en ambientes exteriores y menos en ambientes interiores)[12]. Dado que las variaciones debidas a la pérdida de trayectoria y el opacamiento ocurren a distancias relativamente grandes, esta variación a veces se denomina efectos de propagación a gran escala [33].

Dentro de los canales de desvanecimiento (*fading channels*), encontramos a los canales

multiplicativos. Este modelo considera que una ganancia multiplicativa aleatoria variable en el tiempo afecta la señal transmitida [12], [10]. Este modelo puede resultar adecuado para describir varios tipos de fenómenos que afectan a las señales enviadas a través de los canales de comunicación como por ejemplo, la pérdida aleatoria de paquetes, ruido en las sensores, interferencia y mediciones intermitentes, inclusive en canales análogos [12], [10], [21], [26], [41]. Los canales multiplicativos incorporan no linealidad al modelo, haciéndolos menos tratables al no disponer de herramientas para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (*LTI*). Note que los canales de borrado son un caso especial de los canales con desvanecimiento donde la ganancia aleatoria toma exclusivamente valores de 0 o 1. En esta tesis se estudiara la estabilidad de sistemas de control sobre redes comunicados a través de canales multiplicativos.

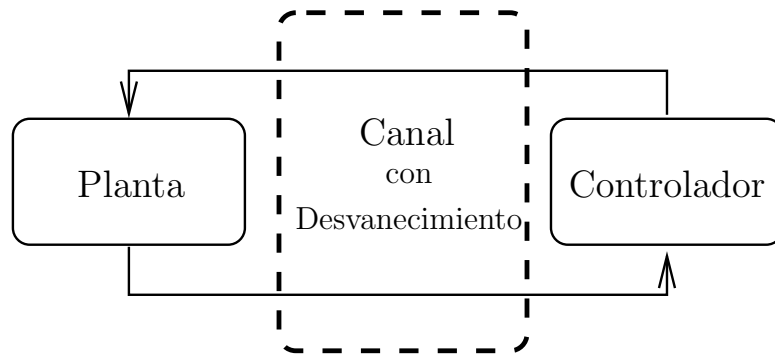


Figura 1.3. Sistema de control sobre redes comunicado a través de canales con desvanecimiento.

En la Fig. 1.3, se presenta una configuración ampliamente usada en la literatura referente a Control sobre Redes [10], [41], [25], [16]. Esta considera el desvanecimiento en canales de comunicación entre la planta y el controlador.

1.3. Estado del arte de NCS con canales multiplicativos

Numerosos trabajos en la literatura estudian la estabilidad y el rendimiento de los NCS sobre los canales con ruido multiplicativo, ver por ejemplo [10], [22], [32], [25], [21]. En estos trabajos, se obtienen condiciones de estabilidad y se determina el mejor rendimiento alcanzable, expresadas mayormente en términos de los polos inestables, los ceros de fase no mínima y los retrasos de la planta, bajo el supuesto de canales de desvanecimiento no correlacionados.

En [10] se plantea que el ruido multiplicativo puede ser interpretado como una incerteza en el modelo de la planta, viendo el problema con un enfoque de control robusto. Este hecho resulta importante en la obtención de condiciones necesarias y suficientes para estabilización en sentido cuadrático medio (*MSS*). Para plantas SISO con la medición del estado disponible y afectadas por canales de borrado, se demuestra que la existencia de controladores estabilizantes, depende de que la probabilidad de transmisión exitosa sea mayor que una determinada función de los polos inestables de la planta.

En [41] se logran presentar condiciones necesarias y suficientes para MSS en términos de los polos inestables cuando se tiene realimentación de estado. La expresión queda en términos de la llamada medida de Mahler. Para el caso de realimentación de la salida, se estudian plantas SISO y MIMO triangulares desacopladas, obteniendo una condición explícita para estabilidad en función de los polos inestables, los ceros de fase no mínima y el grado relativo de la planta. Además, en [41] se indica que utilizando realimentación en un canal tipo TCP, se pueden reducir el efecto de los ceros de fase no mínima y el grado relativo de la planta sobre la estabilidad. Cabe mencionar que en este caso no se considera una perturbación de entrada que afecte al sistema.

En [25] se estudia la estabilidad de sistemas LTI en presencia de incertidumbres estocásticas multiplicativas en el modelo. Estas incertezas se representan por medio de un canal con ruido multiplicativo no correlacionado. En dicho trabajo, se presentan condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea estabilizable usando realimentación de estados. Para el caso SISO, se logran obtener límites explícitos para la covarianza del ruido multiplicativo, de forma que el sistema sea estable. Para el caso de sistemas MIMO de fase mínima y retardos, se presentan LMIs que permiten indicar dichas condiciones. Además, se muestra que la estabilidad del sistema es sensible a la dirección de sus polos inestables sus ceros de fase no mínima, y la alineación de estas.

En [3] se considera correlación espacial del ruido, y se obtiene una condición de estabilidad del sistema, en términos del radio espectral de un operador matricial lineal. Condiciones similares fueron obtenidas en [10], pero que no llegan a ser explícitas en términos del ruido multiplicativo ni la descripción del sistema. Se utilizan LMI's para encontrar los valores específicos que satisfagan las condiciones de estabilidad y desempeño de un sistema dado. A diferencia de los trabajos citados anteriormente, los autores realizan un plantear y resuelven el problema en términos de las señales temporales de entrada y salida del sistema, sin recurrir a variables de estados y sin identificar una planta o controlador. Por esto, no se hace ninguna referencia a sistemas de control.

En [22] se utiliza una equivalencia estadística entre un NCS con canales de desvanecimiento, y un sistema auxiliar con canales con ruido aditivo. Esta equivalencia permite obtener resultados de rendimiento óptimos en NCS sobre canales de desvanecimiento no correlacionados. Esta equivalencia establece que el NCS con canales de desvanecimiento puede analizarse estudiando un NCS auxiliar que contiene canales de ruido aditivos sujetos a restricciones de SNR. Tal marco facilita el estudio del NCS original habilitando las herramientas estándar para sistemas LTI.

1.4. Objetivo y marco de trabajo

En este trabajo se consideran sistemas de control multivariados de tiempo discreto, los cuales están comunicados a través de canales con ruidos multiplicativos. Se supondrá que el canal de comunicación es un canal MIMO, con ruidos multiplicativos correlacionados espacialmente. El objetivo principal es estudiar la estabilidad de estos sistemas de control realimentados y cómo las estadísticas del ruido multiplicativo pueden afectarla. Para ello se recurrirá a un esquema auxiliar en donde el canal de comunicación en vez de ser multiplicativo, es un canal de ruido aditivo, pero que sin embargo permite estudiar al sistema

con canal multiplicativo original. Esto se basa en trabajos anteriores en donde se presenta una equivalencia espectral entre este tipo de canales. A diferencia de esos trabajos, en este marco de trabajo se consideran ruidos correlacionados, lo que implica estudiar una extensión de dicha equivalencia para este escenario. Esta equivalencia se estudia tanto para el caso transiente como para el estacionario.

1.5. Contribución y Organización de la tesis

La contribución de esta tesis se resume en dos puntos principales:

- Se deriva una equivalencia entre los momentos de segundo orden en un sistema de control sobre redes con canales multiplicativos correlacionados, y uno con canales de ruido aditivos.
- Se muestra que la estabilidad del sistema de control sobre redes con canales multiplicativos se puede estudiar en base a un sistema auxiliar con canales de ruido aditivo.

La organización de los capítulos para esta tesis es la siguiente. La sección 2 presenta los preliminares. La Sección 3 detalla la formulación del problema. En la Sección 4 se demuestra la equivalencia espectral entre el NCS sobre los canales de desvanecimiento, y canal con ruido aditivo. En la Sección 5 se realiza el análisis de estabilidad y se relaciona la estabilidad MSS del NCS original con la estabilidad interna del NCS auxiliar. En la Sección 6 se ilustran los resultados con simulaciones. Finalmente, en la Sección 7 se presentan las conclusiones.

PRELIMINARES

Este capítulo presenta la notación, convenciones, definiciones y propiedades necesarias que se utilizarán en el desarrollo de esta tesis. En la sección 2.1 se proponen convenciones y definiciones sobre conjuntos numéricos y matrices. En la sección 2.2 se presentan propiedades de álgebra lineal que nos serán útiles. La sección 2.3 presenta elementos útiles y nociones preliminares para abordar la estabilidad de sistemas LTI, principalmente desde el enfoque de variables de estado, y en tiempo discreto. La sección 2.4 se revisan elementos esenciales de los procesos estocásticos y algunas clasificaciones que nos serán útiles para trabajar con ellos. En la sección 2.5, se extiende la noción de estabilidad presentada en 2.3 considerando que la naturaleza de los sistemas LTI que estudiaremos es estocástica. Para ello se definen los conceptos de estabilidad interna y estabilidad en sentido cuadrático medio.

2.1. Notación

Se denotará a los conjunto de números enteros, naturales, naturales incluyendo al cero, reales, y complejo por \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{R} , y \mathbb{C} respectivamente. En caso de trabajar con conjuntos de múltiples dimensiones, se denotarán usando superíndices, por ejemplo \mathbb{R}^n . Utilizaremos $j = \sqrt{-1}$. Dado un número $x \in \mathbb{C}$, $|x|$ denota a su magnitud, x^* a su conjugado y $\text{Re}(x)$ a su parte real. Para una matriz M cualquiera, M^\top , M^* , M^H , y $\text{tr}(M)$ denotan a su traspuesta, conjugado, hermitiana y a su traza, respectivamente. Para denotar que la matriz es definida positiva y positiva semidefinida, escribimos $M > 0$ y $M \geq 0$ respectivamente. Los subelementos de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se denotan por a_{ij} donde $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Se define la matriz identidad de $n \times n$ como $I_{n \times n}$. Se utiliza el símbolo z como el argumento de la transformada Zeta.

2.2. Elementos de álgebra lineal

El producto de Hadamard entre 2 matrices A y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se denota por $A \odot B = C$ y corresponde al producto elemento a elemento, es decir, $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$, $\forall i, j$. El operador $\text{diag}(v)$ denota una matriz diagonal que posee los elementos del vector v en su diagonal.

Sean v un vector columna de largo n , $D_v = \text{diag}(v)$ y M una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$, entonces se cumple que [4].

$$D_v M D_v^\top = (v v^\top) \odot M. \quad (2.2.1)$$

Lema 2.2.1. *Defina el operador $\mathcal{T}(A) = MAM^\top + L(P \odot [NAN^\top])L^\top$, donde A, M, L, P, N son matrices de dimensiones apropiadas, y $P \geq 0$. Entonces, $\mathcal{T}(\cdot)$ es un operador lineal y monótonico.*

Demostración. *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha A + \beta B) &= M(\alpha A + \beta B)M^\top + L(P \odot [N(\alpha A + \beta B)N^\top])L^\top \\ &= M\alpha AM^\top + M\beta BM^\top + L(P \odot [N\alpha AN^\top])L^\top + L(P \odot [N\beta BN^\top])L^\top \\ &= \alpha\mathcal{T}(A) + \beta\mathcal{T}(B) \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $(\alpha A) \odot B = \alpha(A \odot B)$ [4] para demostrar linealidad.

Para demostrar monotonidad, consideremos $X \geq Y$ y la hipótesis de $\mathcal{T}(X) \geq \mathcal{T}(Y)$. Dado que $X - Y \geq 0$, y usando el hecho de que el producto de Schur (o producto de Hadamard) de 2 matrices positivas semidefinidas es también positiva semidefinida [36], entonces tenemos que $\mathcal{T}(X - Y) \geq 0$. Ya que esta demostrada la linealidad de $\mathcal{T}(\cdot)$, la prueba esta completa.

A continuación presentamos la definición de matriz de Schur, útil para caracterizar propiedades relacionadas a estabilidad de sistemas LTI.

Definición 2.2.1. *(Matriz de Schur) La matriz A es una Matriz de Schur, si todos los autovalores de A están dentro del círculo unitario, por ejemplo, $\rho(A) < 1$, y tal que $x(k+1) = Ax(k)$.*

2.3. Elementos de teoría de sistemas lineales de tiempo discreto

En esta tesis se trabaja con sistemas lineales de tiempo discreto e invariantes en el tiempo (LTI discreto) tal como se muestra en la Fig. 2.1. Estos sistemas admiten una representación en variables de estado dada por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad (2.3.2)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el estado del sistema M , x_0 es el estado inicial, la secuencia $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada al sistema, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es la salida, y (A, B, C, D) son matrices reales de dimensiones apropiadas.

A continuación se presentan definiciones útiles para identificar propiedades del sistema que nos indican relaciones entre las variables externas (entradas y salidas) con las variables

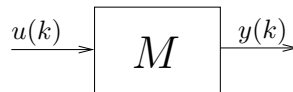


Figura 2.1. Sistema LTI en tiempo discreto.

internas (de estado). Para las siguientes propiedades considere que $u(k)$ corresponde a la actuación sobre el sistema (entrada manipulable)

Definición 2.3.1. (Controlabilidad [46]). *El sistema en (2.3.1) o el par (A, B) se dice controlable si, para todo estado inicial $x(0) = x_0$, $k_1 \in \mathbb{N}$ y estado final x_1 , existe una secuencia $\{u(k)\}_{1, \dots, k_1-1}$ tal que la solución de (2.3.1) satisface $x(k_1) = x_1$. En otro caso el sistema o el par (A, B) se dice que es no controlable.*

Definición 2.3.2. (Observabilidad [46]). *El sistema en (2.3.1) o el par (C, A) se dice observable si, para cualquier $k_1 \in \mathbb{N}$, el estado inicial x_0 se puede determinar a partir de la entrada $u(k)$ y de la salida $y(k)$ en el intervalo de tiempo $[0, k_1]$. En otro caso el sistema o el par (C, A) se dice que es no observable.*

Definición 2.3.3. (Detectabilidad [46]). *El sistema en (2.3.1) o el par (C, A) se dice detectable si y sólo si existe una matriz L tal que $A + LC$ es Schur.*

Definición 2.3.4. (Asintóticamente estable [46]). *El sistema en (2.3.1) se dice asintóticamente estable si, para entrada nula, la salida converge a cero para un estado inicial arbitrario. El sistema será asintóticamente estable si y sólo si todos sus polos están dentro del círculo unitario. Los polos pueden ser encontrados como los autovalores de A .*

Funciones de transferencia

Llamaremos función de transferencia a la función $M(z)$ tal que $Y(z) = M(z)U(z)$, donde $Y(z)$ y $U(z)$ son la transformada Zeta de las señales $y(k)$ y $u(k)$ respectivamente en (2.3.1). Además, la función de transferencia $M(z)$ se puede escribir en términos de las matrices (A, B, C, D) como

$$M(z) \triangleq C(zI - A)^{-1}B + D$$

Denotamos por \mathcal{R} al conjunto de todas las funciones de transferencia reales y racionales. Los siguientes son subconjuntos de \mathcal{R} :

- $\mathcal{R}_p \triangleq \left\{ M(z) \in \mathcal{R} : \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) \text{ existe y es finito.} \right\}$
- $\mathcal{R}_{sp} \triangleq \left\{ M(z) \in \mathcal{R} : \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = 0. \right\}$
- $\mathcal{R}_{bp} \triangleq \left\{ M(z) \in \mathcal{R}_p, \text{ cuadradas y tal que } M(z)^{-1} \in \mathcal{R}_p \text{ existe.} \right\}$
- $\mathcal{RH}_\infty \triangleq \left\{ M(z) \in \mathcal{R}_p : M(z) \text{ es estable.} \right\}$
- $\mathcal{RH}_2 \triangleq \left\{ M(z) \in \mathcal{R}_{sp} : M(z) \text{ es estable.} \right\}$

A las tres primeras las llamaremos funciones de transferencia propias, estrictamente propias y bipropias respectivamente.

