

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO FÍSICA

Ciclo de Stirling magnético para qubits con anisotropía cerca del punto crítico cuántico

Cristóbal Andrés Araya Lay

Tesis presentada al Departamento de Física de la Universidad de Técnica
Federico Santa María para optar al grado académico de Magister en Ciencias
con Mención en Física

Octubre 2024
Valparaíso, Chile

Profesor Guía: Patricio Vargas

Agradecimientos

Agradezco a mi profesor guía, Patricio Vargas, por su apoyo durante la realización de esta tesis. También quiero expresar mi gratitud a los profesores Francisco Peña y Ariel Norambuena por sus comentarios y ayuda. Asimismo, agradezco el financiamiento proporcionado por los proyectos FONDECYT N°1210312 y N°1240582 del profesor Patricio Vargas.

Abstract

En esta tesis se estudia el ciclo de Stirling cuántico magnético operando en una sustancia compuesta de dos qubits descritos por el modelo de Heisenberg XX bajo la influencia de un campo magnético externo (B) en la dirección z , al cual se le introduce un término de anisotropía (K) con el spin total en la dirección y . La eficiencia y el trabajo son calculados como función de B para diferentes valores de la constante de anisotropía K para temperaturas de los reservorios frío y caliente dadas. La anisotropía mostró extender el la región del campo magnético externo donde el ciclo de Stirling alcanza una eficiencia óptima al compararse con el caso ideal. Se calculó además el límite teórico para la eficiencia, el coeficiente de rendimiento, el trabajo (motor), y el calor extraído (refrigerador) para el ciclo de Stirling operando en el punto crítico cuántico a bajas temperaturas.

Palabras clave: qubits entrelazados, ciclo magnético; termodinámica cuántica

Índice general

1. Introducción	2
2. Modelo	5
2.1. Hamiltoniano y diagonalización	5
2.2. Termodinámica del Sistema	8
2.3. Correlación, concurrencia y transición de fase cuántica	10
2.3.1. Correlación de espín	10
2.3.2. Concurrencia de Wootters	12
2.4. Ciclo de Stirling	13
3. Resultados	17
3.1. Cálculos numéricos	17
3.2. Análisis teórico	20
4. Conclusiones	23
Referencias	25

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, los motores térmicos cuánticos (QHEs, por sus siglas en inglés) son un objeto de investigación muy activo en el campo de la física cuántica y la termodinámica. La atención se centra en descubrir y desarrollar dispositivos a nanoescala que sean altamente eficientes y funcionen con sustancias de trabajo cuánticas. Estos motores térmicos cuánticos representan un avance significativo frente a los motores térmicos clásicos debido a la naturaleza cuántica de sus estados de trabajo, lo cual permite aprovechar fenómenos como la superposición y el entrelazamiento cuántico para mejorar su rendimiento.

Los QHEs están caracterizados por el ciclo termodinámico en el que operan y por la dinámica que gobierna dicho ciclo. El ciclo termodinámico describe las etapas a través de las cuales la sustancia de trabajo pasa, incluyendo procesos de expansión y compresión cuántica, así como la transferencia de calor entre la sustancia de trabajo y los reservorios térmicos. Este ciclo puede ser analizado mediante las leyes de la termodinámica cuántica, las cuales son una extensión de las leyes clásicas de la termodinámica al dominio cuántico.

Un aspecto crucial en el estudio de los QHEs es la identificación y optimización de los parámetros que influyen en su eficiencia y potencia. Esto incluye la exploración de diferentes sustancias de trabajo cuánticas, tales como átomos individuales, iones atrapados, o qubits superconductores, así como la implementación de diversos tipos de ciclos termodinámicos cuánticos, como el ciclo de Carnot cuántico y el ciclo de Stirling cuántico. Además, la dinámica cuántica de estos sistemas, descrita por la ecuación de Schrödinger o las ecuaciones maestras cuánticas, juega un papel fundamental en la comprensión de cómo se produce la conversión de energía a nanoescala.

La investigación en motores térmicos cuánticos no solo tiene implicaciones teóricas, sino también prácticas. Los avances en este campo podrían conducir al desarrollo de nuevas tecnologías para la generación y el aprovechamiento eficiente de energía a escalas extremadamente pequeñas, lo cual sería particularmente relevante para la electrónica de nanoescala y la computación cuántica. Además, el estudio de los QHEs también proporciona una plataforma para investigar conceptos fundamentales en la mecánica cuántica y la termodinámica, como la relación entre la información y la energía en sistemas cuánticos. [1–23] .

Al aplicarse a un sistema cuántico con un campo magnético externo como parámetro de control, el ciclo de Stirling consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos isomagnéticos. Durante las etapas isotérmicas, la sustancia de trabajo interactúa con un reservorio térmico a una temperatura determinada, mientras que en las etapas isomagnéticas, el campo magnético externo al que se somete el sistema permanece constante. La eficiencia de este ciclo es notablemente influenciado por la intensidad del campo magnético, al afectar este directamente el espectro de energía y los estados de la sustancia de trabajo. Consecuentemente, el ciclo de Stirling en termodinámica cuántica, empleando un campo magnético externo como parámetro de control, exhibe un potencial prometedor para aplicarse a refrigeración magnética y campos afines [24–26].

Recientemente se ha estudiado el ciclo de Stirling cuántico basado en dos espines acoplados, descritos por el modelo de Heisenberg XX con un campo magnético externo en el eje z , cerca del punto crítico cuántico (QCP, por sus siglas en inglés) [24]. En dicho estudio se investigó la transición de fase cuántica del sistema, el entrelazamiento y la correlación, mostrando que al elegir parámetros específicos del ciclo, el sistema puede operar como un motor térmico o como un refrigerador sobre un amplio rango de valores para el campo magnético en un régimen de bajas temperaturas. Mientras que el motor puede alcanzar la eficiencia de Carnot cerca del punto crítico al operar con campos magnéticos altos, el refrigerador se acerca al límite de Carnot para campos magnéticos bajos. Aunque, a temperaturas más altas, el rendimiento del sistema se desvía significativamente del límite de Carnot, y el máximo de trabajo extraíble no se corresponde necesariamente con la máxima eficiencia [24].

Se ha explorado el caso de un motor térmico cuántico usando un sistema de Heisenberg XX de tres qubits [27] buscando optimizar la eficiencia. Aun así, no

se logra igualar la eficiencia de Carnot para campos externos suficientemente bajos.

En un estudio reciente, Kuznetsova et al. [28] examina dos qubits en el modelo de Heisenberg XYZ con interacciones DM (Dzyaloshinskii–Moriya) y KSEA (Kaplan–Shekhtman–Entin-Wohlman–Aharony) bajo un campo magnético externo no uniforme como sustancia de trabajo para una maquina térmica cuántica operando con un ciclo de Otto cuántico. El análisis muestra que el rol de las interacciones DM y KSEA a medida que la constante de intercambio longitudinal altera el comportamiento del sistema de antiferromagnético a ferromagnético. Diferentes modos de operación de la maquina térmica son identificados, incluyendo motor térmico, refrigerador, calentador o disipador y acelerador térmico o calentador de baño frío.

Otra publicación [29] explora la influencia de anisotropía en las constantes de intercambio y el campo magnético sobre el entrelazamiento de dos qubits en el modelo XY. El estudio revela que la combinación del parámetro de anisotropía y el campo magnético puede generar regiones de entrelazamiento en el espacio de parámetros que no se encuentran en el caso isotrópico. Esto sugiere la posibilidad de controlar y producir entrelazamiento en sistemas de dos espines incluso a temperatura finita.

En esta tesis, basado en el efecto de la anisotropía en extender el rango donde se presenta entrelazamiento, se presenta una investigación de un ciclo de Stirling utilizando un sistema de dos qubits acoplados sometidos a un campo magnético externo en la dirección del eje z e influenciado por una anisotropía uniaxial en la dirección del eje y . El foco se encuentra en analizar la eficiencia y el trabajo del ciclo de Stirling. Específicamente, se examina el impacto de la anisotropía en el rango de temperaturas donde la eficiencia alcanza su valor máximo, la extinción del intervalo del campo magnético donde se observa una alta eficiencia, y como es afectada por la anisotropía.

Capítulo 2

Modelo

2.1. Hamiltoniano y diagonalización

Nuestro sistema corresponde a 2 qubits (partículas de espín 1/2) descritos por el modelo de Heisenberg XX, al cual se le adiciona un término de anisotropía uniaxial con el espín total en el eje y . De esta forma, nuestro sistema es descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{J}{2}(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) + \frac{B}{2}(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \frac{K}{2}(\sigma_1^y + \sigma_2^y)^2. \quad (2.1)$$

Donde $\sigma_i^\alpha (i = 1, 2; \alpha = x, y, z)$ corresponden a las matrices de Pauli.

Para diagonalizar este Hamiltoniano se introduce la siguiente notación:

$$|\uparrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$|\downarrow\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Para diagonalizar fácilmente este Hamiltoniano es conveniente escribirlo en su forma matricial, para esto se escriben los operadores en el espacio de ambos qubits:

$$\sigma_1^x \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_2^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\sigma_1^y \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_2^y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_1^z \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Donde $\mathbb{1}_i (i = 1, 2)$ corresponde al operador identidad aplicado a uno de los qubits. Luego, los kets que describen el estado de ambos qubits pueden obtenerse como:

$$|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = |11\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |00\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Así, el Hamiltoniano escrito de forma matricial corresponde a:

$$H = \begin{pmatrix} B + K & 0 & 0 & -K \\ 0 & K & J + K & 0 \\ 0 & J + K & K & 0 \\ -K & 0 & 0 & K - B \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Luego, resolviendo el problema de autovalores, se obtienen los autoestados $|\psi_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3, 4$) del sistema junto a sus correspondientes energías E_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$E_1 = \bar{E} - J_{\text{eff}}; \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (2.10)$$

$$E_2 = \bar{E} + J_{\text{eff}}; \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.11)$$

$$E_3 = \bar{E} - B_{\text{eff}}; \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_-^2 + 1}}[|00\rangle - N_- |11\rangle], \quad (2.12)$$

$$E_4 = \bar{E} + B_{\text{eff}}; \quad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_+^2 + 1}}[|00\rangle - N_+ |11\rangle]. \quad (2.13)$$

Donde $\bar{E} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 E_i = K$ es el promedio de las posibles energías, $J_{\text{eff}} = J + K$ es la constante de intercambio efectiva, $B_{\text{eff}} = \sqrt{B^2 + K^2}$ es el campo magnético efectivo, y $N_{\pm} = (B \pm B_{\text{eff}})/K$. Primero, podemos notar que los primeros dos estados propios son estados de Bell, y sus energías no dependen del campo magnético. Mientras que los otros niveles si varían con el campo, lo cual origina un cruce de los niveles de energía ($E_1 = E_3$ y $E_2 = E_4$) para un campo magnético $B_{\text{crit}} = \sqrt{J_{\text{eff}}^2 - K^2} = \sqrt{J^2 + 2JK}$. Este valor crítico solo existe si $K \geq -J/2$. De otra manera no se presenta este cruce de los niveles. La existencia de este valor crítico para el campo define el punto crítico cuántico, donde el estado base cambia de $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_3\rangle$ cuando el campo magnético aumenta desde $B < B_{\text{crit}}$ a $B > B_{\text{crit}}$. Además, cuando $K = -J$ ($J_{\text{eff}} = 0$) los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ se encuentran degenerados.

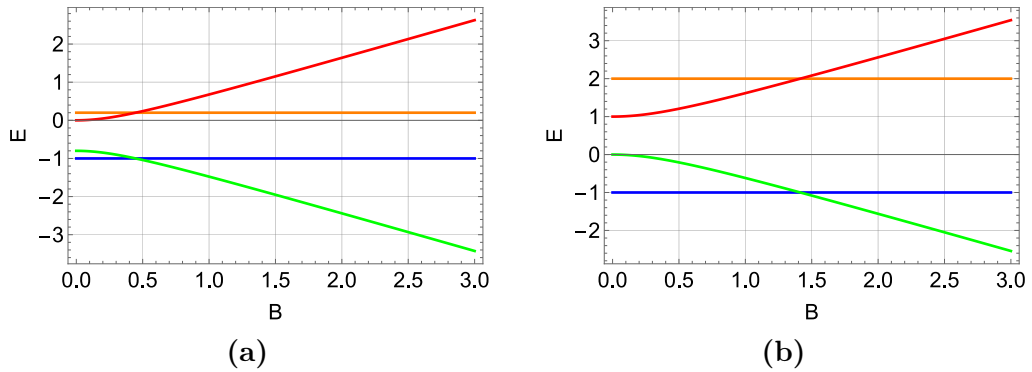


Figura 2.1.1: Variación de los niveles de energía para **(a)** $K = -0.4$, **(b)** $K = 0.5$. $J=1$. Las líneas azul, naranja, verde y roja corresponden a los niveles E_1 , E_2 , E_3 y E_4 respectivamente para ambos gráficos.

Para tener una mejor idea sobre el medio de trabajo, se grafican los niveles de energía en la figura 2.1.1. Se elijen distintos valores de anisotropía dados por $K = 0.5$ (figura 2.1.1a) y $K = -0.4$ (figura 2.1.1b). Básicamente, la

anisotropía provoca dos efectos, primero, un cambio en la energía media \bar{E} , y segundo, un desplazamiento del punto crítico cuántico. A partir de la expresión $B_{\text{crit}} = \sqrt{J^2 + 2JK}$ notamos que el QCP se desplaza a la derecha (izquierda) para valores positivos (negativos) de K , como se observa en la figura 2.1.1. Además valores positivos de K incrementan la separación de los niveles de energía, mientras que los valores negativos la disminuyen. Esto último es relevante pues afecta la población de los distintos niveles de energía a lo largo de los distintos procesos termodinámicos al realizar el ciclo de Stirling.

2.2. Termodinámica del Sistema

Una vez diagonalizado el Hamiltoniano del sistema y teniendo un entendimiento del comportamiento de este en el espacio de parámetros, el siguiente paso consiste en calcular las distintas cantidades termodinámicas que caracterizan el sistema, las cuales se extraen a partir de la función de partición (considerando $k_B = 1$):

$$Z = \sum_{i=1}^4 e^{-E_i/T} = 2e^{-\frac{\bar{E}}{T}} \left(\cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) \right). \quad (2.14)$$

Luego, se obtiene la energía libre F , energía interna U , entropía S , magnetización en el eje z M_z y capacidad calorífica C del sistema como:

$$F = -T \ln Z = -T \ln \left(2e^{-\frac{\bar{E}}{T}} \left(\cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) \right) \right), \quad (2.15)$$

$$U = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \bar{E} - \frac{\sinh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right) + \sinh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right)}, \quad (2.16)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad (2.17)$$

$$M_z = \frac{1}{2} \langle \sigma_1^z + \sigma_2^z \rangle = -\frac{\partial F}{\partial B}, \quad (2.18)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}. \quad (2.19)$$

En el equilibrio térmico la población de cada nivel está definida como $P_i = \exp(-E_i/T)/Z$ (con $i = 1, 2, 3, 4$). Permitiendo introducir la matriz

densidad

$$\rho = \sum_{i=1}^4 P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.20)$$

Esta matriz densidad describe un sistema de cuatro niveles (dos qubits interactuando) tal que $Tr(\rho) = 1$ y $\rho^\dagger = \rho$. De manera explícita puede expresarse como:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(P_3 + P_4) - \frac{B(P_3 - P_4)}{2B_{\text{eff}}} & 0 & 0 & \frac{K(P_3 - P_4)}{2B_{\text{eff}}} \\ 0 & \frac{1}{2}(P_1 + P_2) & \frac{1}{2}(P_2 - P_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(P_2 - P_1) & \frac{1}{2}(P_1 + P_2) & 0 \\ \frac{K(P_3 - P_4)}{2B_{\text{eff}}} & 0 & 0 & \frac{B(P_3 - P_4)}{2B_{\text{eff}}} + \frac{1}{2}(P_3 + P_4) \end{pmatrix}$$

En la presencia de la interacción de intercambio (J) y anisotropía (K), ambos qubits experimentan una interacción que actúa como una fuente de entrelazamiento (esto se puede identificar en los elementos fuera de la diagonal de la matriz densidad ρ), por lo que se analizará el rol de la correlación del sistema en la termodinámica del mismo.