Propiedades de norma 2

Toda función $A(z) \in \mathcal{R}$ que no posea polos sobre el círculo unitario pertenece a \mathcal{L}_2 , i.e., es tal que

$$\|A(z)\|_2^2 \triangleq \text{tr} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-pi}^{\pi} A(e^{j\omega})A(e^{j\omega})^H d\omega \right\} < \infty. \quad (2.3.3)$$

donde $\|\cdot\|_2$ corresponde a la norma en \mathcal{L}_2 estándar, también llamada norma 2 [46], [11]. Cabe destacar, además, que toda función de transferencia $A(z) \in \mathcal{R}$ sin polos sobre el círculo unitario se puede descomponer como [46], [11]

$$A(z) = [A(z)]_{\mathcal{H}_2^\perp} + [A(z)]_{\mathcal{H}_2},$$

donde $[A(z)]_{\mathcal{H}_2^\perp} \in \mathcal{RH}_2$ contiene a las partes constantes, estrictamente inestables y no causales de $A(z)$ y, donde $[A(z)]_{\mathcal{H}_2} \in \mathcal{RH}_2$ corresponde a la parte estable y estrictamente propia de $A(z)$. A continuación se listan propiedades útiles de la norma 2 [46], [11]:

Propiedad 2.3.1. *Considere las funciones de transferencia $A(z), B(z) \in \mathcal{R}$ sin polos sobre el círculo unitario. Entonces:*

1. $\|A(z)^T\|_2^2 = \|A(z)\|_2^2$
2. Si $A(z) \in \mathcal{RH}_2^\perp$ y $B(z) \in \mathcal{RH}_2$, entonces $\|A(z) + B(z)\|_2^2 = \|A(z)\|_2^2 + \|B(z)\|_2^2$.
3. Si $A(z) \in \mathcal{RH}_2^\perp$ y $B(z) \in \mathcal{RH}_\infty$, entonces $\|A(z) + B(z)\|_2^2 = \|A(z) - A(0)\|_2^2 + \|A(0) + B(z)\|_2^2$.

2.4. Procesos estocásticos

En esta tesis, además de usar sistemas LTI trabajaremos con procesos estocásticos. Para ello consideraremos la definición usual para tiempo discreto [1],[35], donde un proceso estocástico $\{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una secuencia de variables aleatorias reales que poseen densidades conjuntas de probabilidad bien definidas.

Considere a x como un proceso estocástico vectorial de tiempo discreto y $x(k)$ la variable aleatoria correspondiente en el instante k . El operador esperanza se denota por $\mathcal{E}\{\cdot\}$. Por simplicidad definiremos

$$\bar{x}(k) \triangleq x(k) - \mathcal{E}\{x(k)\}. \quad (2.4.1)$$

Así, la media, la matriz de covarianza, el segundo momento y la función de autocovarianza de x , son denotados por $\mu_x(k)$, $P_x(k)$, $Q_x(k)$, $R_x(k + \tau, k)$ respectivamente, y tales que

$$\begin{aligned} \mu_x(k) &\triangleq \mathcal{E}\{x(k)\}, & P_x(k) &\triangleq \mathcal{E}\{\bar{x}(k)\bar{x}(k)^\top\} \\ Q_x(k) &\triangleq \mathcal{E}\{x(k)x(k)^\top\}, & R_x(k + \tau, k) &\triangleq \mathcal{E}\{\bar{x}(k + \tau)\bar{x}(k)^\top\}. \end{aligned}$$

No es difícil notar que $Q_x(k) = P_x(k) + \mu_x(k)\mu_x(k)^\top$.

Definiciones de procesos estocásticos

A continuación mencionamos algunas propiedades que serán de utilidad [35]:

1. El proceso x se dice i.i.d si y sólo si es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
2. El proceso x se dice que es un proceso de segundo orden si y sólo si su media y matriz de segundos momentos existen y son finitas para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y, además, son finitas cuando $k \rightarrow \infty$.

3. Un proceso x de segundo orden se dice que es un proceso estacionario en sentido amplio (wss) si y sólo si su media $\mu_x(k)$ es constante $\forall k \in \mathbb{Z}$ y su función de covarianza $R_x(k + \tau, k)$ es sólo función de $\tau \in \mathbb{Z}$.
4. Un proceso x de segundo orden definido para $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ se dice ser asintóticamente estacionario en sentido amplio (a-wss) sí y sólo sí existe $\alpha \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, con $f(\tau)$ finita $\forall \tau$ y permaneciendo así a medida que $\tau \rightarrow \infty$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_x(k) = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k + \tau, k) = f(\tau), \forall \tau \in \mathbb{T}$$

5. El proceso x se dice blanco si y sólo si x es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas entre sí. Por ejemplo

$$R_x(k + \tau, k) \begin{cases} = 0 & \forall \tau \neq 0 \\ \leq a < \infty & \tau = 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Además, si x es i.i.d., entonces x es blanco.

6. Los procesos x e y se dicen no correlacionados si $\mathcal{E} \{ (x - \mu_x)(y - \mu_y)^\top \} = 0$.
7. Diremos que un proceso x posee correlación espacial si $P_x(k)$ es una matriz no diagonal $\forall k$.

Ecuación de Lyapunov

A continuación presentamos la definición de ecuación de Lyapunov [35].

Definición 2.4.1. *Considere un sistema con la siguiente representación en variables de estado*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + v(k) \\ y(k) &= Hx(k) + e(k) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

La señal $v(k)$ es un proceso estocástico blanco de media cero, con matriz de covarianza R_1 . Entonces

$$P_x(k+1) = FP_x(k)F^* + R_1$$

es llamada la ecuación de Lyapunov.

Las soluciones de ecuación de Lyapunov tienen una estructura conocida, y propiedades interesantes. Por ejemplo, si el sistema descrito en (2.4.2) es asintóticamente estable, entonces x es a-wss. De forma equivalente, la ecuación de Lyapunov converge a

$$P = FPF^* + R_1$$

y tiene solución única, la cual es hermitiana (por ejemplo $A = A^H$) y es definida positiva.

2.5. Lazo de control generalizado

En esta sección se presentan diversas formas de representar los lazos de control. Entre ellos destacamos el lazo de control generalizado, y un esquema alternativo que pone énfasis

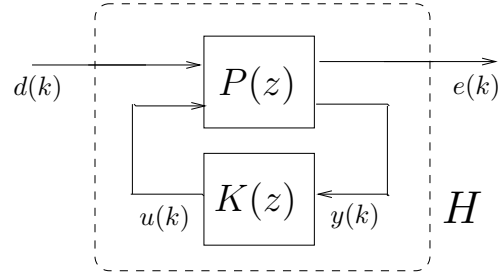


Figura 2.2. Lazo de control generalizado.

en los canales de comunicación. Luego, se conectan los elementos de teoría de control de sistemas lineales y procesos estocásticos para presentar conceptos como lazo bien definido, estabilidad interna y estabilidad en sentido cuadrático medio.

La Fig. 2.2 muestra un lazo de control donde $P(z)$ corresponde a la planta generalizada y $K(z) \in \mathcal{R}_p$ corresponde al controlador. El vector $d(k)$ contiene las señales externas, por ejemplo, perturbaciones y referencias. El vector $e(k)$ es la señal de desempeño, $u(k)$ es la actuación dada por el controlador K , y $y(k)$ es la salida de la planta P que es realimentada hacia el controlador, cerrando el lazo. Cabe mencionar que el esquema de la Fig. 2.2 se puede encontrar en la literatura como lazo cerrado de control generalizado (GCC), y tiene la ventaja de poder representar cualquier lazo cerrado de control lineal [34].

En términos de la entrada d y la señal de desempeño e , este lazo de control puede verse como un sistema de lazo cerrado H tal como en la Fig. 2.1. Diremos que el sistema H de la Figura 2.2 tiene una representación en variables de estado tal como se indica en (2.3.1)

$$x(k+1) = \hat{A}x(k) + \hat{B}d(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5.1)$$

$$e(k) = \hat{C}x(k) + \hat{D}d(k) \quad (2.5.2)$$

donde las matrices $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ contienen las dinámicas, no solo de la planta, sino que también del controlador.

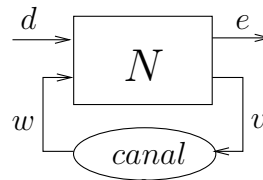


Figura 2.3. Sistema N con realimentación a través de canal de comunicación.

Una forma alternativa de estudiar los lazos de control generalizados, viene de no considerar a los canales de comunicación dentro de la descripción del sistema H como en la Fig. 2.2, sino fuera de este, tal como se ve en la Fig. 2.3. Este esquema resulta particularmente útil para estudiar las propiedades y efectos de los canales de comunicación, y será utilizado

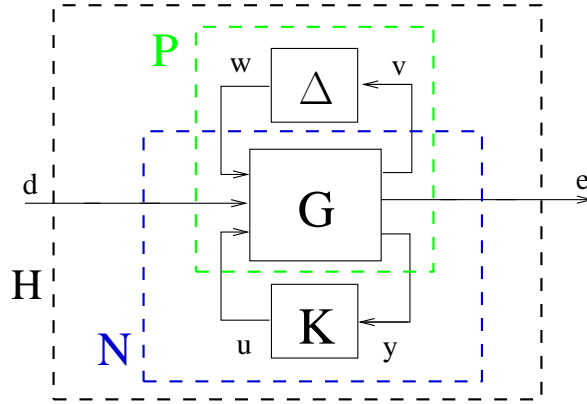


Figura 2.4. Diferentes representaciones de un sistema en lazo cerrado.

en el capítulo siguiente, al tratar la formulación del problema.

Lazos de control similares al que ilustra la Fig. 2.3 se encuentran con frecuencia en la literatura (ver por ejemplo [46], [22]), y representa una generalización de muchas arquitecturas de control lineal, incluyendo los clásicos lazos de control de 1 y 2 grados de libertad. En dichos escenarios, la planta y controlador, y su interacción, se encuentran representados dentro del sistema N de la Fig. 2.3; el vector d y la señal e comparten la misma descripción que la dada para el lazo de control generalizado. Las señales dentro del sistema realimentado de control que son transmitidas por el canal de comunicación multivariable son reunidas en el vector v . Esto se ilustra en la Figura 2.3, a través de la entrada v , la salida w , y la representación gráfica del canal de comunicación. Cabe destacar que el canal indicado en la Fig. 2.3 puede afectar a la señal de control que envía a la planta, o también a las mediciones enviadas desde la planta al controlador.

En la Fig. 2.4 se representa al sistema H usando los esquemas de las Fig. 2.2 y 2.3. Adicionalmente, se agrega el bloque Δ , el cual puede modelar múltiples fuentes de incertidumbre, por ejemplo incertidumbres estructurales en la planta. Este esquema es utilizado en control robusto [46], [34].

Lazo bien definido

Al proponer modelos para la planta y controlador nos interesa que estén correctamente definidos y tengan sentido físico, al menos en términos de causalidad. Como contraejemplo considere los sistemas con funciones de transferencia impropios, los cuales son no causales. Para identificar sistemas correctamente definidos, consideramos la noción de lazo bien definido.

Definición 2.5.1. (*Lazo bien definido [46]*).

Un sistema realimentado M se dice bien definido si todas las funciones de transferencia del lazo cerrado están bien definidas y $M \in \mathcal{R}_p$.

Lema 2.5.1. (*Lazo bien definido [46]*).

El sistema de la Figura 2.2 está bien definido si y sólo si $\det(I - P(\infty)K(\infty)) \neq 0$.

Estabilidad interna

La noción de estabilidad interna nos sugiere que las señal dentro del lazo son acotadas. Una condición necesaria para estabilidad interna es que las realizaciones de $P(z)$ y $K(z)$ sean detectables y estabilizables [46].

Definición 2.5.2. (Estabilidad interna [46]).

El sistema de la Figura 2.2 se dice internamente estable si y sólo si el estado x converge a cero para toda condición inicial x_0 cuando $d = 0$.

Lema 2.5.2. (Lema 5.2 en [46]). El sistema de la Figura 2.2 se dice internamente estable si y sólo si la matriz \hat{A} en (2.5.1) es Schur.

Definición 2.5.3. (Planta estabilizable [11]).

La planta $P(z)$ del sistema de la Figura 2.2 se dice estabilizable si y sólo si existe $K(z) \in \mathcal{R}_p$, tal que el lazo cerrado del sistema es internamente estable y está bien definido.

Estabilidad en sentido cuadrático medio

Dado que estudiaremos sistemas dinámicos con entradas estocásticas, las nociones de estabilidad para sistemas determinísticos no son suficientes. Para extender dicha noción de forma adecuada, utilizaremos la noción de estabilidad en sentido cuadrático medio.

Considere el sistema de la Figura 2.2 con la representación en variables de estado en (2.5.1) y suponga que se cumple lo siguiente:

Suposición 2.5.1.

1. El estado inicial x_0 es una variable aleatoria de segundo orden con media μ_0 y matriz de varianza P_0 .
2. La entrada externa d es una secuencia de ruido blanco de segundo orden, no correlacionada con x_0 , con media μ_d y varianza P_d .

Definición 2.5.4. (Estabilidad en sentido cuadrático medio [7], [8]).

El sistema en (2.5.1) se dice estable en sentido cuadrático medio (MSS) si y sólo si, para todo x_0 y d que satisfacen la Suposición 2.5, existen μ_x y $Q_x \geq 0$, ambos finitos e independientes de μ_0 y P_0 , tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{x(k)\} = \mu_x, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{x(k)x(k)^\top\} = Q_x$$

Esta definición nos permite extender la noción de estabilidad a sistemas estocásticos, donde no es conveniente trabajar directamente con las mediciones (realizaciones) de las señales de interés. En cambio, la definición se establecen en términos de la convergencia de los primeros y segundos momentos del estado del sistema. Cabe mencionar que los momentos, además de ser acotados, convergen a un valor estacionario independientemente de las condiciones iniciales.

A continuación se mencionan un par de lemas técnicos útiles:

Lema 2.5.3. (MSS [1], [35]). *El sistema en (2.5.1) es MSS si y sólo si la matriz \hat{A} es Schur.*

Note que si el sistema es MSS también es internamente estable, y viceversa.

Lema 2.5.4. (Asintóticamente estacionarios [1], [35]). *Si el sistema en (2.5.1) es MSS y se cumple la Suposición 2.5, entonces el estado x y la salida e son procesos de segundo orden a -wss con densidades espectrales de potencia (PSDs) estacionarios*

$$S_x(z) = H_x(z)P_dH_x(z)^{\sim}, \quad S_e(z) = H_e(z)P_dH_e(z)^{\sim},$$

donde $H_x(z) \triangleq (zI - \hat{A})^{-1}\hat{B}$ y $H_e(z) \triangleq \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$.

Dado el Lema 2.5.4 y la definición de norma 2 en (2.3.3), es fácil verificar que la varianza estacionaria de la salida y , de un sistema MSS con función de transferencia $\Omega_y(z)$ y entrada d con matriz de varianza $P_d = \sigma_d^2 I$, se puede escribir como [1], [35].

$$\sigma_y^2 = \text{tr} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Omega_y(e^{j\omega}) \Omega_y(e^{j\omega})^H d\omega \right\} = \sigma_d^2 \| \Omega_y(z) \|_2^2$$

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta la configuración de control sobre la que se trabajará a lo largo de esta tesis, poniendo especial atención en describir sistemas comunicados a través de canales afectados por ruido multiplicativo. Adicionalmente, se describen canales de comunicación afectados por ruido aditivo. Luego, se plantean las interrogantes que busca resolver esta tesis, y cual será el rol de los canales antes mencionados.

3.1. Descripción del lazo de control

Considere un lazo de control cerrado a través de un canal de comunicación como el ilustrado en la Fig. 2.3, donde $N \in \mathcal{R}_p$ es un sistema lineal e invariante en el tiempo, de múltiples entradas y múltiples salidas, y de tiempo discreto, donde d es un vector de señales externas, e es una señal de interés, v es la entrada del canal de comunicación, y w es su salida.

La descripción en variables de estado de N viene dada por

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_d & B_w \\ C_e & D_{de} & D_{we} \\ C_v & D_{dv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \\ w(k) \end{bmatrix}, \quad (3.1.1)$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ es el índice temporal y $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el estado del sistema N .

Hay que notar que el valor 0 en el elemento que relaciona $v(k)$ y $w(k)$ en (3.1.1) es necesario para asegurar que no se forme un lazo algebraico debido a la realimentación, esto ya que los canales de comunicación a considerar no poseen retardo.

Suposición 3.2.1.

1. El estado inicial $x(0)$ es una variable aleatoria de media $\mu_x(0)$ y matriz de covarianza $P_x(0)$.
2. El vector de entrada $d(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$, para $k \in \mathbb{N}_0$, es una secuencia de ruido blanco estacionario, y por lo tanto de media $\mu_d(k) = \mu_d$ constante y matriz de covarianza $P_d(k) = P_d$ constante.
3. No hay correlación entre d y $x(0)$.

Observación 3.1.1. *En este trabajo se usa un modelo de ruido multiplicativo para el canal, y otro modelo de ruido aditivo y ganancia. Es importante notar que al usar uno u otro canal, las realizaciones de todas las señales involucradas en el caso serán distintas debido a la dinámica de los canales, excepto la señal externa $d(k)$, que es común en ambos casos. Por ello, incorporaremos el subíndice M para referirnos a la señales de (3.1.1) cuando se utiliza el canal de ruido multiplicativo, y el subíndice L para referirnos al caso de ruido aditivo (la letra L se refiere a la propiedad de linealidad que es válida para este último caso a diferencia del caso multiplicativo).*

A continuación, se describen los dos modelos para canal de comunicación que estudiaremos en esta tesis.

Canal con ruido multiplicativo

En este caso suponemos que el lazo se cierra a través del canal con ruido multiplicativo ilustrado en la Fig. 3.1, y que está definido por la entrada v_M , la salida w_M , y Θ , siendo esta última una matriz estocástica que representa al ruido el canal.

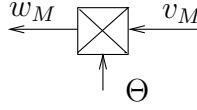


Figura 3.1. Canal de comunicación con ruido multiplicativo correlacionado espacialmente.

Definimos el canal multiplicativo como

Definición 3.1.1. Canal multiplicativo: *Se dice que las señales $w_M(k) = [w_{M_1}(k), \dots, w_{M_\ell}(k)]^\top$ y $v_M(k) = [v_{M_1}(k), \dots, v_{M_\ell}(k)]^\top$, están conectadas a través de canales multiplicativos con desvanecimiento si y sólo si $w_M(k)$ y $v_M(k)$ se hallan relacionadas a través de la ecuación*

$$w_M(k) = \Theta(k)v_M(k)$$

con

$$\Theta(k) \triangleq \text{diag}([\theta_1(k), \dots, \theta_\ell(k)])$$

Ambos, $\theta(k)$ y $\Theta(k)$ caracterizan el ruido del canal, pero resulta más convincente usar $\Theta(k)$ para trabajar el sistema de ecuaciones de forma matricial. Las medias de ambos procesos son denotadas por $\mu_\theta(k) = \mathcal{E}\{\theta(k)\}$ y $\Upsilon \triangleq \text{diag}(\mu_\theta(k))$, respectivamente. Hay que notar que, dadas las definiciones anteriores, el canal considerado es un canal de múltiples entradas y salidas.

Suposición 3.1.1. *Consideraremos que el ruido $\theta(k)$ es un proceso i.i.d. con correlación espacial y media no nula. Además, supondremos que el ruido $\theta(k)$ (y en consecuencia también $\Theta(k)$) es independiente de $(x_M(0), d(k))$.*

Note que, la Suposición 3.1.1 implica que Υ es una matriz constante, y que P_θ es no diagonal y constante.

Dada la Definición 3.1.1, el canal multiplicativo se puede representar como muchos canales de comunicación individuales en paralelo, de la forma

$$w_{M_i}(k) = \theta_i(k)v_{M_i}(k).$$

con $i \in \{1, \dots, \ell\}$. En la Fig. 3.2 vemos la representación gráfica de lo descrito anteriormente. Además, la correlación espacial del ruido multiplicativo θ , puede implicar por ejemplo, que distintos canales individuales compartan una fuente aleatoria común.

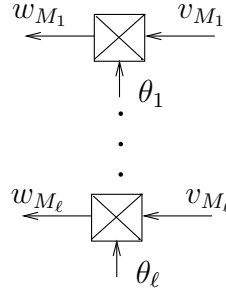


Figura 3.2. Detalle de los canales paralelos de comunicación con ruido multiplicativo.

Canal con ganancia y ruido aditivo

La Fig. 3.3 ilustra el modelo de canal con ruido aditivo que se utilizará, donde v_L y w_L son la entrada y salida del canal, q es un vector de ruido aditivo y Ψ es una matriz determinística.

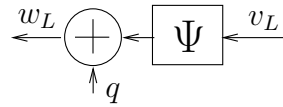


Figura 3.3. Canal de comunicación alternativo con ruido aditivo y ganancia.

Definición 3.1.2. Canal con ganancia y ruido aditivo. Se dice que las señales $w_L(k) = [w_{L_1}(k), \dots, w_{L_\ell}(k)]^\top$ y $v_L(k) = [v_{L_1}(k), \dots, v_{L_\ell}(k)]^\top$, están conectadas a través de canales con ganancia y ruido aditivo si y sólo si $w_L(k)$ y $v_L(k)$ se hallan relacionadas a través de la ecuación

$$w_L(k) = q(k) + \Psi v_L(k).$$

Suposición 3.1.2. El ruido $q(k)$, con $k \in \mathbb{N}_0$, es una secuencia de ruido blanco posiblemente correlacionada en el espacio. Además, supondremos que $q(k)$ es no correlacionado con $(x_L(0), d(k))$. Supondremos también que $q(k)$, $w_L(k), v_L(k)$ son todos vectores columna de largo ℓ , y Ψ es una matriz constante de dimensión $\ell \times \ell$.

Cabe mencionar que cada elemento del ruido aditivo q_i afecta al i -ésimo canal, es decir, lo hace en paralelo. Pero, no ocurre lo mismo con la señal v_L , pues la matriz Ψ , en general, es no diagonal. Esto significa que el i -ésimo canal se ve afectado por una combinación lineal

de la señal v_L . Debido a esto, este modelo de canal no representa, en general, un canal de comunicación paralelo, a diferencia del canal multiplicativo descrito en la Definición 3.1.1. En el caso en que la matriz Ψ es diagonal, el canal de comunicación si es paralelo.

3.2. Planteamiento del problema

La sección anterior nos permite describir sistemas, en los cuales se extrae al canal de comunicación del lazo de control generalizado, para estudiarlo en detalle. Este canal comunica a un subsistema que corresponde a N en la Fig. 2.3, y es descrito en (3.1.1). Se usa esta representación para describir el sistema comunicado a través de canales con ruido multiplicativo. Note que este sistema posee características no lineales. Adicionalmente, proponemos un sistema alternativo, el cual comunica el mismo subsistema N , pero lo hace a través de canales de comunicación con ruido aditivo. Su ventaja es que posee características lineales.

En la Fig. 3.4 se ilustra el NCS comunicado a través de canales con ruido multiplicativo usando diagramas de bloques. A continuación se describen sus variables de estados.

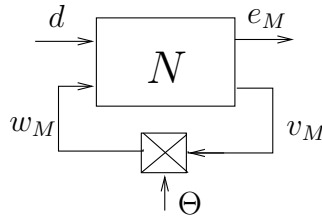


Figura 3.4. Sistema N con realimentación a través de canales paralelos con ruido multiplicativo.

$$\begin{bmatrix} x_M(k+1) \\ e_M(k) \\ v_M(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_d & B_w \\ C_e & D_{de} & D_{we} \\ C_v & D_{dv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M(k) \\ d(k) \\ w_M(k) \end{bmatrix}. \quad (3.2.1)$$

En la Fig. 3.5 se ilustra el NCS comunicado a través de canales con ruido aditivo usando diagramas de bloques. A continuación se describen sus variables de estados.

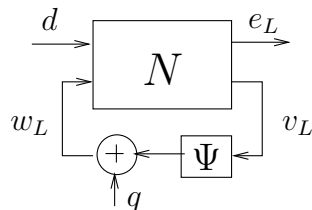


Figura 3.5. Sistema N con realimentación a través de canal con ruido aditivo.

$$\begin{bmatrix} x_L(k+1) \\ e_L(k) \\ v_L(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_d & B_w \\ C_e & D_{de} & D_{we} \\ C_v & D_{dv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L(k) \\ d(k) \\ w_L(k) \end{bmatrix}. \quad (3.2.2)$$

El propósito de este esquema alternativo es estudiar el NCS de la Fig. 3.4 a través del NCS de la Fig. 3.5.

Es importante destacar que, aunque las Fig 3.4 y 3.5 consideran el mismo sistema N , las señales de desempeño, de entrada y salida al canal no son las mismas. Particularmente, sus estadísticas son distintas. Este hecho nos lleva a preguntarnos cuáles son las condiciones que debe cumplir el NCS alternativo para relacionar ambos NCS, y así aprovechar las ventajas de la versión lineal.

El primer objetivo es, por lo tanto, relacionar las estadísticas de segundo orden de las señales comunes entre el sistema de control con canal con desvanecimiento de la Fig. 3.4, y el sistema de control con canal con ruido aditivo de la Fig. 3.5. La relación estadística se realiza entre las señales de desempeño e_M y e_L , los estados x_M y x_L , las entradas al canal v_M y v_L , y las salidas del canal w_M y w_L .

Una vez obtenida la relación estadística y las condiciones para su validez, el objetivo es utilizarla para estudiar la estabilidad del NCS con canal con desvanecimiento, a través del NCS con canal con ruido aditivo. Para el primer sistema, ruido multiplicativo agrega no linealidad, dificultando su análisis. En cambio, el sistema con ruido aditivo es LTI, lo que permite usar las herramientas lineales para estudiar, por ejemplo, la estabilidad. En particular, se pretende explotar la estabilidad en sentido cuadrático medio, que relaciona estabilidad con las estadísticas de segundo orden de los sistemas.

EQUIVALENCIA ESPECTRAL

Este capítulo presenta una relación entre los segundos momentos entre el estado del sistema afectado por ruido multiplicativo correlacionado espacialmente, y el estado del sistema afectado por ruido aditivo. Se extiende la relación a otras señales de interés, como la entrada y salida del canal, y la señal de desempeño en cada caso.

4.1. Análisis del sistema con canal multiplicativo

El objetivo de esta sección es proponer una expresión para los momentos del estado x_M del sistema N , y los momentos de la señal de desempeño $e_M(k)$ descritas en (3.2.1).

Lema 4.1.1. *Sea $\Delta_1 = A + B_w \Upsilon C_v$ y $\Delta_2 = B_d + B_w \Upsilon D_{dv}$ matrices constantes. El estado del sistema N definido en (3.2.1), bajo los supuestos descritos en esa sección, es tal que su media viene dada por:*

$$\mu_{x_M}(k+1) = \Delta_1 \mu_{x_M}(k) + \Delta_2 \mu_d, \quad (4.1.1)$$

su matriz de covarianza viene dada por:

$$P_{x_M}(k+1) = \Delta_1 P_{x_M}(k) \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w H(k) B_w^\top, \quad (4.1.2)$$

con

$$\begin{aligned} H(k) = & P_\theta \odot \left(C_v P_{x_M}(k) C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top \right) \\ & + (C_v \mu_{x_M}(k) + D_{dv} \mu_d) (C_v \mu_{x_M}(k) + D_{dv} \mu_d)^\top \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

y su función de autocovarianza viene dada por:

$$R_{x_M}(k+\tau, k) = \Delta_1^\tau P_{x_M}(k). \quad (4.1.4)$$

■

Demostración. *Primero, es conveniente notar de (3.1.1) que el estado del sistema se puede escribir recursivamente¹ como*

$$x_M(k+1) = \Delta_1 x_M(k) + \Delta_2 d(k) + B_w \bar{\Theta}(k) v_M(k) \quad (4.1.5)$$

¹Recuerde la notación descrita en (2.4.1) donde $\bar{x}(k) = x(k) - \mu_x(k)$.

donde $\Delta_1 = A + B_w \Upsilon C_v$ y $\Delta_2 = B_d + B_w \Upsilon D_{dv}$ son matrices constantes. Además, dada la linealidad del operador esperanza sabemos que la media $\mu_{x_M}(k+1)$ satisface

$$\mu_{x_M}(k+1) = \Delta_1 \mu_{x_M}(k) + \Delta_2 \mu_d + B_w \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) v_M(k) \}. \quad (4.1.6)$$

Dadas las suposiciones del problema, es claro que para un mismo instante k , el ruido $\Theta(k)$ es independiente de $v_M(k)$, y por lo tanto $\mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) v_M(k) \} = \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) \} \mathcal{E} \{ v_M(k) \} = 0$. Esto completa la demostración para la media.

Para la matriz de covarianza $P_{x_M}(k+1)$, primero notamos que de (4.1.1) y (4.1.5) es directo concluir que

$$\bar{x}_M(k+1) = \Delta_1 \bar{x}_M(k) + \Delta_2 \bar{d}(k) + B_w \bar{\Theta}(k) v_M(k). \quad (4.1.7)$$

Para obtener $P_{x_M}(k+1) = \mathcal{E} \{ \bar{x}_M(k+1) \bar{x}_M(k+1)^\top \}$ se requiere calcular la esperanza de cada término de (4.1.7) multiplicado por los mismos términos transpuestos. En dicho cálculo aparecen una serie de términos cruzados de los cuales, dadas las suposiciones del problema, son términos nulos. De hecho, dado que $d(k)$ es un proceso blanco, independiente de $\Theta(i)$, $\forall i$, y no correlacionado con la condición inicial, es posible demostrar que $\mathcal{E} \{ \bar{x}_M(k) \bar{d}(k) \} = 0$. Además, dada las suposiciones respecto de Θ , y considerando que $\mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) \} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) v_M(k) \bar{x}_M(k)^\top \} &= \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) \} \mathcal{E} \{ v_M(k) \bar{x}_M(k)^\top \} = 0, \\ \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) v_M(k) \bar{d}(k)^\top \} &= \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) \} \mathcal{E} \{ v_M(k) \bar{d}(k)^\top \} = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior, y el desarrollo de $\mathcal{E} \{ \bar{x}_M(k+1) \bar{x}_M(k+1)^\top \}$, nos permite concluir

$$\begin{aligned} P_{x_M}(k+1) &= \Delta_1 P_{x_M}(k) \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) \mathcal{E} \{ v_M(k) v_M(k)^\top \} \bar{\Theta}(k)^\top \} B_w^\top \\ &= \Delta_1 P_{x_M}(k) \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w \mathcal{E} \{ \bar{\Theta}(k) Q_v(k) \bar{\Theta}(k)^\top \} B_w^\top \\ &= \Delta_1 P_{x_M}(k) \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w (P_\theta \odot [P_{v_M}(k) + \mu_{v_M}(k) \mu_{v_M}(k)^\top]) B_w^\top, \end{aligned}$$

donde la media de $v_M(k)$ viene dada por

$$\mu_{v_M}(k) = \mathcal{E} \{ C_v x_M(k) + D_{dv} d(k) \} = C_v \mu_{x_M}(k) + D_{dv} \mu_d$$

y su matriz de covarianza por

$$\begin{aligned} P_{v_M}(k) &= \mathcal{E} \{ \bar{v}_M(k) \bar{v}_M(k)^\top \} \\ &= \mathcal{E} \{ (C_v \bar{x}_M(k) + D_{dv} \bar{v}_M(k)) (C_v \bar{x}_M(k) + D_{dv} \bar{v}_M(k))^\top \} \\ &= C_v P_{x_M}(k) C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Luego, definiendo $H(k) = P_{v_M}(k) + \mu_{v_M}(k) \mu_{v_M}(k)^\top$ y sustituyendo $P_{v_M}(k)$ y $\mu_{v_M}(k)$ se obtiene (4.1.2) y (4.1.3).

Por otro lado, utilizando (4.1.7) y la definición de función de covarianza se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{x_M}(k+\tau+1, k) &= \mathcal{E} \{ \bar{x}_M(k+\tau+1) \bar{x}_M(k)^\top \} \\ &= \mathcal{E} \{ [\Delta_1 \bar{x}_M(k+\tau) + \Delta_2 \bar{d}(k+\tau) + B_w \bar{\Theta}(k+\tau) v_M(k+\tau)] \bar{x}_M(k)^\top \} \\ &= \Delta_1 R_{x_M}(k+\tau, k) \\ &= \Delta_1^{\tau+1} P_{x_M}(k) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

donde se utilizó el hecho que $\mathcal{E}\{\bar{d}(k+\tau)\bar{x}_M(k)^\top\} = 0$ y $\mathcal{E}\{\bar{\Theta}(k+\tau)v_M(k+\tau)\bar{x}_M(k)^\top\} = 0$. ■

Este lema caracteriza los primeros y segundos momentos del estado $x_M(k)$ de forma recursiva. Es importante notar que la covarianza involucra al producto de Hadamard entre la varianza del ruido y el segundo momento de la entrada del canal, haciendo a la expresión no lineal.