Antes de comenzar con el análisis de las medidas de correlación y concurrencia, se puede apreciar como en el punto crítico la entropía del sistema a temperatura cero es igual a $\ln 2$ (figura 2.2.1). Esto implica que incluso a bajas temperaturas es posible obtener un cambio significativo en calor del sistema al variar el campo magnético.

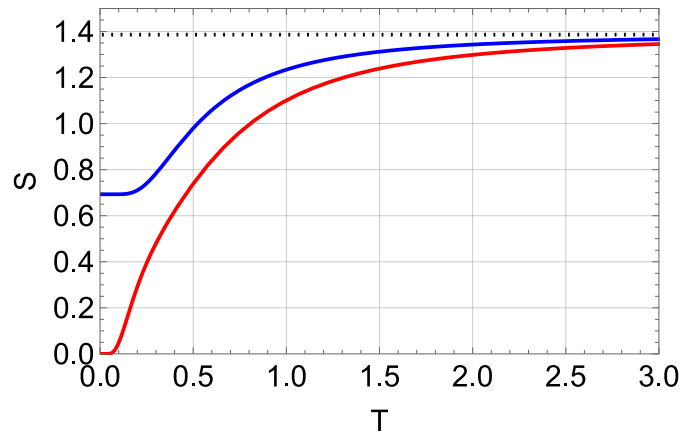


Figura 2.2.1: Variación de entropía S en función de la temperatura T con $J = 1$, $K = -0.4$, y valores de campo magnético $B = B_{\text{crit}}$ (línea azul) y $B = 1$ (línea roja). La línea punteada corresponde a la máxima entropía posible del sistema $S = \ln 4$

2.3. Correlación, concurrencia y transición de fase cuántica

Para explicar el rol de las correlaciones, se debe estudiar como estas medidas de entrelazamiento y coherencia del sistema están conectadas con la transición de fase cuántica (QPT). Particularmente, el objetivo es conectar tanto la correlación como la concurrencia con el punto crítico cuántico y su relevancia en el rendimiento del ciclo de Stirling cuántico. La clasificación y los detalles de la transición de fase cuántica han sido estudiados con distintos enfoques [30, 31]. En esta sección se analizan dos cantidades relevantes, la correlación espín-espín y la concurrencia cerca del QCP.

2.3.1. Correlación de espín

La correlación de espín es relevante cuando, en sistemas de muchos cuerpos, se exhiben interacciones de corto y largo alcance [32]. Cuando no existe anisotropía en nuestro sistema de estudio, es decir, $K = 0$ [23], la transición de fase cuántica se observa tanto en las correlaciones de los espines como en la concurrencia, al cambiar el estado base del sistema desde un estado parcialmente entrelazado (o directamente no entrelazado) a uno máximamente entrelazado (estado de Bell) a bajas temperaturas. Para observar este efecto se introduce la función de correlación de dos-puntos.

$$C_{ij}^{\alpha\beta} = \langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rangle - \langle \sigma_i^\alpha \rangle \langle \sigma_j^\beta \rangle. \quad (2.21)$$

Esta función de correlación es calculada aprovechando la matriz densidad de manera que $\langle \sigma_i^\alpha \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma_i^\alpha)$, donde la matriz densidad ρ esta definida en la ecuación 2.20. En este caso, $\{i, j\} \in \{1, 2\}$ corresponden a los sitios (ambos qubits) y $\{\alpha, \beta\} \in \{x, y, z\}$ indican las componentes del espín en los distintos ejes. Para entender mejor como interpretar la correlación se puede suponer que el sistema puede describirse como el producto de estados separables, de manera que $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$. Ahora, se calcula la función de correlación $C_{12}^{\alpha\beta}$ (considerando además que en estricto rigor, $\sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta$ se debiese escribir como $\sigma_i^\alpha \otimes \sigma_j^\beta$):

$$\begin{aligned}
C_{12}^{\alpha\beta} &= \text{Tr}((\rho_1 \otimes \rho_2)(\sigma_1^\alpha \otimes \sigma_2^\beta)) - \text{Tr}(\rho_1 \sigma_1^\alpha) \text{Tr}(\rho_2 \sigma_2^\beta) \\
&= \text{Tr}((\rho_1 \sigma_1^\alpha) \otimes (\rho_2 \sigma_2^\beta)) - \text{Tr}(\rho_1 \sigma_1^\alpha) \text{Tr}(\rho_2 \sigma_2^\beta) \\
&= \text{Tr}(\rho_1 \sigma_1^\alpha) \text{Tr}(\rho_2 \sigma_2^\beta) - \text{Tr}(\rho_1 \sigma_1^\alpha) \text{Tr}(\rho_2 \sigma_2^\beta) = 0
\end{aligned}$$

Así, se tiene que en estados separables (no correlacionados) la función de correlación se anula, es decir, $C_{12}^{\alpha\beta} \neq 0$ indica que existe correlación entre los espines del sistema. Para el caso particular de dos qubits idénticos que se esta trabajando, al tratarse de partículas indistinguibles, se tiene que $C_{12}^{\alpha\beta} = C_{21}^{\alpha\beta}$ y $C_{12}^{\alpha\beta} = C_{12}^{\beta\alpha}$. Esto reduce el número de funciones de correlación a calcular. La existencia de la interacción de intercambio (J) y la anisotropía (K) provoca un cierto grado de correlación en el espín de los qubits, por lo que para un estado en equilibrio térmico del sistema, se tienen las siguientes funciones de correlación para el espín en cada uno de los ejes:

$$C_{12}^{xx} = -\frac{\sinh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) - \frac{K \sinh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right)}{B_{\text{eff}}}}{\cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right)}, \quad (2.22)$$

$$C_{12}^{yy} = -\frac{\sinh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) + \frac{K \sinh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right)}{B_{\text{eff}}}}{\cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right)}, \quad (2.23)$$

$$C_{12}^{zz} = \frac{B^2 - B_{\text{eff}}^2 \cosh\left(\frac{2J_{\text{eff}}}{T}\right) + K^2 \cosh\left(\frac{2B_{\text{eff}}}{T}\right)}{2B_{\text{eff}}^2 \left(\cosh\left(\frac{J_{\text{eff}}}{T}\right) + \cosh\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right)\right)^2}. \quad (2.24)$$

Debido a razones de simetría las correlaciones $C_{12}^{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) se eliminan [33–35]. La figura 2.3.1 muestra la función de correlación xx , yy y zz , al igual que en [24], la correlación cambia abruptamente al pasar por el punto crítico a bajas temperaturas. Es decir, existe un comportamiento no analítico para $C_{12}^{xx,yy,zz}$ a $T = 0$ exactamente en el valor crítico del campo magnético. Esto para ambos valores de K mostrados en la figura 2.3.1.

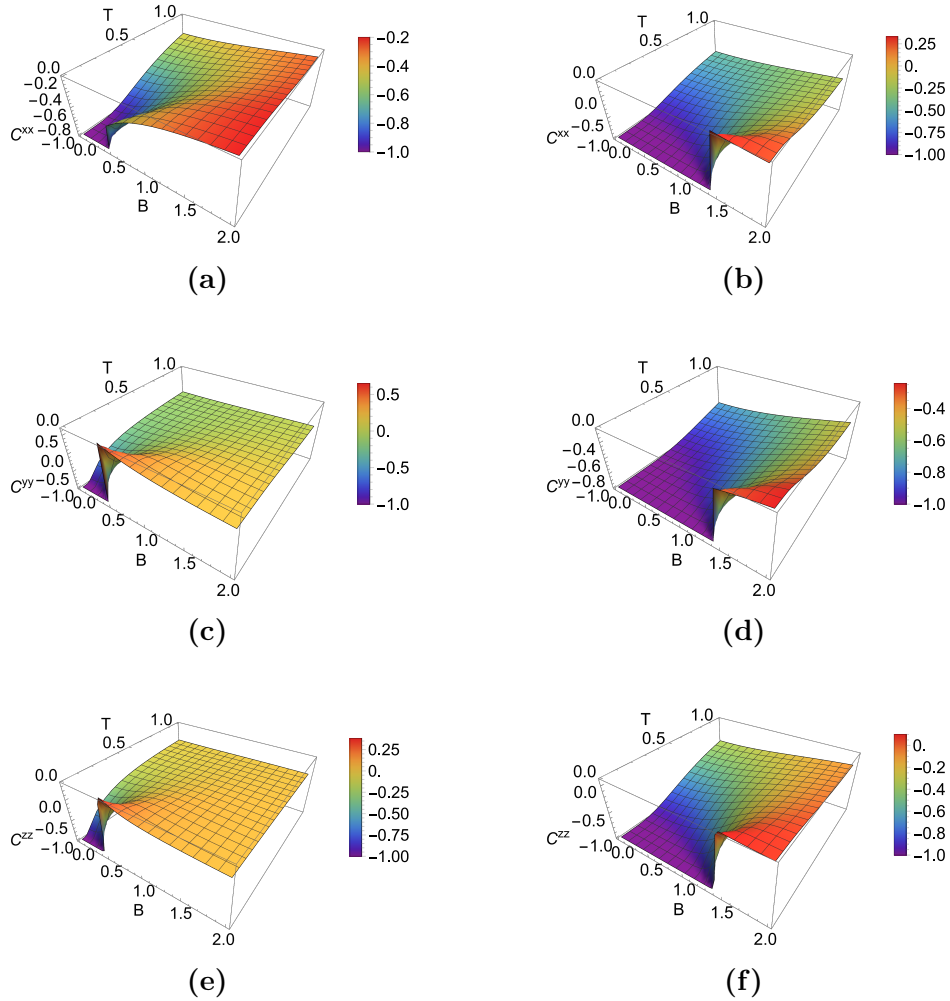


Figura 2.3.1: Variación de las funciones de correlación xx ((a) y (b)), yy ((c) y (d)), y zz ((e) y (f)) con $K = -0.4$ para (a), (c) y (e), y $K = 0.5$ para (b), (d) y (f). Considerando $J = 1$ para ambos casos.

2.3.2. Concurrencia de Wootters

Al trabajar con estados puros, es decir, si se cumple con $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, el entrelazamiento del estado de un sistema bipartito (dos sistemas A y B) puede definirse como la entropía reducida [36]:

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B) \quad (2.25)$$

Donde ρ_A (ρ_B) es la traza parcial de ρ sobre el subsistema B (A). Pero esto no es válido para estados mixtos descritos por $\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, por lo que se introduce una medida de entrelazamiento que es aplicable en estos casos, la

llamada concurrencia de Wootters [37]:

$$c = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (2.26)$$

donde $\lambda_j (j = 1, 2, 3, 4)$ son los autovalores de la matriz $\rho(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y)\rho^\dagger(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y)$ ordenados de mayor a menor. Esta fórmula esta basada en la separabilidad del sistema, de manera que el entrelazamiento definido para un estado mezcla resulta en el promedio del entrelazamiento de los estados puros que forman la base y minimizado sobre estos. $E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i) = E(c)$, donde ψ_i corresponde a los estados de las posibles descomposiciones del sistema. Además el entrelazamiento es función monótona de la concurrencia c . De manera similar a la correlación, para estados de la forma $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$, se tiene que $c = 0$ [38]

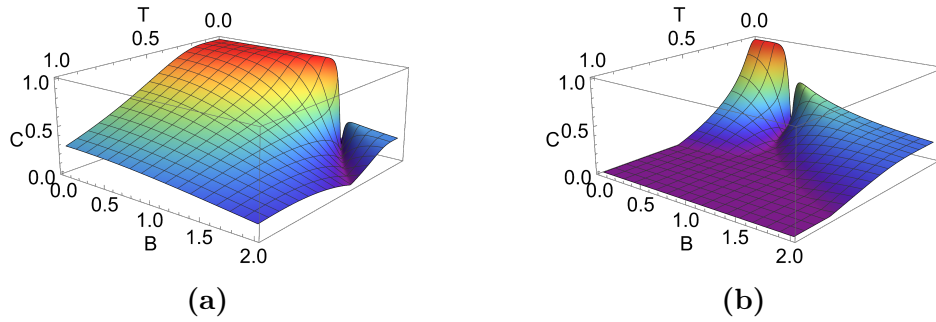


Figura 2.3.2: Concurrencia como función de temperatura y campo magnético con $J = 1$ en ambos gráficos y $K = 0.5$ en (a) y $K = -0.4$ en (b).

Al igual que con la medida de correlación tratada en la sección anterior, la concurrencia presenta un comportamiento no analítico al rededor del punto crítico cuántico, donde alcanza un valor mínimo ($c = 0$) en el QCP y es máxima ($c = 1$) cuando $B < B_{\text{crit}}$. Adicionalmente, para $B > B_{\text{crit}}$ se presenta un cierto grado de entrelazamiento ($0 < c < 1$) al contrario que lo reportado en el caso de $K = 0$ [24] debido a la que la presencia de anisotropía introduce términos en los estados $|\psi_{3,4}\rangle$ que no se pueden expresar como el producto de los estados individuales de los espines.

2.4. Ciclo de Stirling

De manera análoga al ciclo clásico, el ciclo de Stirling cuántico consta de cuatro procesos: dos isotérmicos y dos isomagnéticos (equivalentes a los procesos isocóricos del caso clásico). Durante los procesos isotérmicos, el sistema

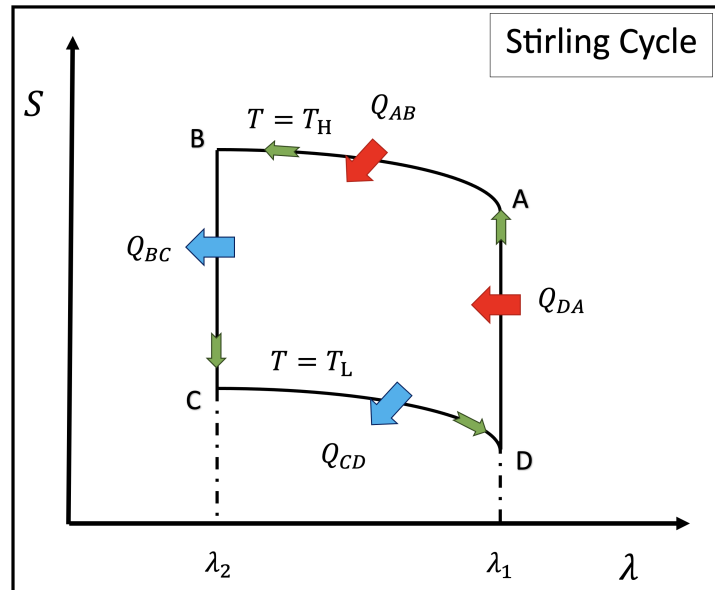


Figura 2.4.1: Diagrama del ciclo de Stirling en relación a la entropía y el parámetro de control λ . En este caso, $\lambda \rightarrow B$ corresponde al campo magnético externo a lo largo del eje z .