El hecho de que el sistema N sea lineal implica que los momentos de las otras señales del lazo se puedan escribir en función de los momentos del estado. Esto se puede generalizar a través de la señal de desempeño $e_M(k)$.

Corolario 4.1.1. *Defínase las matrices $\Delta_3 = C_e + D_{we}\Upsilon C_v$ y $\Delta_4 = D_{de} + D_{we}\Upsilon D_{dv}$, ambas constantes. La señal de desempeño $e_M(k)$ del sistema N definido en (3.1.1), bajo los supuestos ahí descritos, es tal que su media viene dada por*

$$\mu_{e_M}(k) = \Delta_3\mu_{x_M}(k) + \Delta_4\mu_d \quad (4.1.10)$$

su matriz de covarianza viene dada por

$$P_{e_M}(k) = \Delta_3 P_{x_M}(k) \Delta_3^\top + \Delta_4 P_d \Delta_4^\top + D_{we} H(k) D_{we}^\top \quad (4.1.11)$$

y su función de autocovarianza viene dada por:

$$R_{e_M}(k+\tau, k) = \Delta_3 \Delta_1^\tau P_{x_M}(k) \Delta_3^\top + \Delta_3 \Delta_1^{\tau-1} [\Delta_2 P_d \Delta_4^\top + B_w H(k) D_{we}^\top] \quad (4.1.12)$$

donde $P_{x_M}(k)$ y $H(k)$ están dados en el Lema 1. ■

Demostración. *Primero notamos que podemos escribir $e_M(k)$ como*

$$e_M(k) = \Delta_3 x_M(k) + \Delta_4 d(k) + D_{we} \bar{\Theta}(k) v_M(k) \quad (4.1.13)$$

con $\Delta_3 = C_e + D_{we}\Upsilon C_v$ y $\Delta_4 = D_{de} + D_{we}\Upsilon D_{dv}$. Aplicando el operador esperanza a (4.1.13), y notando que $\mathcal{E}\{\bar{\Theta}(k)v_M(k)\} = 0$, se obtiene directamente (4.1.10). Para calcular la matriz de covarianza $P_{e_M}(k)$ primero notamos que, de (4.1.13) y (4.1.10), podemos escribir

$$\bar{e}_M(k) = \Delta_3 \bar{x}_M(k) + \Delta_4 \bar{d}(k) + D_{we} \bar{\Theta}(k) v_M(k) \quad (4.1.14)$$

Es claro que $\bar{e}_M(k)$ en (4.1.14) tiene la misma estructura que $\bar{x}_M(k+1)$ en (4.1.7), siendo distintas sólo las matrices constantes que acompañan. Lo anterior implica que para el cálculo de $P_{e_M}(k)$ podemos aplicar el mismo procedimiento y propiedades utilizadas para la obtención de $P_{x_M}(k+1)$ en la demostración del Lema 4.1.1. Esto permite concluir (4.1.11) de forma directa.

Por otro lado, considerando los supuestos sobre $x_M(0)$, $d(k)$ y $\theta(k)$, se tiene que la función de autocovarianza de $e_M(k)$ satisface

$$\begin{aligned} R_{e_M}(k+\tau, k) &= \mathcal{E}\{\bar{e}_M(k+\tau)\bar{e}_M(k)^\top\} \\ &= \mathcal{E}\{[\Delta_3 \bar{x}_M(k+\tau) + \Delta_4 \bar{d}(k+\tau) + D_{we} \bar{\Theta}(k+\tau)v_M(k+\tau)] \bar{e}_M(k)^\top\} \\ &= \Delta_3 \mathcal{E}\{\bar{x}_M(k+\tau)\bar{e}_M(k)^\top\}. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Además, usando recursivamente (4.1.7) podemos escribir

$$\begin{aligned}\bar{x}_M(k + \tau) &= \Delta_1^\tau \bar{x}_M(k) + \sum_{i=1}^{\tau} \Delta_1^{i-1} \Delta_2 \bar{d}(k + \tau - i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tau} \Delta_1^{i-1} B_w \bar{\Theta}(k + \tau - i) v_M(k + \tau - i)\end{aligned}\quad (4.1.16)$$

Al utilizar (4.1.16) y (4.1.14) para expandir el producto dentro de la esperanza del último término en (4.1.15), se obtienen muchos elementos cruzados que se anulan al calcular su esperanza debido a las suposiciones hechas sobre $x_M(0)$, $d(k)$ y $\theta(k)$. Así, finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}R_{e_M}(k + \tau, k) &= \Delta_3 \mathcal{E} \{ \bar{x}_M(k + \tau) \bar{e}_M(k)^\top \} \\ &= \Delta_3 \mathcal{E} \{ \Delta_1^\tau \bar{x}_M(k) \bar{x}_M(k)^\top \Delta_3^\top \} + \Delta_3 \mathcal{E} \{ \Delta_1^{\tau-1} \Delta_2 \bar{d}(k) \bar{d}(k)^\top \Delta_4^\top \} \\ &\quad + \Delta_3 \mathcal{E} \{ \Delta_1^{\tau-1} B_w \bar{\Theta}(k) v_M(k) v_M(k)^\top \bar{\Theta}(k)^\top D_{we}^\top \}\end{aligned}$$

de donde se obtiene directamente (4.1.12). ■

Corolario 4.1.1 caracteriza los momentos de la señal de desempeño $e_M(k)$ en función de los primeros y segundos momentos del estado y la perturbación de entrada. Es importante recordar que $e_M(k)$ es una señal de desempeño arbitraria, por lo tanto este resultado permite conocer los momentos de cualquier combinación lineal del estado del sistema, y su entrada.

4.2. Análisis del sistema con canal con ganancia y ruido aditivo

Análogo a la sección anterior, en esta sección se buscar obtener expresiones para los momentos del estado $x_L(k)$ y de la señal de desempeño $e_L(k)$ descritas en (3.2.2)

Lema 4.2.1. Sean $\Lambda_1 \triangleq A + B_w \Psi C_v$ y $\Lambda_2 \triangleq B_d + B_w \Psi D_{dv}$ matrices constantes. El estado $x_L(k + 1)$ del sistema N definido en (3.1.1), bajo los supuestos ahí descritos, es tal que su media viene dada por:

$$\mu_{x_L}(k + 1) = \Lambda_1 \mu_{x_L}(k) + \Lambda_2 \mu_d + B_w \mu_q(k), \quad (4.2.1)$$

la matriz de covarianza de $x_L(k + 1)$ viene dada por

$$P_{x_L}(k + 1) = \Lambda_1 P_{x_L}(k) \Lambda_1^\top + \Lambda_2 P_d \Lambda_2^\top + B_w P_q(k) B_w^\top, \quad (4.2.2)$$

y la función de autocovarianza de $x_L(k)$ viene dada por:

$$R_{x_L}(k + \tau, k) = \Lambda_1^\tau P_{x_L}(k) \quad (4.2.3)$$

■

Demostración. Reescribiendo el estado $x_L(k + 1)$ en (3.1.1) considerando la dinámica del canal aditivo se tiene que

$$\begin{aligned}x_L(k + 1) &= A x_L(k) + B_d d(k) + B_w (q(k) + \Psi [C_v x_L(k) + D_{dv} d(k)]) \\ &= \Lambda_1 x_L(k) + \Lambda_2 d(k) + B_w q(k).\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

Al aplicar el operador esperanza a (4.2.4) se obtiene directamente

$$\mu_{x_L}(k+1) = \Lambda_1 \mu_x(k) + \Lambda_2 \mu_d + B_w \mu_q(k). \quad (4.2.5)$$

Además, de (4.2.4) y (4.2.5) es claro que

$$\bar{x}_L(k+1) = \Lambda_1 \bar{x}_L(k) + \Lambda_2 \bar{d}(k) + B_w \bar{q}(k), \quad (4.2.6)$$

La matriz de covarianza se obtiene desarrollando

$$\begin{aligned} P_{x_L}(k+1) &= \mathcal{E} \{ [\Lambda_1 \bar{x}_L(k) + \Lambda_2 \bar{d}(k) + B_w \bar{q}(k)] [\Lambda_1 \bar{x}_L(k) + \Lambda_2 \bar{d}(k) + B_w \bar{q}(k)]^\top \} \\ &= \Lambda_1 P_{x_L}(k) \Lambda_1^\top + B_w P_d B_w^\top + \Lambda_2 P_q(k) \Lambda_2^\top \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde se explotó el hecho que, dadas las suposiciones del problema, $\mathcal{E} \{ \bar{x}(k) \bar{q}_L(k)^\top \} = 0$, $\mathcal{E} \{ \bar{x}(k) \bar{d}(k)^\top \} = 0$ y $\mathcal{E} \{ \bar{q}(k) \bar{d}(k)^\top \} = 0$.

Finalmente, utilizando la definición de función de covarianza y (4.2.6), se tiene que

$$\begin{aligned} R_{x_L}(k+\tau+1, k) &= \mathcal{E} \{ \bar{x}_L(k+\tau+1) \bar{x}_L^\top(k) \} \\ &= \mathcal{E} \{ [\Lambda_1 \bar{x}_L(k+\tau) + \Lambda_2 \bar{d}(k+\tau) + B_w \bar{q}(k+\tau)] \bar{x}_L^\top(k) \} \\ &= \Lambda_1 R_{x_L}(k+\tau, k) \\ &= \Lambda_1^\tau P_{x_L}(k) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

donde se usó el hecho que, $\forall \tau > 0$, $\mathcal{E} \{ \bar{d}(k+\tau) \bar{x}_L(k)^\top \} = 0$ y $\mathcal{E} \{ \bar{q}(k+\tau) \bar{x}_L(k)^\top \} = 0$. ■

Lema 4.2.1 caracteriza los momentos del estado $x_L(k)$ de forma recursiva. Para la matriz de la covarianza, a diferencia del caso con canal multiplicativo, sí se cumple la propiedad de linealidad respecto de la matriz de varianza del ruido y del estado. Esto ayuda considerablemente al análisis de este tipo de sistemas.

Corolario 4.2.1. Defínase las matrices $\Lambda_3 = C_e + D_{we} \Psi C_v$ y $\Lambda_4 = D_{de} + D_{we} \Psi C_v$, ambas constantes. La señal de desempeño $e_L(k)$ del sistema N definido en (3.1.1), bajo los supuestos descritos en esa sección, es tal que su media viene dada por

$$\mu_{e_L}(k) = \Lambda_3 \mu_{x_L}(k) + \Lambda_4 \mu_d + D_{we} \mu_q(k) \quad (4.2.9)$$

su matriz de covarianza de $e_L(k)$ viene dada por

$$P_{e_L}(k) = \Lambda_3 P_{x_L}(k) \Lambda_3^\top + \Delta_4 P_d \Lambda_4^\top + D_{we} P_q(k) D_{we}^\top \quad (4.2.10)$$

y su función de autocovarianza de $e_L(k)$ viene dada por

$$R_{e_L}(k+\tau, k) = \Lambda_3 \Lambda_3^\tau P_{x_L}(k) \Lambda_3^\top + \Lambda_3 \Lambda_3^{\tau-1} [\Lambda_2 P_d \Lambda_4^\top + B_w P_q(k) D_{we}^\top] \quad (4.2.11)$$

■

Demostración. Cómo la señal de desempeño es una combinación lineal del estado, los resultados se obtienen directamente explotando los resultados en Lema 4.1.1, y por lo tanto los detalles son omitidos. ■

El corolario 4.2.1 muestra expresiones para los momentos de la señal de desempeño como combinaciones lineales de los momentos del estado, del ruido del canal, y de la entrada.

4.3. Condiciones para equivalencia

En esta sección se comparan los momentos descritos en la sección 4.1 con los correspondientes momentos de la sección 4.2, y se presentan condiciones para que dichos momentos sean idénticos para todo instante $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3.1. *Considere los resultados obtenidos en las secciones 4.1 y 4.2. Suponga además que $\mu_{x_M}(0) = \mu_{x_L}(0)$, $P_{x_M}(0) = P_{x_L}(0)$, y que $\Psi = \Upsilon$. Si el ruido q es tal que $\mu_q(k) = 0$, $\forall k$, y tal que*

$$P_q(k) = P_\theta \odot \left(C_v P_{x_L}(k) C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top \right. \\ \left. + (C_v \mu_{x_L}(k) + D_{dv} \mu_d) (C_v \mu_{x_L}(k) + D_{dv} \mu_d)^\top \right), \quad (4.3.1)$$

entonces, para todo instante $k \in \mathbb{N}_0$, se cumple que

$$\begin{aligned} \mu_{x_M}(k) &= \mu_{x_L}(k), & P_{x_M}(k) &= P_{x_L}(k), & R_{x_M}(k + \tau, k) &= R_{x_L}(k + \tau, k), \\ \mu_{e_M}(k) &= \mu_{e_L}(k), & P_{e_M}(k) &= P_{e_L}(k), & R_{e_M}(k + \tau, k) &= R_{e_L}(k + \tau, k). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Demostración. *Primero notamos que si $\Psi = \Upsilon$, entonces por construcción $\Lambda_i = \Delta_i$, para $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Esto implica que, al comparar la recursión para la media del estado en (4.1.1) con (4.2.1) es claro que, si $\mu_q(k) = 0$, $\forall k$, y además $\mu_{x_M}(0) = \mu_{x_L}(0)$, las media de los estados evolucionarán de la misma forma. Como consecuencia, lo mismo ocurrirá con la media de la señal de desempeño dadas en (4.1.10) y (4.2.9).*

Para el caso de las matrices de covarianza del estado, primero comparamos (4.1.2) con (4.2.2) y notamos que, dado que $\Lambda_i = \Delta_i$, para $i = \{1, 2, 3, 4\}$ y $P_{x_M}(0) = P_{x_L}(0)$, las matrices de covarianza del estado evolucionarán de forma idéntica si $P_q(k) = H(k)$, donde $H(k)$ está definido en (4.1.3). Ahora bien, en ese caso se cumple que $P_{x_M}(k) = P_{x_L}(k)$, y por lo tanto podemos usar dicha igualdad y reemplazar $P_{x_M}(k)$ en (4.1.3) por $P_{x_L}(k)$, lo que conduce a (4.3.1). Si se cumple dicha condición, entonces también se cumple que $P_{e_M}(k) = P_{e_L}(k)$, pues es directo de (4.1.11) y (4.2.10).

Los mismos requerimientos anteriores bastan para que las funciones de autocovarianza del estado (4.1.4) y (4.2.3) sean idénticas, pues esto se cumple si $P_{x_M}(k) = P_{x_L}(k)$ y $\Lambda_1 = \Delta_1$. De la misma forma, dichas condiciones garantizan que las funciones de autocovarianza de la señal de desempeño son idénticas, lo que se concluye directamente al comparar (4.1.12) con (4.2.11). ■

El Teorema 4.3.1 presenta condiciones en las cuáles los sistemas realimentados a través de los canales de ruido correlacionado multiplicativo y aditivo presentados en la Sección 3.1 presentan los mismos momentos tanto para el estado como para la señal de desempeño, extendiendo así los resultados presentados en [22] para el caso de ruidos correlacionados. Para que se cumpla dicha equivalencia, las condiciones iniciales para las medias y covarianzas del estado deben ser iguales, la ganancia del canal aditivo debe ser igual a la matriz de medias Υ , el ruido del canal aditivo debe ser tal que su media sea cero y su matriz de covarianza cumpla la igualdad en (4.3.1).

Observación 4.3.1. *Es importante notar que la condición en (4.3.1) depende tanto de la media del estado, como de la matriz de covarianza del estado, la cual a su vez también*

depende de la matriz de covarianza del ruido q en instantes anteriores (ver (4.2.2)). Esta condición no se satisface de forma trivial, lo que indica que la equivalencia para los sistemas realimentados a través de los canales de ruido correlacionado multiplicativo y aditivo difícilmente se dará de forma natural. Por el contrario, para poder usar esta equivalencia, lo razonable es considerar al sistema con ruido aditivo como un sistema artificial, en el cual se pueden escoger las estadísticas del ruido, las condiciones iniciales, y la ganancia de canal, y de esa forma modelar las estadísticas del sistema realimentado con canal multiplicativo. La dificultad radica en satisfacer la restricción sobre la matriz de covarianza del ruido aditivo.