permanece en equilibrio térmico con uno de dos baños térmicos a temperaturas $T = T_H$ (alta) o $T = T_L$ (baja), con $T_H > T_L$. Al mismo tiempo, el campo magnético externo varía entre B_H y B_L , durante el proceso, satisfaciendo la condición $B_H > B_L$. En cuanto a las trayectorias isomagnéticas, el baño térmico al cual el sistema está acoplado es intercambiado, esto manteniendo el campo magnético externo en un valor constante (B_H o B_L). El ciclo se puede ver de manera pictórica en la figura 2.4.1 donde, como se mencionó anteriormente, el parámetro de control λ corresponde al campo magnético externo B que actúa sobre el sistema. El análisis de cada etapa del ciclo descrito por la figura 2.4.1 puede ser resumido en:

Trayectorias isotérmicas: Estos procesos corresponden a las trayectorias $A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$ de la figura 2.4.1. En la primera etapa $A \rightarrow B$ (tercera etapa $C \rightarrow D$), el sistema se mantiene a una temperatura fija T_H (T_L), y la entropía varía a lo largo de $A \rightarrow B$ ($C \rightarrow D$) debido a la variación del campo magnético externo. Consecuentemente, el calor intercambiado entre el sistema y los baños térmicos pueden obtenerse a partir de este cambio en la entropía durante estos procesos a temperatura constante:

$$Q_{AB} = T_H(S_B - S_A), \quad (2.27)$$

$$Q_{CD} = T_L(S_D - S_C). \quad (2.28)$$

Trayectorias isomagnéticas: Estos procesos corresponden a las trayectorias $B \rightarrow C$ ($B_L = \text{cte.}$) y $D \rightarrow A$ ($B_H = \text{cte.}$) del la figura 2.4.1. En estos procesos no se realiza trabajo, por lo que el intercambio de calor corresponde al cambio en la energía interna mientras el sistema cambia de un baño térmico de temperatura T_H a uno de temperatura T_L durante la etapa $B \rightarrow C$, y desde T_L a T_H durante $D \rightarrow A$, por lo que el intercambio de calor esta dado por las siguientes expresiones:

$$Q_{BC} = U_C - U_B, \quad (2.29)$$

$$Q_{DA} = U_A - U_D. \quad (2.30)$$

A partir de la primera ley de la termodinámica ($dU = \delta Q - \delta W$), y considerando que el cambio en la energía interna es nulo a lo largo de un ciclo cerrado, el trabajo total puede ser obtenido como:

$$W = Q_H + Q_L = Q_{AB} + Q_{DA} + Q_{BC} + Q_{CD} \quad (2.31)$$

Donde se define $Q_H = Q_{AB} + Q_{DA}$ y $Q_L = Q_{BC} + Q_{CD}$, los signos de Q_H , Q_L , y W definen el comportamiento de la maquina térmica, la cual puede operar de dos maneras, como motor o refrigerador. Este análisis de los signos se resume en el cuadro 2.4.1

Cuadro 2.4.1: Convención de signos de calor y trabajo total para una maquina térmica operando como motor o refrigerador.

Calor y Trabajo	Motor	Refrigerador
Q_H	> 0	< 0
Q_L	< 0	> 0
W	> 0	> 0
η	< 1	-----
COP	-----	> 1 (esperado)

Si la máquina térmica satisface las condiciones para funcionar como un motor, la eficiencia η se define como la razón entre el trabajo total y el calor absorbido por el sistema:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \quad (2.32)$$

En el caso de funcionar como un refrigerador, se define el coeficiente de rendimiento (COP, por “*Coefficient of Performance*”) de manera análoga a la eficiencia de un motor:

$$\epsilon = \frac{Q_L}{|W|} \quad (2.33)$$

Capítulo 3

Resultados

3.1. Cálculos numéricos

En esta sección se discuten los efectos de la anisotropía en la eficiencia del ciclo propuesto. La figura 3.1.1 muestra la eficiencia en función del parámetro B_L para distintos valores de anisotropía: $K = -0.4$ (línea azul), $K = 0$ (línea gris punteada) y $K = 0.5$ (línea roja). Se observa que para cada valor de anisotropía K la eficiencia es máxima justo en el punto crítico ($B_L = \sqrt{J^2 + 2JK}$). Consecuentemente la eficiencia máxima se desplaza hacia la izquierda o derecha al reducir o incrementan la anisotropía.

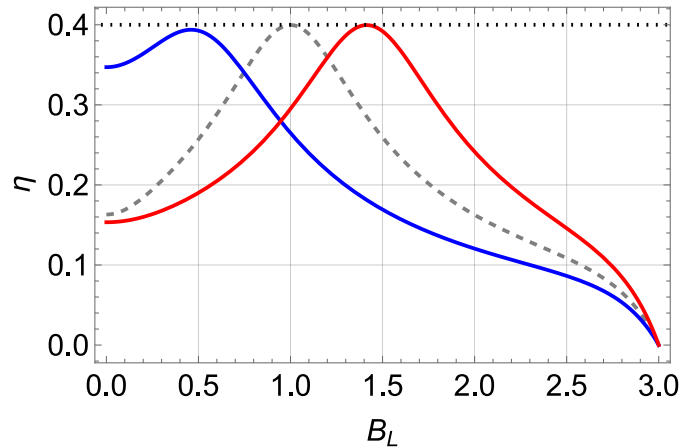


Figura 3.1.1: Eficiencia como función de B_L para $K = -0.4$ (línea azul), $K = 0$ (línea gris rayada) y $K = 0.5$ (línea roja) . Con $T_H = 0.2$, $T_L = 0.12$, $B_H = 3$ y $J = 1$. La línea negra punteada corresponde a la eficiencia de Carnot para las temperaturas dadas ($\eta = 0.4$)

Es importante notar que el modelo recupera la eficiencia con $K = 0$

reportada anteriormente [24], en el punto $B = J = 1$, donde la eficiencia es igual a la de Carnot. Aunque para el valor negativo de anisotropía se encuentra que la eficiencia esta ligeramente por debajo de 0.4. Esto se debe a que para alcanzar la eficiencia máxima en el punto crítico es necesario que a bajas temperaturas de los reservorios térmicos el estado fundamental sea por diferencia el más poblado. Y al tener anisotropía $K < 0$ el espacio entre los distintos niveles de energía se ve reducido, lo que provoca que, con las temperaturas usadas, la participación de los niveles distintos del estado base no sea despreciable, lo que, en consecuencia, causa la caída en la eficiencia al rededor del punto crítico en la curva azul de la figura 3.1.1. Aunque, en caso de elegir temperaturas aun más bajas, se recupera la eficiencia de Carnot. Al igual que en el caso sin anisotropía uniaxial la eficiencia se ve reducida cuando B_l se aleja del punto crítico. Sin embargo, esta caída en la eficiencia no es tan rápida si K es distinto de 0, por lo que la eficiencia permanece óptima para un mayor rango de valores de B_l .