El resultado en el Teorema 4.3.1 permite abordar algunos problemas de control que consideran canales de ruido multiplicativo correlacionado, como por ejemplo minimizar la varianza de la salida o la varianza del error, reescribiéndolo como un problema equivalente en donde se utiliza un ruido aditivo ficticio, que satisface los requerimientos para la equivalencia. Este resultado también permite estudiar la estabilidad de dichos sistemas, pues la equivalencia propuesta es válida para todo instante k , incluyendo el caso cuando $k \rightarrow \infty$. Este hecho se aborda con más detalle en el capítulo siguiente.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En este capítulo se estudia la estabilidad de sistemas de control sobre redes comunicados a través de canales ruidosos. En particular, se analizan los dos tipos de canales estudiados previamente: uno con ruido multiplicativo, y otro con ruido aditivo. Primero, estudiaremos la convergencia de los momentos del estado del sistema para cada caso de canal, y sin considerar la equivalencia espectral demostrada en el Teorema 4.3.1. Luego, al utilizar la equivalencia resultado de dicho teorema, se demuestra una relación directa entre la estabilidad MSS para el sistema con canal con ruido multiplicativo, y la estabilidad interna del NCS con canal con ruido aditivo. Condiciones explícitas para la estabilidad en términos de las estadísticas del ruido multiplicativo no son presentadas. Sin embargo, los resultados logran demostrar que existe una influencia importante de canal multiplicativo sobre la estabilidad del NCS.

5.1. Estadísticas estacionarias

Ya que los estados x_M y x_L rigen la dinámica del lazo cerrado, estudiamos la estabilidad de los NCS propuestos a través su comportamiento estocástico. Para un primer análisis, relajamos el problema considerando que los estados x_M y x_L son a-wss.

5.1.1. Estadísticas estacionarias para caso con ruido multiplicativo

En esta sección nos enfocamos en analizar los estados estacionarios de los primeros y segundos momentos del estado x_M . Primero supondremos que el estado x_M es a-wss, para luego estudiar la naturaleza de las soluciones de su media y covarianza estacionarias, y cómo la existencia de estas estadísticas se relaciona con las características del sistema N y del ruido multiplicativo θ .

Denotaremos los estados estacionarios de las variables x_M y e_M como

$$\begin{aligned}\mu_{x_M} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{x_M}(k), & \mu_{e_M} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{e_M}(k) \\ P_{x_M} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{x_M}(k), & P_{e_M} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{e_M}(k),\end{aligned}$$

Corolario 5.1.1. *Suponga que el sistema de la Fig. 2.3 de canal con ruido multiplicativo es tal que el estado x_M y la señal de desempeño e_M son a-wss. Entonces, el estado x_M*

satisface

$$\mu_{x_M} = \Delta_1 \mu_{x_M} + \Delta_2 \mu_d, \quad (5.1.1)$$

$$P_{x_M} = \Delta_1 P_{x_M} \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w H B_w^\top \quad (5.1.2)$$

$$R_{x_M}(\tau) = \Delta_1^\tau P_{x_M} \quad (5.1.3)$$

La señal de desempeño e_M satisface

$$\mu_{e_M} = \Delta_3 \mu_{x_M} + \Delta_4 \mu_d \quad (5.1.4)$$

$$P_{e_M} = \Delta_3 P_{x_M} \Delta_3^\top + \Delta_4 P_d \Delta_4^\top + D_{we} H D_{we}^\top \quad (5.1.5)$$

$$R_{e_M}(\tau) = \Delta_3 \Delta_1^\tau P_{x_M} \Delta_3^\top + \Delta_3 \Delta_1^{\tau-1} [\Delta_2 P_d \Delta_4^\top + B_w H D_{we}^\top] \quad (5.1.6)$$

con

$$H = P_\theta \odot \left(C_v P_{x_M} C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top + (C_v \mu_{x_M} + D_{dv} \mu_d) (C_v \mu_{x_M} + D_{dv} \mu_d)^\top \right)$$

Demostración. Si x_M es a -wss, entonces su media y covarianza convergen a valores estacionarios, por ejemplo $\mu_{x_M}(k) = \mu_{x_M}(k+1) = \mu_{x_M}$. Si consideramos este hecho junto con el Lema 4.1.1, obtenemos directamente (5.1.1), (5.1.2) y (5.1.3). Como e_M es combinación lineal, también es a -wss. Así, obtenemos directamente (5.1.4), (5.1.5) y (5.1.6). Observando (5.1.3) y (5.1.6) se verifica la suposición de a -wss, ya que ambas funciones de covarianza para x_M y e_M dependen solo de desplazamiento τ cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Nota 5.1.1. Cabe mencionar que, en el Corolario 5.1.1 suponemos que el sistema es tal que x_M es a -wss, pero no indicamos cuáles son esas condiciones pues no es evidente. Para relajar el problema suponemos que estas condiciones se cumplen, incluso sin conocerlas.

Análisis sobre condiciones de convergencia

Aunque x_M, e_M cumplan con el Lema 4.1.1 y el Corolario 4.1.1, no necesariamente existe el estado estacionario de sus momentos. Considere que, las ecuaciones recursivas en estos lemas y corolarios exigen condiciones para que las estadísticas converjan, las cuales no son evidentes. A continuación, procedemos a estudiar la existencia de soluciones del estado estacionario de los momentos de x_M para dar luces sobre dichas condiciones de convergencia.

Note que si μ_{x_M} existe, satisface

$$\mu_{x_M} = (I - \Delta_1)^{-1} \Delta_2 \mu_d \quad (5.1.7)$$

Una condición necesaria para la convergencia de μ_{x_M} es

$$\rho(\Delta_1) < 1, \text{ donde } \Delta_1 = A + B_w \Upsilon C_v \text{ y } \Upsilon = \text{diag}(\mu_\theta) \quad (5.1.8)$$

En (5.1.8) podemos ver cómo la convergencia de μ_{x_M} depende de las matrices de estado del sistema N y el ruido multiplicativo θ , en particular de μ_θ . Note que la convergencia de μ_{x_M} se ven afectada por el ruido multiplicativo solo a través de su media μ_θ , y no su covarianza P_θ .

Las señales e_M y v_M son combinación lineal de x_M . Esto también se cumple para sus medias. Por lo tanto si μ_{x_M} converge, entonces μ_{v_M}, μ_{e_M} también y satisfacen

$$\mu_{v_M} = [C_v (I - \Delta_1)^{-1} \Delta_2 + D_{dv}] \mu_d, \quad \mu_{e_M} = [\Delta_3 (I - \Delta_1)^{-1} \Delta_2 + \Delta_4] \mu_d.$$

Por otro lado, si analizamos P_{x_M} , (5.1.2) pareciera corresponder a una ecuación de Lyapunov, como sería de esperar para el caso de ruido aditivo. En ese caso conoceríamos las condiciones de convergencia. Pero el elemento H depende de P_{x_M} e involucra un producto de Hadamard entre la covarianza del ruido multiplicativo P_θ con Q_v (el segundo momento de v), transformando a (5.1.2) en una ecuación más compleja. A diferencia de μ_{x_M} , en este escenario no es trivial encontrar las condiciones de convergencia para P_{x_M} , consiguiendo que (5.1.2) tenga solución, y en consecuencia que las señales x_M y e_M puedan ser a-wss.

A continuación, se intenta proponer una expresión explícita para P_{x_M} , obteniendo expresiones intermedias que ilustra la dificultad del desarrollo y dan luces sobre las condiciones de convergencia. Para ello usaremos el operador $vec(\cdot)$.

Considere $X_M \triangleq vec(P_{x_M})$, $D \triangleq vec(P_d)$, $\Upsilon = diag(\mu_\theta)$, $\mu_{v_M} \triangleq C_v \mu_{x_M} + D_{dv} \mu_d$, $S \triangleq vec(D_{dv} P_d D_{dv}^T + \mu_{v_M} \mu_{v_M}^T)$. Entonces aplicando $vec(\cdot)$ a (5.1.2), utilizando la Proposición 7.1.9 de [4] y organizando, se tiene

$$X_M = \Delta_1 \otimes \Delta_1 X_M + \Delta_2 \otimes \Delta_2 D + B_w \otimes B_w vec(P_\theta \odot (C_v P_{x_M} C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^T + \mu_{v_M} \mu_{v_M}^T))$$

Usando la distributividad de $vec(\cdot)$ sobre el producto de Hadamard

$$X_M = \Delta_1 \otimes \Delta_1 X_M + \Delta_2 \otimes \Delta_2 D + B_w \otimes B_w (vec(P_\theta) \odot [vec(C_v P_{x_M} C_v^\top) + S])$$

Note que $v_1 \odot v_2 = diag(v_1) v_2$, con v_1, v_2 vectores columna (Hecho 7.6.3 de [4]). Con esta propiedad obtenemos

$$X_M = \Delta_1 \otimes \Delta_1 X_M + \Delta_2 \otimes \Delta_2 D + B_w \otimes B_w diag(vec(P_\theta)) [C_v \otimes C_v X_M + S]$$

Considerando la descomposición ¹ $B_w = [B_1 \ \cdots \ B_\ell]^\top$, $C_v = [C_1^\top \ \cdots \ C_\ell^\top]^\top$ y $\sigma_{i,j} \triangleq P_{\theta_{i,j}}$ notamos que [41]

$$B_w \otimes B_w diag(vec(P_\theta)) C_v \otimes C_v = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sigma_{i,j} (B_i C_i) \otimes (B_j C_j) = Z$$

Sea $\Delta_v \triangleq \Delta_1 \otimes \Delta_1 + Z$ obtenemos

$$X_M = [I - \Delta_v]^{-1} (\Delta_2 \otimes \Delta_2 D + B_w \otimes B_w diag(vec(P_\theta)) S) \quad (5.1.9)$$

Para que (5.1.9) tenga solución única se debe cumplir

$$\rho(\Delta_v) < 1. \quad (5.1.10)$$

Cabe mencionar que no es claro cómo demostrar si la condición en (5.1.10) es más restrictiva que (5.1.8). Tampoco se encontró una forma de continuar el desarrollo de (5.1.10), y con ello demostrar cuál es la condición de convergencia más general. De todas formas, esta condición indica que existe una relación entre los primeros y segundos momentos de θ , y la convergencia de los primeros y segundos momentos de x_M .

Nota 5.1.2. La señal e_M , descrita en el Corolario 4.1.1, es combinación lineal de x_M por lo que no presenta problemas de existencia ni convergencia adicionales a los que ya presenta x_M .

¹Recuerde que el ruido multiplicativo $\Theta(k)$ tiene dimensiones $\ell \times \ell$.

5.1.2. Estadísticas estacionarias para caso con ruido aditivo

En esta sección nos enfocamos en analizar los estados estacionarios de los primeros y segundos momentos del estado x_L . Primero supondremos que el estado x_L es a-wss, para luego estudiar la naturaleza de las soluciones de su media y covarianza estacionarias, y cómo la existencia de estas se relaciona con el sistema N , el ruido aditivo q y la ganancia de canal Ψ .

Denotaremos los estados estacionarios de las variables x_L y e_L como

$$\begin{aligned}\mu_{x_L} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{x_L}(k), & \mu_{e_L} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{e_L}(k), \\ P_{x_L} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{x_L}(k), & P_{e_L} &\triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{e_L}(k),\end{aligned}$$

Corolario 5.1.2. *Suponga que el sistema de la Fig. 2.3 de canal con ruido aditivo es tal que el estado x_L y la señal de desempeño e_L son a-wss. Entonces, el estado x_L satisface*

$$\mu_{x_L} = \Lambda_1 \mu_{x_L} + \Lambda_2 \mu_d \quad (5.1.11)$$

$$P_{x_L} = \Lambda_1 P_{x_L} \Lambda_1^\top + \Lambda_2 P_d \Lambda_2^\top + B_w P_q B_w^\top \quad (5.1.12)$$

$$R_{x_L}(\tau) = \Lambda_1^\tau P_{x_L} \quad (5.1.13)$$

La señal de desempeño e_L satisface

$$\mu_{e_L} = \Lambda_3 \mu_{x_L} + \Lambda_4 \mu_d \quad (5.1.14)$$

$$P_{e_L} = \Lambda_3 P_{x_L} \Lambda_3^\top + \Lambda_4 P_d \Lambda_4^\top + D_{we} P_q D_{we}^\top \quad (5.1.15)$$

$$R_{e_L}(\tau) = \Lambda_3 \Lambda_1^\tau P_{x_L} \Lambda_3^\top + \Lambda_3 \Lambda_1^{\tau-1} [\Lambda_2 P_d \Lambda_4^\top + B_w P_q D_{we}^\top] \quad (5.1.16)$$

Demostración. Si x_L es a-wss, entonces su media y covarianza convergen a valores estacionarios, por ejemplo $\mu_{x_L}(k) = \mu_{x_L}(k+1) = \mu_{x_L}$. Si consideramos este hecho junto con el Lema 4.2.1, obtenemos directamente (5.1.11), (5.1.12) y (5.1.13). Como e_L es combinación lineal, también es a-wss. Así, obtenemos directamente (5.1.14), (5.1.15) y (5.1.16). Observando (5.1.13) y (5.1.16) se verifica la suposición de a-wss, ya que ambas funciones de covarianza para x_L y e_L dependen solo de desplazamiento τ cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Análisis sobre condiciones de convergencia

De forma similar a la sección 5.1.1, para el NCS con canal con ruido aditivo, no basta con que x_L, e_L cumplan con el Lema 4.1.1 y el Corolario 4.1.1, para que exista el estado estacionario de sus momentos. A continuación, procedemos a estudiar la existencia de soluciones del estado estacionario de los momentos de x_L para dar luces sobre las condiciones de convergencia de sus momentos.

Note que si μ_{x_L} existe, entonces satisface

$$\mu_{x_L} = (I - \Lambda_1)^{-1} \Lambda_2 \mu_d. \quad (5.1.17)$$

Para que μ_{x_L} converja se debe cumplir

$$\rho(\Lambda_1) < 1, \text{ donde } \Lambda_1 = A + B_w \Psi C_v \quad (5.1.18)$$

Recordemos que μ_{x_M} debe cumplir con $\rho(\Delta_1) < 1$, donde $\Delta_1 = A + B_w \Upsilon C_v$ y $\Upsilon = \text{diag}(\mu_\theta)$. Esta condición es muy similar a (5.1.18). La convergencia de μ_{x_L} depende de las matrices de estado del sistema N de la misma forma que en (5.1.8). Note que, a diferencia de (5.1.8), (5.1.18) no involucra a las estadísticas de su ruido de canal, q , sino sólo a la ganancia de canal, Ψ .

A diferencia del caso de P_{x_M} , (5.1.12) corresponde a una ecuación de Lyapunov (cuando no consideramos la equivalencia espectral), la cual podemos estudiar utilizando el operador $\text{vec}(\cdot)$ como sigue a continuación.

Considere $X_L \triangleq \text{vec}(P_{x_L})$, $D \triangleq \text{vec}(P_d)$, entonces aplicando $\text{vec}(\cdot)$ a (5.1.12), utilizando la Proposición 7.1.9 de [4] y organizando, se tiene

$$X_L = (\Lambda_1 \otimes \Lambda_1)X_L + (\Lambda_2 \otimes \Lambda_2)D + (B_w \otimes B_w)\text{vec}(P_q) \quad (5.1.19)$$

Para que exista X_L basta con $\rho(\Lambda_1 \otimes \Lambda_1) < 1$. Esto implica que $\rho(\Lambda_1) < 1$ [4]. Como $\Lambda_1 = A + B_w \Psi C_v$, entonces el sistema N y Ψ deben ser tal que satisfagan $\rho(\Lambda_1) < 1$. Note que, tanto μ_{x_L} y P_{x_L} exigen la misma condición de convergencia, la cual no involucra las estadísticas del ruido del canal, q . Esta es una diferencia importante respecto a la condición (5.1.8) en el caso con ruido multiplicativo.

Comparación de convergencia para ambos casos

Los corolarios 5.1.1 y 5.1.2 nos permiten analizar el estado estacionario de las medias y covarianzas de los estado x_L y x_M por separado, y con ello explorar las condiciones que deben satisfacer cada esquema para lograrlo. Al no usar la equivalencia espectral podemos comparar las diferencias de cada esquema apreciando sus ventajas y desventajas.