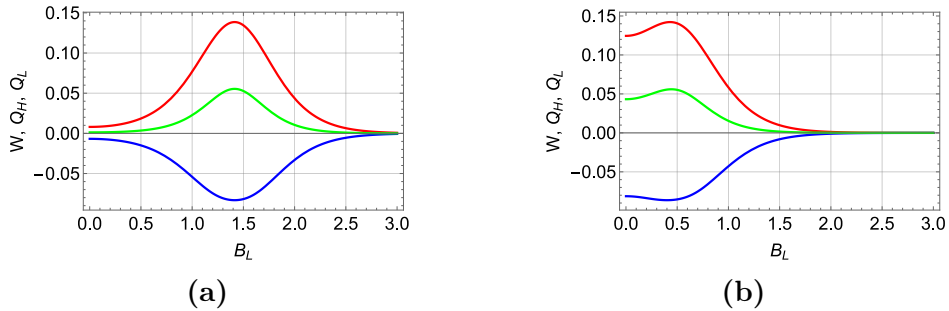


Figura 3.1.2: Calor de entrada (línea roja), calor de salida (línea azul) y trabajo total (línea verde) en función de B_L , para (a) $K = 0.5$ y (b) $K = -0.4$. Con $T_H = 0.2$, $T_L = 0.12$, $B_H = 3$ y $J = 1$

Por ejemplo, para $K = 0.5$ la eficiencia es mayor a la mitad de Carnot en un rango un 9.2% mayor que para $K = 0$. También se puede notar que, en la figura 3.1.2, que el trabajo es maximizado en el mismo valor de B_l que en la eficiencia. En el caso de $K = 0.5$ (3.1.2a) el trabajo se maximiza en $B_l \sim 1.4$ mientras que para $K = -0.4$ (3.1.2b) esto sucede con $B_l \sim 0.45$.

Para entender como reacciona el sistema a diferentes temperaturas, se gráfica la eficiencia y el trabajo en función de la temperatura alta T_H , mientras se mantiene $T_L = 0.6T_H$, $J = 1$ y el campo bajo B_L en el punto crítico, para distintos valores de anisotropía ($K = -0.4, 0, 0.5$) en la figura 3.1.3. Como es de esperarse, al aumentar la temperatura, en general, la eficiencia del ciclo cae,

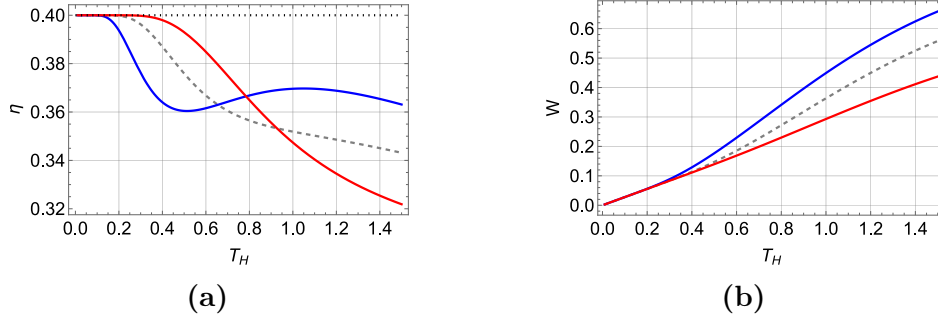


Figura 3.1.3: Eficiencia (a) y Trabajo (b) en función de T_H ($T_L = 0.6T_H$) operando en el QCP ($B_L = B_{\text{crit}}$) para $J = 1$. Con $B_H = 5$, $K = -0.4$ (línea azul), $K = 0$ (línea gris rayada) y $K = 0.5$ (línea roja). La línea negra punteada corresponde a la eficiencia de Carnot (0.4).

esto, en principio sucede más rápido para $K = -0.4$, pero luego comienza a aumentar nuevamente y alcanza un máximo local para una temperatura alta T_H cercana a 1, y para temperaturas aun mayores la eficiencia se mantiene por sobre los otros dos valores de anisotropía. Se sospecha que esto se debe a que a estas temperaturas la influencia del resto de niveles de energía resulta positiva para la eficiencia a partir de $T_H > 0.8$.

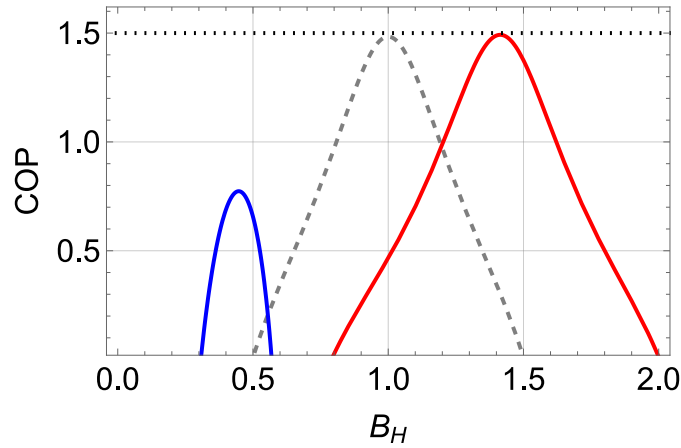


Figura 3.1.4: Coeficiente de rendimiento en función del campo alto B_H , para $K = -0.4$ (línea azul), $K = 0$ (línea gris rayada) y $K = 0.5$ (línea roja). Con $B_L = 0.05$, $T_H = 0.125$ y $T_L = 0.6T_H$.

Al igual que en el caso del motor, para un refrigerador se alcanza el COP de Carnot en el QCP como se observa en la figura 3.1.4. Pero este caso es más restrictivo con el rango de temperaturas, requiriendo que estas sean aun más bajas para alcanzar el límite de Carnot. Esto se debe a que el refrigerador opera con campos más bajos, donde los niveles de energía del sistema se

encuentran más juntos causando que los dos estados más energéticos influyeran negativamente el ciclo. Este modo de operación del ciclo de Stirling se ve afectado positivamente por la inclusión de la anisotropía cuando $K > 0$ debido a que separa los niveles de energía, esto amplía el rango de temperaturas donde el COP es alto. Contrariamente, cuando $K < 0$ los niveles de energía se encuentran más juntos, por lo que se reducen aun más las temperaturas requeridas para alcanzar el límite de Carnot, como se observa en la figura 3.1.5.

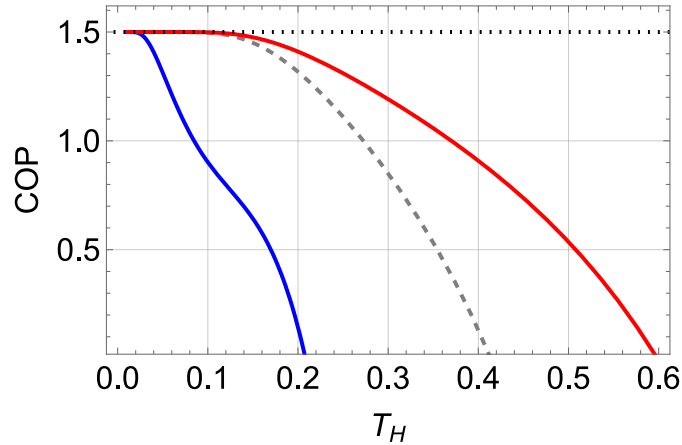


Figura 3.1.5: Coeficiente de rendimiento en función del campo alto T_H , para $K = -0.4$ (línea azul), $K = 0$ (línea gris rayada) y $K = 0.5$ (línea roja). Con $B_L = 0.05$, $B_H = B_{\text{crit}}$ y $T_L = 0.6T_H$.

3.2. Análisis teórico

Purkait y Biswas[24] dan un breve análisis teórico del porque el ciclo de Stirling alcanza la eficiencia de Carnot a bajas temperaturas trabajando cerca del QCP en un sistema de 2 qubits equivalente al considerado en este trabajo pero sin un término de anisotropía. Esta explicación puede extenderse a cualquier clase de sistemas que posea una transición de fase cuántica de primer orden:

Cuando la temperatura, en unidades de $k_B = 1$, es mucho menor que la diferencia de energía entre el estado base y el primer estado excitado, se observa que la entropía permanece prácticamente constante durante los procesos isomagnéticos, por lo que en este límite pueden ser considerados además isentrópicos (o adiabáticos). En general la eficiencia y el coeficiente de rendimiento del ciclo de Stirling puede escribirse como: (ver figura 2.4.1)

$$\eta = \frac{T_H(S_B - S_A) + (U_C - U_B) + T_L(S_D - S_C) + (U_A - U_D)}{T_H(S_B - S_A) + (U_A - U_D)} \quad (3.1)$$

$$\epsilon = \frac{T_L(S_D - S_C) + (U_A - U_D)}{|T_H(S_B - S_A) + (U_C - U_B) + T_L(S_D - S_C) + (U_A - U_D)|} \quad (3.2)$$

Supongamos un sistema de espines sometidos a un campo magnético con un estado fundamental a campo alto con degeneración g_1 y que presente un punto crítico cuántico donde la degeneración del estado base sea g_2 ($g_1 < g_2$). A este sistema se le aplica un ciclo de Stirling como se indica en la figura 2.4.1 donde el campo bajo se encuentra en el punto crítico si este opera como un motor. Y en caso de operar como un refrigerador, sera el campo alto el que se encuentre en el QCP.

Durante el ciclo de Stirling, operando como un motor, en la primera etapa isomagnética $A \rightarrow D$, si se trabaja a temperaturas lo suficientemente bajas solo se poblará el estado base, por lo que $U_A \approx U_D$ y la entropía del sistema es ambos puntos $S_A \approx S_D \approx \ln g_1$. En la segunda etapa isomagnética $B \rightarrow C$ de manera similar se tiene que la energía interna se mantiene prácticamente constante ($U_B \approx U_C$) y el sistema tiene una entropía $S_B \approx S_C \approx \ln g_2$. De esta manera la eficiencia resulta en:

$$\eta \approx \frac{T_H \ln(g_2/g_1) - T_L \ln(g_2/g_1)}{T_H \ln(g_2/g_1)} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (3.3)$$

Es importante notar que bajo estas aproximaciones en trabajo del ciclo es no nulo, y es proporcional a la diferencia entre las temperaturas de los reservorios térmicos y al logaritmo natural de la razón entre g_1 y g_2 :

$$W \approx (T_H - T_L) \ln \frac{g_2}{g_1} \quad (3.4)$$

Este límite para el trabajo se puede evidenciar en las figuras 3.1.2 y 3.1.3. Donde en el primero se observa que el peak de trabajo se encuentra en el QCP con un valor cercano a $W \approx 0.055$ para $K = 0.5$ y $W \approx 0.056$ cuando $K = -0,4$ lo que coincide con 3.4 considerando los parámetros utilizados. Y en la segunda figura mencionada, el trabajo en función de la temperatura se acerca mucho a una recta para temperaturas bajas, aproximadamente $T < 0.3$, este comportamiento es más evidente para $K = 0.5$ debido a que la separación de los niveles de energía amplía el el rango de temperatura óptima.

Considerando las mismas aproximaciones del caso anterior pero con $S_A \approx S_D \approx \ln g_2$ y $S_B \approx S_C \approx \ln g_1$, esto debido a que ahora es el campo alto el que se encuentra en el QCP. Se tiene para el COP del ciclo de Stirling:

$$\epsilon \approx \frac{T_L \ln(g_2/g_1)}{|T_L \ln(g_2/g_1) - T_H \ln(g_2/g_1)|} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \quad (3.5)$$

Similar al caso del motor, se tiene un calor extraído por el sistema no nulo al existir el QCP:

$$Q_L \approx T_L \ln g_2/g_1. \quad (3.6)$$

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo, se analizó el rendimiento de un ciclo de Stirling cuya sustancia de trabajo corresponde a un sistema de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ descrito por un modelo de Heisenberg tipo XX con anisotropía uniaxial con el espín total en el eje y . El parámetro de control para el ciclo propuesto corresponde a un campo magnético externo aplicado en el eje z . Se examinó el punto crítico cuántico (QCP) del modelo a través de la correlación y la concurrencia. Se demostró que el punto crítico cuántico juega un rol fundamental en el trabajo, la eficiencia y el coeficiente de rendimiento (COP) del ciclo propuesto [24, 27–29].

Los resultados indican que la incorporación de la anisotropía, que aparece explícitamente en el QCP, desplaza los puntos de eficiencia máxima (Carnot) en el espacio del parámetro de control del ciclo, ya sea hacia la izquierda o la derecha del caso previamente reportado para $K = 0$ (sin anisotropía). Específicamente, para $K < 0$, la máxima eficiencia posible se obtiene para campos magnéticos menores en comparación con $K = 0$, y para $K > 0$, se alcanza para campos mayores.

Adicionalmente, debido a la estructura de los niveles de energía, es posible identificar áreas donde la incorporación de la anisotropía muestra un mejor rendimiento en comparación con su ausencia, así como un mayor trabajo en general. Por lo tanto, incluir el término de anisotropía mejora el rendimiento de la máquina térmica desde un punto de vista termodinámico. Además, se demostró la estrecha relación entre la termodinámica y la teoría de la información en este sistema bipartito.

A bajas temperaturas, se encontró explícitamente que el ciclo de Stirling

cuántico alcanza el límite de Carnot con un trabajo (motor) o calor extraído (refrigerador) no nulo cuando existe un punto crítico cuántico (QCP). Este hallazgo subraya la importancia del QCP en la optimización de la eficiencia y el rendimiento de ciclos térmicos cuánticos, destacando la relevancia de la anisotropía en la mejora de estos parámetros.

En resumen, el análisis realizado demuestra que la incorporación de anisotropía en el modelo de Heisenberg tipo XX con espines $\frac{1}{2}$ no solo modifica los puntos de máxima eficiencia en el espacio del parámetro de control, sino que también puede mejorar significativamente el rendimiento del ciclo de Stirling cuántico. Estos resultados proporcionan una comprensión más profunda de la relación entre los fenómenos cuánticos críticos y las propiedades termodinámicas de motores térmicos a nanoescala, ofreciendo nuevas perspectivas para el diseño y la optimización de dispositivos cuánticos altamente eficientes, destacando la relevancia de la anisotropía magnética.

Bibliografía

- [1] E Geva and R Kosloff. A quantum-mechanical heat engine operating in finite-time, a model consisting of spin-1/2 systems as the working fluid. *JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 96(4):3054–3067, FEB 15 1992. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.461951.
- [2] E Geva and R Kosloff. On the classical limit of quantum thermodynamics in finite-time. *JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 97(6):4398–4412, SEP 15 1992. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.463909.
- [3] John P. S. Peterson, Tiago B. Batalhao, Marcela Herrera, Alexandre M. Souza, Roberto S. Sarthour, Ivan S. Oliveira, and Roberto M. Serra. Experimental characterization of a spin quantum heat engine. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 123(24), DEC 9 2019. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.123.240601.
- [4] JZ He and JC Chen. Quantum refrigeration cycles using spin-(1)/(2) systems as the working substance. *PHYSICAL REVIEW E*, 65(3, 2A), MAR 2002. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.65.036145.
- [5] Ting Zhang, Wei-Tao Liu, Ping-Xing Chen, and Cheng-Zu Li. Four-level entangled quantum heat engines. *PHYSICAL REVIEW A*, 75(6), JUN 2007. ISSN 1050-2947. doi: 10.1103/PhysRevA.75.062102.
- [6] Markus J. Henrich, Guenter Mahler, and Mathias Michel. Driven spin systems as quantum thermodynamic machines: Fundamental limits. *PHYSICAL REVIEW E*, 75(5, 1), MAY 2007. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.75.051118.
- [7] H Saygin and A Sisman. Quantum degeneracy effect on the work output from a stirling cycle. *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, 90(6):3086–3089, SEP 15 2001. ISSN 0021-8979. doi: 10.1063/1.1396831.
- [8] G. F. Zhang. Entangled quantum heat engines based on two two-spin systems with dzyaloshinski-moriya anisotropic antisymmetric interaction. *EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D*, 49(1):123–128, AUG 2008. ISSN 1434-6060. doi: 10.1140/epjd/e2008-00133-0.
- [9] Baris Cakmak and Ozgur E. Mustecaplioglu. Spin quantum heat engines with shortcuts to adiabaticity. *PHYSICAL REVIEW E*, 99(3), MAR 6 2019. ISSN 2470-0045. doi: 10.1103/PhysRevE.99.032108.