Para el caso con ruido aditivo, tanto μ_{x_L} como P_{x_L} presentan la condición $\rho(\Lambda_1) < 1$. Recordando que $\Lambda_1 = A + B_w \Psi C_v$, vemos cómo la estabilidad del NCS para canal con ruido aditivo depende solo de las características del sistema N y la ganancia del canal Ψ . Es importante destacar que, para este caso, la estabilidad no depende del ruido del canal, q . Esto se debe, a que los ruidos aditivos estacionarios no afectan la estabilidad MSS de sistemas LTI que cumplan con $\rho(\Lambda_1) < 1$ (ver [1], [35]).

Por otro lado, para el NCS con canal con ruido multiplicativo se imponen dos condiciones, de forma que x_M pueda ser a-wss. Para que μ_{x_M} converja, se debe cumplir que $\rho(\Delta_1) < 1$. Para que P_{x_M} converja, se debe cumplir $\rho(\Delta_v) < 1$. Luego, recordemos que

$$\Delta_1 = A + B_w \text{diag}(\mu_\theta) C_v, \quad \Delta_v = \Delta_1 \otimes \Delta_1 + Z$$

con

$$Z = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sigma_{i,j} (B_i C_i) \otimes (B_j C_j), \quad \sigma_{i,j} = P_{\theta_{i,j}}$$

$$B_w = [B_1 \quad \cdots \quad B_l], \quad C_v = [C_1^\top \quad \cdots \quad C_l^\top]^\top$$

Note que, en este caso, las condiciones (5.1.8) y (5.1.10) dependen de las estadísticas del ruido del canal, θ , a diferencia (5.1.18). Esto ocurre incluso cuando θ es estacionario, que

corresponde a nuestro caso. Esta dependencia se explica, debido a que el ruido multiplicativo se comporta como si fuera una incertidumbre estructural del sistema, es decir, como si las matrices de variables de estado del sistema fueran estocásticas. Este enfoque se utiliza para el análisis de control robusto (ver por ejemplo [10]).

Adicionalmente, observando a $\rho(\Delta_v) < 1$, pareciera ser más restrictiva que $\rho(\Delta_1) < 1$. Note que Δ_v tiene una estructura muy similar a Δ_1 , pero sus valores se ven afectados por P_θ , y además por Δ_1 . Sin embargo, no hay claridad sobre cómo se relacionan las condiciones (5.1.8) y (5.1.10), por ejemplo, $\rho(\Delta_v) < 1 \Rightarrow \rho(\Delta_1) < 1$. En el capítulo 6, las simulaciones nos permiten retomar este tema y hacer observaciones al respecto.

5.2. Relación de estabilidad entre el sistema con canal con ruido multiplicativo y canal con ruido aditivo y ganancia

En la sección anterior se supuso que los estados de cada sistema eran a-wss, para luego analizar el estado estacionario de cada sistema por separado sin considerar la equivalencia espectral. En esta sección consideraremos la equivalencia para estudiar la estabilidad del NCS con canal con ruido multiplicativo en base a la estabilidad del NCS con canal con ruido aditivo.

Teorema 5.2.1. *Considere los NCS analizados en las secciones 4.1 y 4.2 bajo los supuestos de la sección 3.1, las definiciones en la sección 2.5 y los corolarios 5.1.1 y 5.1.2. Entonces el NCS de la Figura 2.3 es MSS si y sólo si:*

- el sistema LTI de la Figura 2.3 con el canal de la Fig. 3.3 es internamente estable, y
- existe una elección para P_q (finita y positiva semidefinida) tal que $P_q = P_\theta \odot (P_{v_L} + \mu_{v_L} \mu_{v_L}^\top)$ donde P_{v_L} denota la covarianza estacionaria de v_L en la Fig. 2.3 con el canal de la Fig. 3.3.

■

Demostración. (\Rightarrow) Si se cumple el corolario 5.1.1 y el NCS de la Fig.2.3 con canal multiplicativo es MSS, entonces utilizando el Lema 1 en [22] junto con el Lema 2.2.1 y 4.1.1, se cumple que (5.1.1) admite una única solución, la cual también es positiva semidefinida, donde $\mu_{v_M} = C_v \mu_{x_M} + D_{dv} \mu_d$. Además, el Lema 1 en [22] también implica que existe $M > 0$ tal que

$$M - \Delta_1 M \Delta_1^\top - B_w (P_\theta \odot [C_v M C_v^\top] B_w^\top) > 0 \quad (5.2.1)$$

De (5.2.1) concluimos que existe $M > 0$ tal que $M - \Delta_1 M \Delta_1^\top > 0$, lo que implica que $\rho(\Delta_1) < 1$. Por lo tanto, el NCS de la Fig.2.3 con canal con ruido aditivo es internamente estable.

Dado el corolario 5.1.1 y que Δ_1 es estable, tenemos que (5.1.12) admite una única solución positiva semidefinida $\forall P_d, P_q$ positiva semidefinida. Particularmente, (5.1.12) admite una solución cuando escogemos

$$P_q = P_\theta \odot [C_v P_{x_M} C_v^\top + D_{dv} P_d D_{dv}^\top + \mu_{v_M} \mu_{v_M}^\top]$$

donde P_{x_M} satisface (5.1.1). Entonces, (5.1.12) puede escribirse como

$$P_{x_L} = \Delta_1 P_{x_L} \Delta_1^\top + \Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w (P_\theta \odot [C_v P_{x_M} C_v^\top]) B_w^\top + B_w (P_\theta \odot [D_{dv} P_d D_{dv}^\top + \mu_{v_M} \mu_{v_M}^\top]) B_w^\top \quad (5.2.2)$$

Como (5.1.1) y (5.2.2) admiten únicas soluciones, podemos concluir que $P_{x_M} = P_{x_L}$ y que existe $P_q > 0$ tal que $P_q = P_\theta \odot [P_{v_L} + \mu_{v_L} \mu_{v_L}^\top]$ completando la prueba.

(\Leftarrow) Si el NCS en la Fig 2.3 con el canal con ruido aditivo es internamente estable y existe una elección para $P_q = P_\theta \odot (P_{v_L} + \mu_{v_L} \mu_{v_L}^\top)$, entonces $P_q = (C_v P_{x_L} C_v + D_{dv} P_d D_{dv}^\top + \mu_{v_L} \mu_{v_L}^\top)$ donde P_{x_L} satisface (5.2.2). Además, existe $P > 0$ tal que

$$P - \Delta_1 P \Delta_1^\top > 0 \quad (5.2.3)$$

Con la Observación 21.6 en [46], escribimos (5.2.2) como

$$P_{x_L} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_1^i (\Delta_2 P_d \Delta_2^\top + B_w P_q B_w^\top) \Delta_1^{i\top} \quad (5.2.4)$$

Por lo tanto,

$$P_q = P_\theta \odot \left[C_v \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Delta_1^i \Delta_2 P_d \Delta_2^\top \Delta_1^{i\top} + Q \right) C_v^\top + B^+ \right] > P_\theta \odot [C_v Q C_v^\top], \quad (5.2.5)$$

donde $B^+ \triangleq D_{dv} P_d D_{dv}^\top + \mu_{v_L} \mu_{v_L}^\top$, y

$$Q \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_1^i B_w P_q B_w^\top \Delta_1^{i\top} \iff Q = \Delta_1 Q \Delta_1^\top + B_w P_q B_w^\top$$

De (5.2.5) concluimos que existe $\epsilon > 0$ tal que $P_q > P_\theta \odot [C_v (Q + \epsilon P) C_v^\top]$, donde P satisface (5.2.3). Podemos construir así la siguiente inecuación

$$\mathcal{A}(Q + \epsilon P) \leq \Delta_1 (Q + \epsilon P) \Delta_1^\top + B_w P_q B_w^\top = Q + \epsilon \Delta_1 P \Delta_1^\top < Q + \epsilon P$$

donde El operador es definido como $\mathcal{A}(P_x) \triangleq P_\theta \odot B_w (C_v P_x C_v^\top) B_w^\top$. Concluimos así que existe $M = Q + \epsilon P > 0$ que $M - \mathcal{A}(M) > 0$. Por lo tanto, el NCS en la Fig. 2.3 con canales con ruido multiplicativo es MSS concluyendo la prueba. ■

Nota 5.2.1. Note que, considerando la equivalencia espectral, ruido aditivo q depende de P_x , transformando a q en un ruido correlacionado. Esto genera que, en general, satisfacer $\rho(\Delta_1) < 1$ ya no garantiza estabilidad. El esquema LTI alternativo impone nuevas condiciones, las cuales están descritas en el Teorema (5.2.1).

El teorema 5.2.1 nos muestra que la convergencia en sentido cuadrado de los momentos del NCS con canales con ruido multiplicativo esta garantizada cuando el esquema LTI alternativo es internamente estable, y se cumple la restricción estacionaria para la varianza del ruido aditivo q . Satisfacer esta restricción no es trivial, lo que dificulta obtener condiciones explícitas para estabilidad en términos de las estadísticas del canal.

El Teorema 5.2.1 nos permite estudiar la estabilidad de un sistema, originalmente no lineal, a través de un esquema alternativo con ruido aditivo. Dichos canales han sido bien estudiados en la literatura [19], [39]. Dado que el ruido inducido por la red ingresa al sistema de manera aditiva, es posible utilizar un conjunto de herramientas analíticas lineales para estudiar su estabilidad y rendimiento. Por ejemplo, en [14], se estudia la estabilidad de un sistema MIMO para el caso de ruidos aditivos con correlación de tiempo, es decir, ruidos coloreados. Esto abre la puerta para usar resultados como [13], [14] para obtener condiciones de estabilidad explícitas o un rendimiento óptimo para los NCS sobre canales de desvanecimiento correlacionados.

Resultados similares a los obtenidos en 5.2.1 se han utilizado para canales no correlacionados de desvanecimiento. Por ejemplo en [22], se obtiene estabilidad explícita y condiciones de desempeño en términos de estadísticas de polos/ceros inestables y las estadísticas de los canales. Este tipo de resultados también han sido populares en canales no correlacionados con pérdidas de paquetes, [31] para estabilidad y rendimiento, y [32] para estimación.

SIMULACIONES

Para verificar los resultados obtenidos en la Sección 4.3 y el Capítulo 5 se realizan simulaciones, y se grafican las 30 primeras muestras de las medias y covarianzas del estado $x(k)$. Se omitirán los resultados asociados a la señal de desempeño e pues esta señal es combinación lineal del estado, y no aporta mayor información respecto a la estabilidad del sistema.

Se generaron 4 conjuntos de datos distintos para los momentos del x . Dos creados a partir de los resultados del Lema (4.1.1) y del Lema (4.2.1) respectivamente; y otras dos generadas a partir de realizaciones (simuladas en Matlab) para el estado inicial $x(0)$, el ruido de entrada d , el ruido multiplicativo θ para el caso de canal multiplicativo, y el ruido aditivo q (sujeto a la restricción de su covarianza) para el caso de canal aditivo. En estos dos últimos conjuntos de datos, se utiliza el Método de MonteCarlo para crear estimadores de los momentos. En ellos se utilizan 150000 realizaciones por muestra temporal.

Las matrices para las variables de estado del sistema N son

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,05 & 0,3 \end{bmatrix}, C_v = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$
$$D_{dv} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,04 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por

$$\mu_{x_M}(0) = \mu_{x_L}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^\top$$
$$P_{x_M}(0) = P_{x_L}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 \end{bmatrix},$$

mientras que las medias y varianzas de los ruidos $\theta(k)$ y $d(k)$ son:

$$\mu_d = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}^\top, \quad \mu_\theta = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^\top$$
$$P_d = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad P_\theta = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix}$$

La ganancia del canal Ψ y el ruido de canal q son tales que satisfacen Teorema 4.3.1. Note que, para el sistema simulado, el vector de estados x tiene dimensión 2×1 , al igual que el ruido de entrada d , la entrada al canal v , la salida del canal 2, y el ruido multiplicativo θ del canal de comunicación.

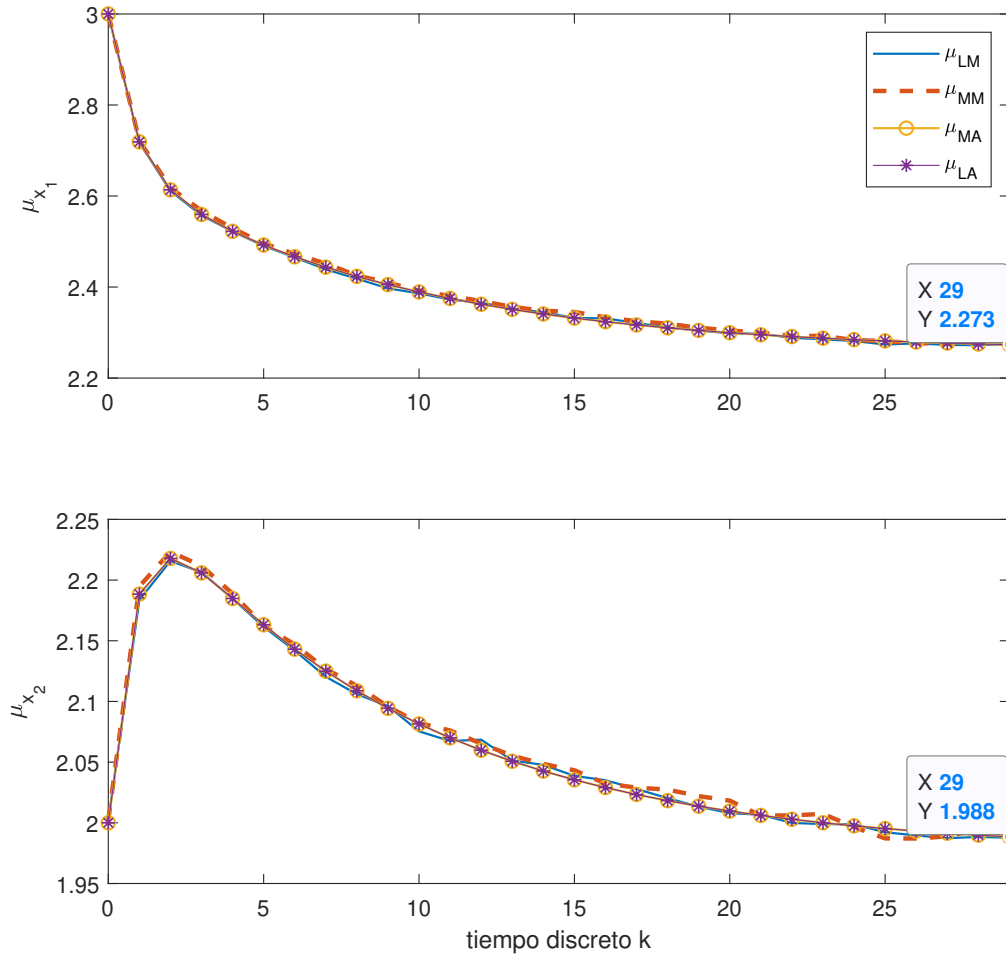


Figura 6.1. Evolución temporal de cada uno de los componentes del vector de medias del estado μ_x . Caso estable donde μ_x converge en 30 muestras.

6.1. Caso estable

Las Fig. 6.1 y 6.2, muestran cada uno de los elementos del vector de medias $\mu_x(k)$ y matriz de covarianza $P_x(k)$. La notación *LM*, *MM*, *LA*, *MA* indica los casos lineal usando el método de Montecarlo, multiplicativo usando el método de Montecarlo, lineal analítico y multiplicativo analítico respectivamente. Las expresiones analíticas se refieren a los resultados de los Lemas 4.1.1 y 4.2.1. Las Fig. 6.1 y 6.2 muestran que se cumple la equivalencia espectral para μ_x y para P_x al comparar los datos generados de 4 formas distintas. Estas formas hacen referencia a *LM*, *MM*, *LA*, *MA*.

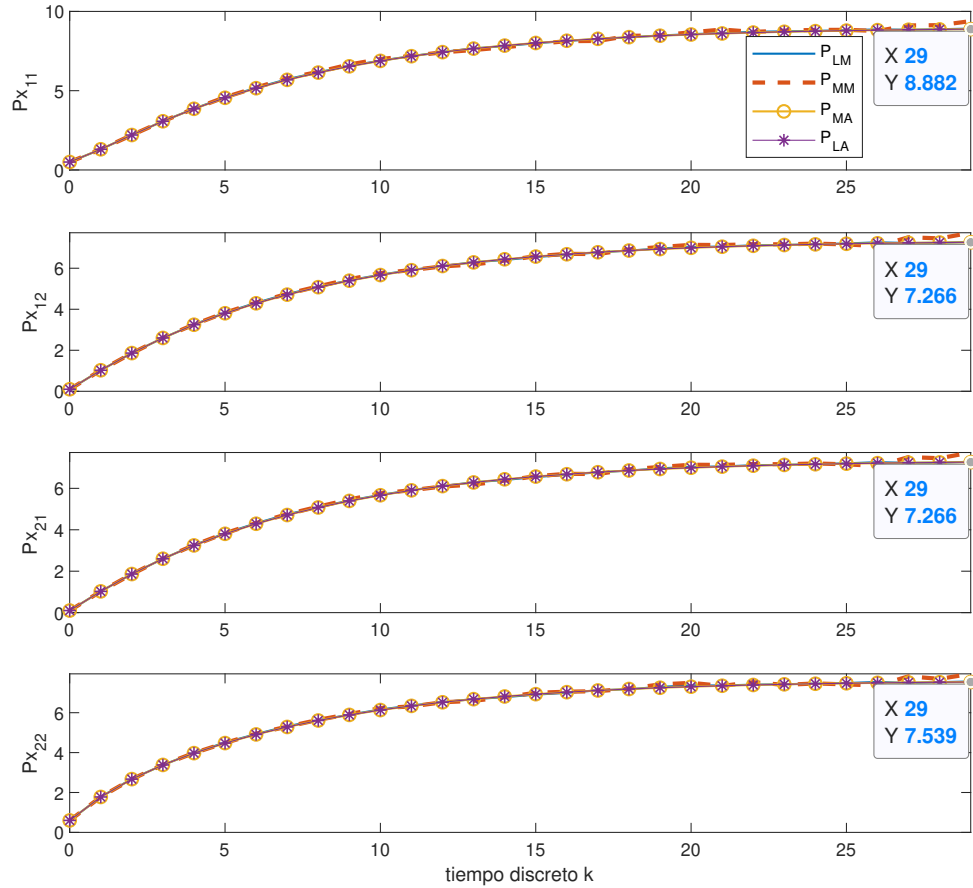


Figura 6.2. Evolución temporal de cada uno de los componentes de la matriz de covarianza del estado P_x . Caso estable donde P_x converge en 30 muestras.

Para estudiar la convergencia, recordemos que la condición de convergencia para μ_x corresponde a $\rho(\Delta_1) < 1$. Para P_x corresponde a $\rho(\Delta_v) < 1$. Si calculamos $\rho(\Delta_1)$ y $\rho(\Delta_v)$ para este caso, obtenemos

$$\rho(\Delta_1) = 0,89045, \quad \rho(\Delta_v) = 0,89141.$$

Ambas condiciones se cumplen, y se verifica la convergencia de $\mu_x(k)$ y $P_x(k)$ en las Fig. 6.1 y 6.2. Además, μ_x satisface (5.1.7) y (5.1.17), y al computarla obtenemos

$$\mu_x = (I - \Delta_1)^{-1} \Delta_2 \mu_d = [2,25877 \quad 1,97691]^\top.$$

Este resultado se verifica al ver que los valores estacionarios de esta estadística converge hacia los mismos valores de la Fig. 6.1. Note que a medida que converge, lo hacen decreciendo

hacia los valores estacionarios teóricos. Se puede mejorar la precisión de las simulaciones, aumentando el número de muestras temporales. Recuerde que el valor estacionario, es un valor teórico al considerar $k \rightarrow \infty$, pero que se puede alcanzar pasado cierto número de muestras dependiendo de la velocidad del sistema. Se puede asociar la velocidad de convergencia a la magnitud del radio espectral. En este caso, este valor es cercano a 1, por lo que su dinámica es lenta, es decir, el sistema puede tardar varias muestras en estacionarse. Esta hipótesis explicaría las diferencias, que ya son bastante pequeñas.

Para corroborar el estado estacionario de P_x , se puede computar la expresión descrita en (5.1.9)

$$X_M = [I - \Delta_v]^{-1}(\Delta_2 \otimes \Delta_2 D + B_w \otimes B_w \text{diag}(\text{vec}(P_\theta))S)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_v &= \Delta_1 \otimes \Delta_1 + B_w \otimes B_w \text{diag}(\text{vec}(P_\theta))C_v \otimes C_v \\ S &= \text{vec}(D_{dv}P_dD_{dv}^T + \mu_{v_M}\mu_{v_M}^T) \end{aligned}$$

Los valores obtenidos para este caso son

$$P_x = \begin{bmatrix} 8,9458 & 7,3167 \\ 7,3167 & 7,5785 \end{bmatrix}$$

Este resultado corrobora los valores estacionarios a los cuales converge $P_x(k)$ en la Fig. 6.1. Note que a medida que convergen, lo hacen creciendo hacia el valor estacionario teórico. Al igual que en los gráficos de las medias, existe una pequeña diferencia asociada al tiempo de convergencia.

Adicionalmente, para analizar y verificar los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, se propone modificar los valores propuestos para el caso estable presentado en la Sección 6.1. Se realizan 2 casos adicionales. En el primero, modificamos las estadísticas de θ , aumentando solo la covarianza P_θ hasta que $\rho(\Delta_v) > 1$. A este nuevo valor lo llamaremos \hat{P}_θ . En el segundo caso, aumentamos solo la media μ_θ hasta que $\rho(\Delta_1) > 1$. A este nuevo valor lo llamaremos $\hat{\mu}_\theta$. Los valores utilizados en las siguientes simulaciones son

$$\hat{P}_\theta = \begin{bmatrix} 1,9 & 0,5 \\ 0,5 & 1,7 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu}_\theta = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,8 \end{bmatrix}.$$

6.2. Caso inestable al variar P_θ

Para las simulaciones de este caso, se modifica el valor de P_θ a \hat{P}_θ , y se mantiene el resto de los datos del caso estable. Adicionalmente, es necesario aumentar el número de realizaciones para mejorar la precisión del estimador obtenido al usar el método de Montecarlo. Este estimador se ve gravemente afectado al aumentar el valor de P_θ . Se utilizan 800.000 realizaciones para reducir significativamente la varianza del estimador.

Las Fig. 6.3 y 6.4, muestran cada uno de los elementos de la media de los estados $\mu_x(k)$ y $P_x(k)$. La notación *LM*, *MM*, *LA*, *MA* indican los casos lineal usando el método de Montecarlo, multiplicativo usando el método de Montecarlo, lineal analítico y multiplicativo analítico respectivamente.

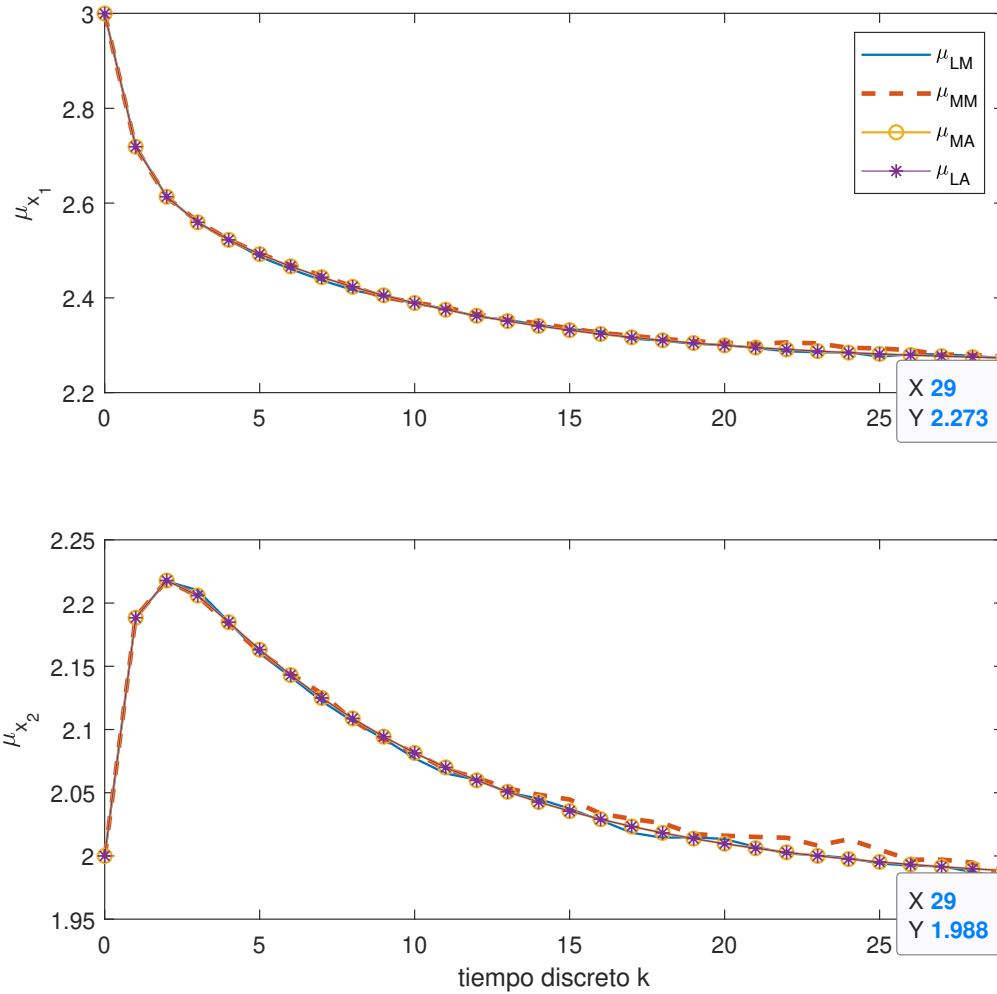


Figura 6.3. Evolución temporal de cada uno de los componentes de la media del estado μ_x . Caso inestable donde μ_x converge y se utiliza \hat{P}_θ .

Para estudiar la convergencia, calculamos $\rho(\Delta_1)$ y $\rho(\Delta_v)$ para este caso, obteniendo

$$\rho(\Delta_1) = 0,89045, \quad \rho(\Delta_v) = 1,00602.$$

En este caso, se mantiene el valor de $\rho(\Delta_1)$ respecto al caso estable, por lo que se espera que μ_x converja. En cambio, $\rho(\Delta_v) > 1$, por lo que se espera que P_x diverja. Estas observaciones son corroboradas en las Fig. 6.3 y 6.4. Particularmente, vemos en la Fig. 6.4 cómo P_x crece indefinidamente. Este caso, nos permite ilustrar el impacto que tiene P_θ sobre la convergencia de P_x , pero no lo tiene sobre μ_x .

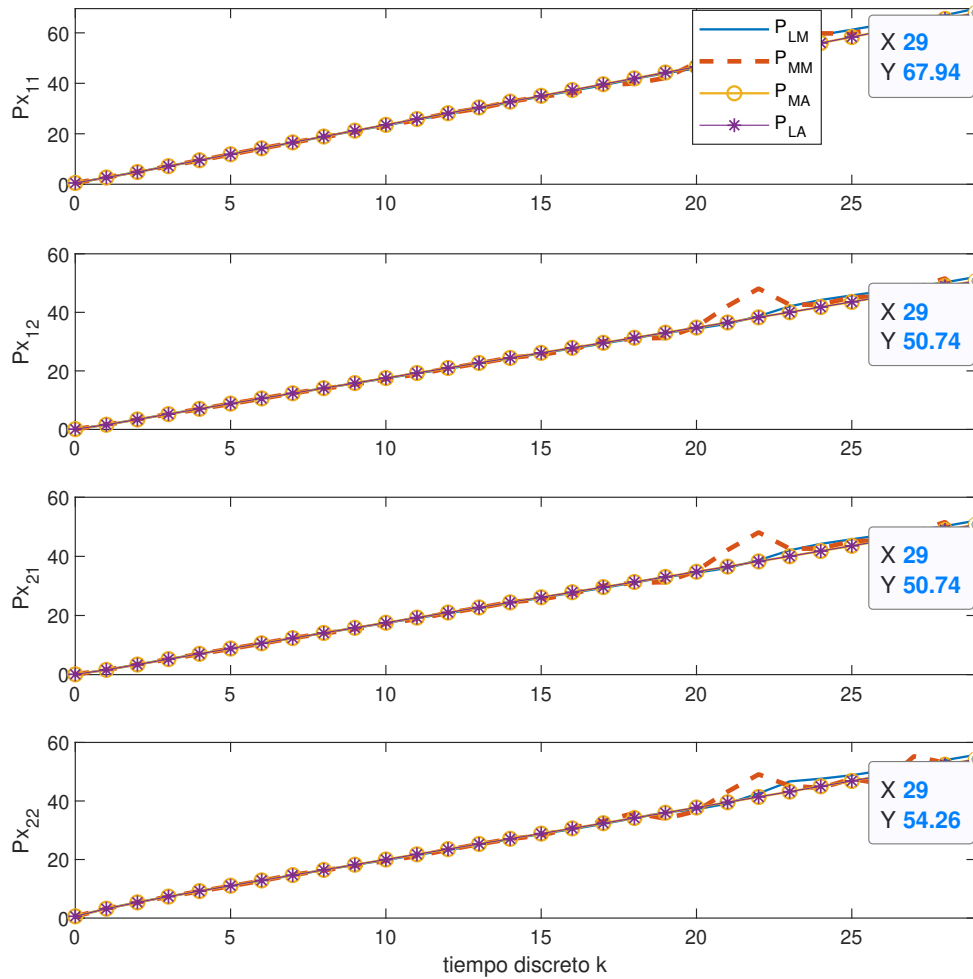


Figura 6.4. Evolución temporal de cada uno de los componentes de la matriz de covarianza del estado P_x . Caso inestable donde P_x diverge y se utiliza \hat{P}_θ .

Además, las Fig. 6.3 y 6.4 muestran que se cumple la equivalencia para μ_x y para P_x al compararlas de las 4 formas LM , MM , LA , MA , incluso aunque no se cumpla una de las condiciones de convergencia.

Por otro lado, μ_x satisface (5.1.7) y (5.1.17), y al computarlo obtenemos

$$\mu_x = (I - \Delta_1)^{-1} \Delta_2 \mu_d = [2,25877 \quad 1,97691]^\top.$$

Este resultado presenta prácticamente los mismos valores que los señalados en la Fig. 6.1, y es natural, ya que no se modificaron los valores de Δ_1 , Δ_2 ni μ_d .

Nota 6.2.1. *Cabe mencionar que existen pequeñas diferencias en las estadísticas obtenidas a partir del método de Montecarlo respecto a las estadísticas derivadas de las ecuaciones analíticas. La diferencia existente se atribuye a que el método de Montecarlo genera estimadores, los cuales tiene cierto margen de error. Este error es determinado, en parte, por el número de realizaciones para cada muestra. Por ejemplo, en el caso con \hat{P}_θ se aumentan el número de realizaciones para mejorar la precisión del estimador. Esto es necesario, ya que la covarianza de \hat{P}_θ es mucho mayor que la usada para el caso estable, y este cambio afecta notablemente el desempeño del estimador.*

6.3. Caso inestable al variar μ_θ

Para las simulaciones de este caso, se modifica el valor de μ_θ a $\hat{\mu}_\theta$, y se mantiene el resto de los datos del caso estable.

Las Fig. 6.5 y 6.6, muestran cada uno de los elementos de la media de los estados $\mu_x(k)$ y $P_x(k)$. La notación *LM*, *MM*, *LA*, *MA* indican los casos lineal usando el método de Montecarlo, multiplicativo usando el método de Montecarlo, lineal analítico y multiplicativo analítico respectivamente.