- [10] Feng Wu, Lingen Chen, Shuang Wu, Fengrui Sun, and Chih Wu. Performance of an irreversible quantum carnot engine with spin $1/2$. *JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 124(21), JUN 7 2006. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.2200693.
- [11] M. Azimi, L. Chotorlishvili, S. K. Mishra, T. Vekua, W. Huebner, and J. Berakdar. Quantum otto heat engine based on a multiferroic chain working substance. *NEW JOURNAL OF PHYSICS*, 16, JUN 12 2014. ISSN 1367-2630. doi: 10.1088/1367-2630/16/6/063018.
- [12] AE Allahverdyan, RS Gracia, and TM Nieuwenhuizen. Work extraction in the spin-boson model. *PHYSICAL REVIEW E*, 71(4, 2), APR 2005. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.71.046106.
- [13] M. J. Henrich, F. Rempp, and G. Mahler. Quantum thermodynamic otto machines: A spin-system approach. *EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL-SPECIAL TOPICS*, 151:157–165, DEC 2007. ISSN 1951-6355. doi: 10.1140/epjst/e2007-00371-8.
- [14] Jianhui Wang, Jizhou He, and Yong Xin. Performance analysis of a spin quantum heat engine cycle with internal friction. *PHYSICA SCRIPTA*, 75(2):227–234, FEB 2007. ISSN 0031-8949. doi: 10.1088/0031-8949/75/2/018.
- [15] JC Chen, BH Lin, and B Hua. The performance of a quantum heat engine working with spin systems. *JOURNAL OF PHYSICS D-APPLIED PHYSICS*, 35(16):2051–2057, AUG 21 2002. ISSN 0022-3727. doi: 10.1088/0022-3727/35/16/322.
- [16] K. Ono, S. N. Shevchenko, T. Mori, S. Moriyama, and Franco Nori. Analog of a quantum heat engine using a single-spin qubit. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 125(16), OCT 15 2020. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.125.166802.
- [17] Ferdi Altintas and Ozgur E. Mustecaplioglu. General formalism of local thermodynamics with an example: Quantum otto engine with a spin- $1/2$ coupled to an arbitrary spin. *PHYSICAL REVIEW E*, 92(2), AUG 26 2015. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.92.022142.
- [18] F Wu, LG Chen, FR Sun, C Wu, and PQ Hua. Optimum performance parameters for a quantum carnot heat pump with spin- $1/2$. *ENERGY CONVERSION AND MANAGEMENT*, 39(11):1161–1167, AUG 1998. ISSN 0196-8904. doi: 10.1016/S0196-8904(98)00004-1.
- [19] A. Alecce, F. Galve, N. Lo Gullo, L. Dell’Anna, F. Plastina, and R. Zambrini. Quantum otto cycle with inner friction: finite-time and disorder effects. *NEW JOURNAL OF PHYSICS*, 17, JUL 9 2015. ISSN 1367-2630. doi: 10.1088/1367-2630/17/7/075007.

- [20] Ronnie Kosloff and Tova Feldmann. Optimal performance of reciprocating demagnetization quantum refrigerators. *PHYSICAL REVIEW E*, 82(1, 1), JUL 23 2010. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.82.011134.
- [21] Gil Katz and Ronnie Kosloff. Quantum thermodynamics in strong coupling: Heat transport and refrigeration. *ENTROPY*, 18(5), MAY 2016. doi: 10.3390/e18050186.
- [22] Ferdi Altintas, Ali U. C. Hardal, and Ozgur E. Mustecaplioglu. Quantum correlated heat engine with spin squeezing. *PHYSICAL REVIEW E*, 90(3), SEP 2 2014. ISSN 1539-3755. doi: 10.1103/PhysRevE.90.032102.
- [23] Nathan M Myers, Jacob McCready, and Sebastian Deffner. Quantum heat engines with singular interactions. *Symmetry*, 13(6):978, 2021.
- [24] Chayan Purkait and Asoka Biswas. Performance of heisenberg-coupled spins as quantum stirling heat machine near quantum critical point. *PHYSICS LETTERS A*, 442, AUG 5 2022. ISSN 0375-9601. doi: 10.1016/j.physleta.2022.128180.
- [25] Zhao Li-Mei and Zhang Guo-Feng. Entangled quantum otto and quantum stirling heat engine based on two-spin systems with dzyaloshinski-moriya interaction. *ACTA PHYSICA SINICA*, 66(24), DEC 20 2017. ISSN 1000-3290. doi: 10.7498/aps.66.240502.
- [26] Selcuk Cakmak. Benchmarking quantum stirling and otto cycles for an interacting spin system. *JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA B-OPTICAL PHYSICS*, 39(4):1209–1215, APR 1 2022. ISSN 0740-3224. doi: 10.1364/JOSAB.447206.
- [27] Ji-Zhou He, Xian He, and Jie Zheng. Thermal entangled quantum heat engine working with a three-qubit heisenberg xx model. *INT. J. THEOR. PHYS.*, 51:2066–2076, 2012. doi: 10.1007/s10773-012-1084-z.
- [28] Elena I. Kuznetsova, M. A. Yurischev, and Saeed Haddadi. Quantum otto heat engines on xyz spin working medium with dm and ksea interactions: operating modes and efficiency at maximal work output. *QUANTUM INFORMATION PROCESSING*, 22(192):192–1,192–23, 2023. doi: 10.1007/s11128-023-03944-z.
- [29] G. Lamargo Kamta and Anthony F. Starace. Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit heisenberg xy chain. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 88(10):107901–1,107901–4, 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.88.107901.
- [30] T. G. Werlang, C. Trippe, G. A. P. Ribeiro, and Gustavo Rigolin. Quantum correlations in spin chains at finite temperatures and quantum phase transitions. *Physical Review Letter*, 105(9), AUG 25 2010. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.095702.

- [31] G Vidal, JI Latorre, E Rico, and A Kitaev. Entanglement in quantum critical phenomena. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 90(22), JUN 6 2003. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.227902.
- [32] Robert E. Throckmorton and S. Das Sarma. Studying many-body localization in exchange-coupled electron spin qubits using spin-spin correlations. *Physical Review B*, 103:165431–1,165431–9, 2023. doi: 10.1103/PhysRevB.103.165431.
- [33] Kevin M. O’Connor and William K. Wootters. Entanglement rings. *Physical Review A*, 63:052302–1,052302–9, 2001. doi: 10.1103/PhysRevA.63.052302.
- [34] Zakaria Mzaouali and Morad El Baz. Long range quantum coherence, quantum & classical correlations in heisenberg xx chain. *PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, 518:119–130, MAR 15 2019. ISSN 0378-4371. doi: 10.1016/j.physa.2018.11.062.
- [35] T. G. Werlang, C. Trippe, G. A. P. Ribeiro, and Gustavo Rigolin. Quantum correlations in spin chains at finite temperatures and quantum phase transitions. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 105(9), AUG 25 2010. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.095702.
- [36] Charles H Bennett, Herbert J Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, 53(4):2046, 1996.
- [37] William K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80(10):2245, 1998.
- [38] Ariel Norambuena, Andrés Franco, and Raúl Coto. From the open generalized heisenberg model to the landau–lifshitz equation. *New Journal of Physics*, 22(10):103029, oct 2020. doi: 10.1088/1367-2630/abbbd3. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/abbbd3>.