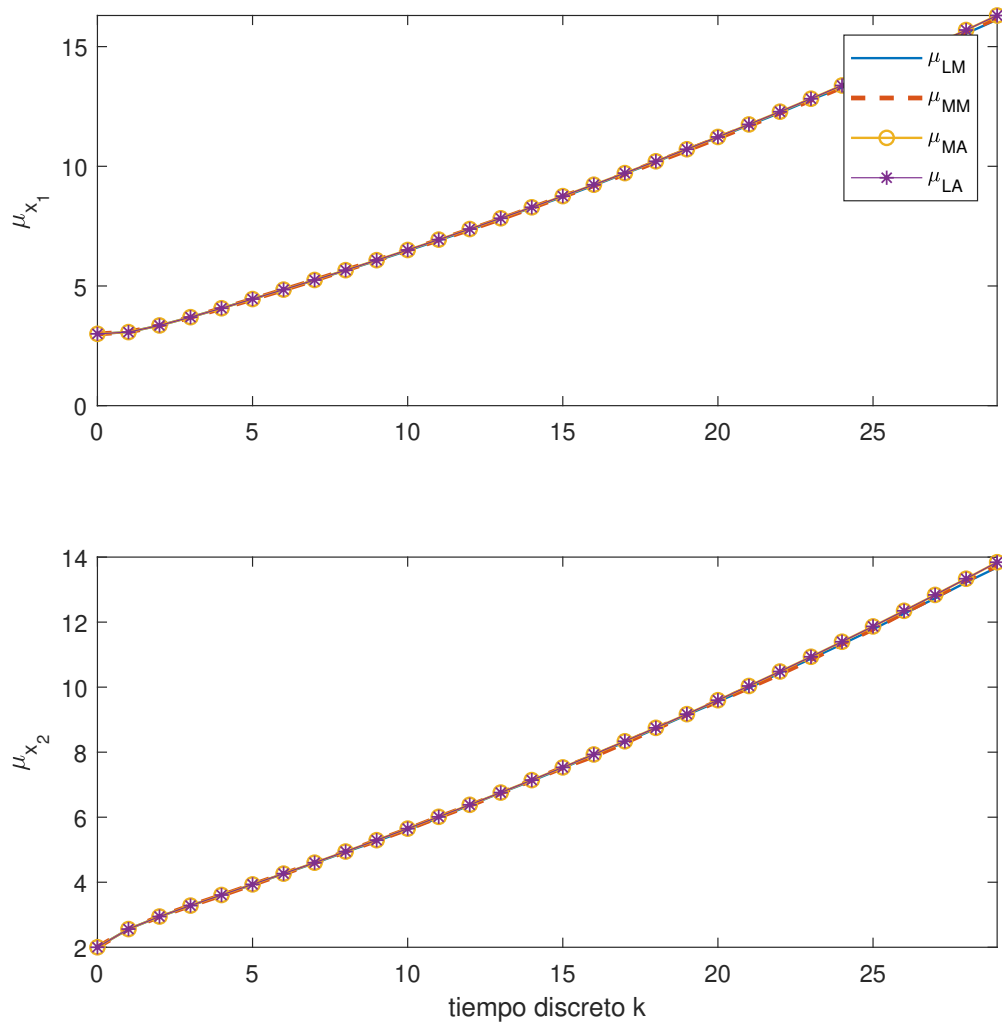
Para estudiar la convergencia, calculamos $\rho(\Delta_1)$ y $\rho(\Delta_v)$, obteniendo

$$\rho(\Delta_1) = 1,01886, \quad \rho(\Delta_v) = 1,13799.$$

En este caso, ambas matrices Δ_1 y Δ_v se ven afectadas, y su radio espectral es mayor a 1. Esto implica que μ_x y P_x divergen. Estas observaciones son corroboradas en las Fig. 6.5 y 6.6. Note que la convergencia de los primeros y segundos momentos del estado x es especialmente sensible a los valores de μ_θ .

Además, las Fig. 6.5 y 6.6 muestran que se cumple la equivalencia para μ_x y para P_x al compararlas de las 4 formas *LM*, *MM*, *LA*, *MA*, incluso aunque no se cumpla ninguna de las condiciones de convergencia.

Nota 6.3.1. *Las simulaciones sugieren que $\rho(\Delta_v)$ es más restrictiva que $\rho(\Delta_1)$ a medida que sus valores se acercan a 1. Esto se ve reflejado en los 3 casos simulados, especialmente en el caso que utiliza \hat{P}_θ .*



• **Figura 6.5.** Evolución temporal de cada uno de los componentes del vector de medias del estado μ_x . Caso inestable donde μ_x diverge. Se utiliza $\hat{\mu}_\theta$ para las simulaciones.

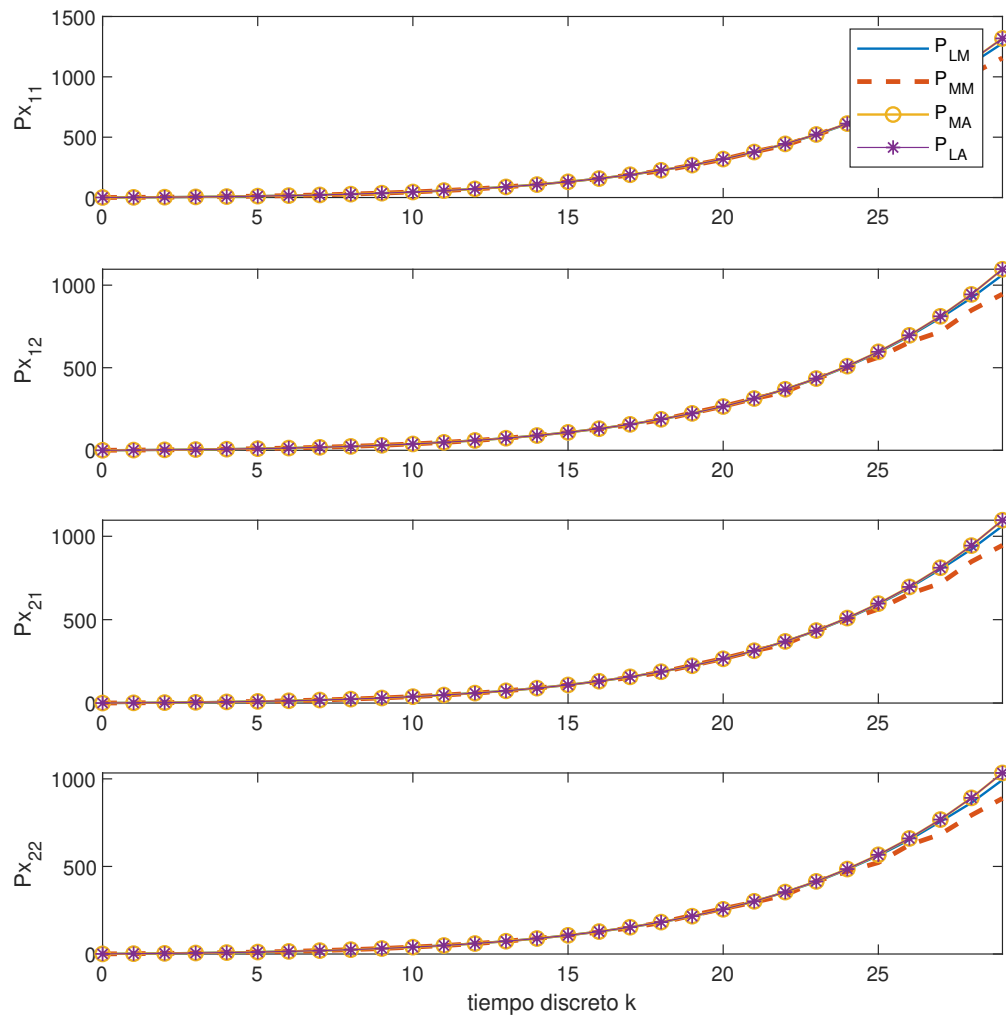


Figura 6.6. Evolución temporal de cada uno de los componentes de la matriz de covarianza del estado P_x . Caso inestable donde P_x diverge. Se utiliza $\hat{\mu}_\theta$ para las simulaciones.

CONCLUSIONES

Al comienzo de este trabajo se relacionó las estadísticas de segundo orden de las señales comunes entre el sistema de control con canal de desvanecimiento, y el sistema de control con canal con ruido aditivo. Dicha relación se realizó entre las señales de desempeño, los estados, las entradas y las salidas del canal de los sistemas antes mencionados. Esta relación se menciona como equivalencia espectral y es válida para cualquier instante.

Se estudio el comportamiento estacionario de cada sistema por separado, encontrando condiciones de convergencia para cada caso. Luego, se compararon estas condiciones. Para el caso con ruido aditivo, las condiciones de convergencia se relacionan directamente con la solución de una ecuación de Lyapunov. Para el caso con ruido multiplicativo, no es tan directo, quedando en términos de radios espectrales de matrices relacionadas con las estadísticas del ruido multiplicativo θ .

Utilizando la equivalencia espectral entre ambos sistemas, se estudió el comportamiento estacionario de esta equivalencia, y la relación de estabilidad entre los sistemas. Se logró demostrar que la estabilidad interna del NCS con ruido aditivo es equivalente a la estabilidad MSS del NCS con ruido multiplicativo.

Finalmente, a través de simulaciones se verificaron tales resultados. Estas simulaciones dejan en evidencia que se cumple, no tan solo la equivalencia, sino también la relación de estabilidad entre los sistemas. Adicionalmente, los casos escogidos permiten notar que la estabilidad es muy sensible a las estadísticas del ruido multiplicativo θ , en particular a su media.

Trabajo futuro

Habiendo demostrado la equivalencia espectral de los sistemas y su relación de estabilidad, vemos que es posible estudiar el sistema de control con canales de desvanecimiento, a través del sistema de control con canales aditivos, considerando una restricción en el ruido aditivo. Estos resultados abren la puerta para extender resultados obtenidos sobre el esquema aditivo.

Por otro lado, queda pendiente describir el sistema de control en términos de una planta y un controlador. De esta forma, se podrían encontrar condiciones sobre el ruido multiplicativo, para las cuales no exista un controlador que estabilice el sistema en lazo cerrado afectado por dicho ruido.

Esta equivalencia espectral es una extensión de otra, la cual no considera correlación espacial en el ruido multiplicativo. En esos trabajos, se utiliza la equivalencia para hacer control óptimo con limitaciones de SNR. Por lo tanto, queda pendiente extender los resultados de control óptimo de dichos trabajos.

REFERENCIAS

- [1] Karl J Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [2] John Baillieul and Panos J Antsaklis. Control and communication challenges in networked real-time systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):9–28, 2007.
- [3] Bassam Bamieh and Maurice Filo. An input-output approach to structured stochastic uncertainty. *arXiv preprint arXiv:1806.07473*, 2018.
- [4] Dennis S Bernstein. *Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*, volume 41. Princeton university press Princeton, 2005.
- [5] Julio H Braslavsky, Richard H Middleton, and James S Freudenberg. Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8):1391–1403, 2007.
- [6] Wei Chen and Li Qiu. Linear quadratic optimal control of continuous-time lti systems with random input gains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(7):2008–2013, 2016.
- [7] Oswaldo Luiz Valle Costa, Marcelo Dutra Fragoso, and Ricardo Paulino Marques. *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [8] Oswaldo LV Costa and Marcelo D Fragoso. Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of mathematical analysis and applications*, 179(1):154–178, 1993.
- [9] Thomas M Cover. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 1999.
- [10] Nicola Elia. Remote stabilization over fading channels. *Systems & Control Letters*, 54(3):237–249, 2005.
- [11] BA Francis. A course in h-infinity control-theory. *Lecture notes in control and information sciences*, 88:R5, 1987.
- [12] Andrea Goldsmith. *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.
- [13] Rodrigo A González, Francisco J Vargas, and Jie Chen. Stabilization of mimo systems over additive correlated noise channels subject to multiple snr-constraints. In *2018 European Control Conference (ECC)*, pages 1493–1498. IEEE, 2018.

- [14] Rodrigo A González, Francisco J Vargas, and Jie Chen. Mean square stabilization over snr-constrained channels with colored and spatially correlated additive noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(11):4825–4832, 2019.
- [15] Graham C Goodwin, Stefan F Graebe, Mario E Salgado, et al. *Control system design*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall,, 2001.
- [16] Joo P Hespanha, Payam Naghshtabrizi, and Yonggang Xu. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):138–162, 2007.
- [17] Orhan C Imer, Serdar Yüksel, and Tamer Başar. Optimal control of lti systems over unreliable communication links. *Automatica*, 42(9):1429–1439, 2006.
- [18] Yumiko Ishido, Kiyotsugu Takaba, and Daniel E Quevedo. Stability analysis of networked control systems subject to packet-dropouts and finite-level quantization. *Systems & Control Letters*, 60(5):325–332, 2011.
- [19] Yiqian Li, Jie Chen, Ertem Tuncel, and Weizhou Su. MIMO control over additive white noise channels: stabilization and tracking by lti controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(5):1281–1296, 2015.
- [20] Xiangheng Liu, Andrea Goldsmith, Sumider Sonia Mahal, and J Karl Hedrick. Effects of communication delay on string stability in vehicle platoons. In *ITSC 2001. 2001 IEEE Intelligent Transportation Systems. Proceedings (Cat. No. 01TH8585)*, pages 625–630. IEEE, 2001.
- [21] Jianbo Lu and Robert E Skelton. Mean-square small gain theorem for stochastic control: discrete-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3):490–494, 2002.
- [22] Alejandro I Maass and Eduardo I Silva. Performance limits in the control of single-input linear time-invariant plants over fading channels. *IET Control Theory & Applications*, 8(14):1384–1395, 2014.
- [23] Cai Meng, Tianmiao Wang, Wusheng Chou, Sheng Luan, Yuru Zhang, and Zengmin Tian. Remote surgery case: robot-assisted teleneurosurgery. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, volume 1, pages 819–823. IEEE, 2004.
- [24] Petter Ogren, Edward Fiorelli, and Naomi Ehrlich Leonard. Cooperative control of mobile sensor networks: Adaptive gradient climbing in a distributed environment. *IEEE Transactions on Automatic control*, 49(8):1292–1302, 2004.
- [25] Tian Qi, Jie Chen, Weizhou Su, and Minyue Fu. Control under stochastic multiplicative uncertainties: Part i, fundamental conditions of stabilizability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3):1269–1284, 2017.
- [26] Alejandro J Rojas. Signal-to-noise ratio constrained feedback control over fading channels. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):8799–8804, 2011.
- [27] Luca Schenato, Bruno Sinopoli, Massimo Franceschetti, Kameshwar Poolla, and S Shankar Sastry. Foundations of control and estimation over lossy networks. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):163–187, 2007.

- [28] Pete Seiler and Raja Sengupta. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference.(Cat. No. 01CH37148)*, volume 2, pages 1491–1496. IEEE, 2001.
- [29] Pete Seiler and Raja Sengupta. An h/sub/spl infin//approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):356–364, 2005.
- [30] Eduardo I Silva, Graham C Goodwin, and Daniel E Quevedo. On networked control architectures for mimo plants. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):8044–8049, 2008.
- [31] Eduardo I Silva and Sebastián A Pulgar. Performance limitations for single-input lti plants controlled over snr constrained channels with feedback. *Automatica*, 49(2):540–547, 2013.
- [32] Eduardo I Silva and Miguel A Solis. An alternative look at the constant-gain kalman filter for state estimation over erasure channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12):3259–3265, 2013.
- [33] Marvin K Simon and Mohamed-Slim Alouini. *Digital communication over fading channels*, volume 95. John Wiley & Sons, 2005.
- [34] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*, volume 2. Wiley New York, 2007.
- [35] Torsten Söderström. *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [36] George PH Styan. Hadamard products and multivariate statistical analysis. *Linear algebra and its applications*, 6:217–240, 1973.
- [37] Sekhar Tatikonda and Sanjoy Mitter. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(7):1056–1068, 2004.
- [38] Yodyium Tipsuwan and Mo-Yuen Chow. Control methodologies in networked control systems. *Control engineering practice*, 11(10):1099–1111, 2003.
- [39] Francisco J Vargas, Eduardo I Silva, and Jie Chen. Stabilization of two-input two-output systems over snr-constrained channels. *Automatica*, 49(10):3133–3140, 2013.
- [40] Gregory C Walsh, Hong Ye, and Linda G Bushnell. Stability analysis of networked control systems. *IEEE transactions on control systems technology*, 10(3):438–446, 2002.
- [41] Nan Xiao, Lihua Xie, and Li Qiu. Feedback stabilization of discrete-time networked systems over fading channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(9):2176–2189, 2012.
- [42] Dong Yue, Qing-Long Han, and Chen Peng. State feedback controller design of networked control systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications, 2004.*, volume 1, pages 242–247. IEEE, 2004.
- [43] Liqian Zhang, Yang Shi, Tongwen Chen, and Biao Huang. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 50(8):1177–1181, 2005.

-
- [44] Lixian Zhang, Huijun Gao, and Okyay Kaynak. Network-induced constraints in networked control systems—a survey. *IEEE transactions on industrial informatics*, 9(1):403–416, 2012.
- [45] Wei Zhang, Michael S Branicky, and Stephen M Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE control systems magazine*, 21(1):84–99, 2001.
- [46] Kemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Inc., 1996.