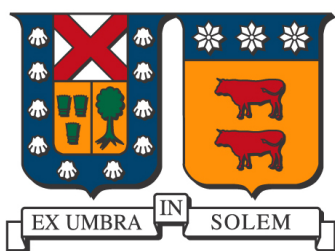


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO  
SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
VALPARAÍSO - CHILE



TRANSPORTE CUÁNTICO A TRAVÉS DE  
NANOESTRUCTURAS

ANA MARÍA CALLE ARCILA

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA

PROFESOR GUÍA: MÓNICA PACHECO DOLL

PROFESOR CORREFERENTE: PEDRO A. ORELLANA D.

SEPTIEMBRE - 2013

*A mis padres  
Flor María  
y Roberto Jairo*

# Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros y sentidos agradecimientos a mi tutora, la Profesora Mónica Pacheco y a mi cotutor, el Profesor Pedro Orellana. Les agradezco todos estos años de comprensión, disponibilidad, paciencia y compromiso con el desarrollo de este trabajo de grado. Valoro mucho todos estos años de trabajo en equipo, junto a ustedes he aprendido a ser una mejor investigadora y sobretodo una mejor persona, pero sobre todas las cosas, valoro mucho la amistad brindada durante estos años. Agradezco también a todas y cada una de las personas del Departamento de Física y a la Universidad Técnica Federico Santa María. Me siento muy orgullosa de haber realizado mis estudios de Doctorado en está excelente Universidad. Agradezco también a los Profesores Marcelo Apel de la Universidad Católica del Norte y a el Profesor George Martins de la Universidad de Oakland por sus enseñanzas. También quiero agradecer a Conicyt y a la Dirección General de Investigación y Postgrado (DGIP) por la financiación de estos estudios de Doctorado.

Quiero agradecer también a mi familia, especialmente a mis papás y a mi hermanita, quienes siempre me apoyaron y acompañaron desde la distancia y a quienes dedico esta tesis. Por último, le agradezco a Jorge, mi cómplice, estos años de aventuras.

# Resumen

Propiedades de transporte cuánticas asociadas a efectos de confinamiento en sistemas de muy baja dimensionalidad motivaron el desarrollo de este proyecto de tesis. Se presentarán algunos resultados asociados al transporte electrónico en los cuales, fenómenos de interferencia juegan un rol fundamental. El ordenamiento espacial de los componentes del sistema, su geometría y composición permiten modular las propiedades de propagación de los electrones dando lugar a resonancias Fano, efecto de proximidad, estados ligados de Andreev, efecto Kondo, entre otros. En específico, los sistemas considerados están basados en puntos cuánticos y anillos de puntos cuánticos, en donde algunos de sus componentes pueden o no ser superconductores. Inicialmente se estudió un sistema de dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a dos contactos metálicos normales y a un contacto superconductor. Aquí, las propiedades de transporte y shot noise permitieron dilucidar los efectos del contacto superconductor. Como consecuencia de los efectos de interferencia cuántica y el efecto de proximidad inducido por la presencia del superconductor, se encontró que el sistema exhibe resonancias Fano debido a estados ligados de Andreev. Esto abre la posibilidad de estudiar dichos estados ligados de Andreev por medio de los cambios en la transmisión entre dos contactos normales. Posteriormente, para el mismo sistema mencionado anteriormente, se estudió el efecto de incluir correlación entre electrones en el punto cuántico central, para lo cual fue necesario utilizar el método de bosones esclavos para  $U$  infinito lo cual permite obtener las propiedades de transporte en el régimen Kondo. Finalmente, se estudió el efecto Kondo de un anillo usando un método de diagonalización exacta.

# Abstract

Quantum transport properties associated to confinement effects in low dimensional systems motivated the development of this thesis project. Results associated with electron transport, in which, interference phenomena play a fundamental role, are presented. The spatial distribution of system components, its geometry and composition allow to modulate the properties of propagation of the electrons, resulting in Fano resonances, proximity effect, Andreev bound states and Kondo effect, among others. The systems considered here are based on quantum dots and quantum rings, where some components may or may not be superconducting. Initially, a system of a T-shaped quantum dots coupled to two normal metal contacts and a superconductor contact, is studied. Here, the transport properties and shot noise allowed to elucidate the effects of the superconductor contact. As a result of quantum interference and proximity effects induced by the superconductor presence, it was found that the system exhibits resonances due to Fano Andreev bound states. This opens the possibility of studying these Andreev bound states through changes in the transmission between two normal contacts. Afterwards, for the same system mentioned above, we studied the effect of including correlation between electrons in the central quantum dot, for which it was necessary to use the slave boson method for infinite  $U$ , this allows to obtain the transport properties in the Kondo regime. Finally, we studied the Kondo effect of a quantum ring using an exact diagonalization method.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Puntos cuánticos . . . . .	11
1.2. Reflexiones de Andreev y Efecto de Proximidad . . . . .	14
1.2.1. Reflexiones de Andreev . . . . .	15
1.2.2. Shot Noise . . . . .	17
1.3. Efecto Kondo . . . . .	18
1.4. Aproximación de Landauer . . . . .	20
<b>2. Transporte a través de puntos cuánticos</b>	<b>25</b>
2.1. Introducción . . . . .	25
2.2. Dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a tres contactos normales: efecto de decoherencia . . . . .	26
2.3. Dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a dos contactos normales y a un contacto superconductor: Estados Ligados de Andreev . . . . .	30
2.3.1. Descripción del modelo teórico . . . . .	30
2.3.2. Propiedades de transporte . . . . .	34
2.3.3. Shot Noise . . . . .	42
<b>3. Efecto Kondo en puntos cuánticos</b>	<b>49</b>
3.1. Doble punto cuántico en configuración T acoplado a tres contactos normales . . . . .	49
3.1.1. Método de bosones esclavos para $U$ infinito . . . . .	49
3.1.2. Propiedades de transporte . . . . .	53
3.2. Efecto Kondo en un anillo . . . . .	55
<b>4. Conclusiones</b>	<b>63</b>

A. Cálculo de las funciones de Green del sistema de Doble punto cuántico en configuración T acoplado a dos contactos normales y un SC	<b>65</b>
B. Shot noise para un sistema N-S	<b>69</b>

# Índice de figuras

1.1.	a) Diagrama esquemático de una heteroestructura semiconductor. El punto cuántico está localizado entre dos barreras no conductoras de AlGaAs. Aplicando un voltaje negativo a las compuertas laterales se reduce el diámetro efectivo del PC (línea discontinua). Esto reduce uno por uno el número de electrones hasta que el PC queda totalmente vacío. b) Diagrama de energía del PC. . . . .	12
1.2.	a) Medidas de corriente en función del voltaje de puerta para un PC. El primer pico corresponde al voltaje para el cual entra el primer electrón al PC, el número de electrones se incrementa por uno para cada pico subsiguiente. La distancia entre picos proporciona una medida de la energía de adición b) La adición de electrones individuales al PC puede ser representado en términos de órbitas circulares [4]. . . . .	14
1.3.	a) Reflexión normal por un aislante (I) versus reflexiones de Andreev por un superconductor (S) de un electrón incidente desde un metal normal (N) cerca al nivel de Fermi. b) Diagrama de las reflexiones de Andreev: un electrón (e) es reflejado como un hueco (h) con el mismo momentum y velocidad opuesta. La carga faltante $2e$ es absorbida como un par de Cooper por el SC. . . . .	16
1.4.	a) Modelo de Anderson para una impureza magnética de un nivel con energía $\epsilon_0$ por debajo de la energía de Fermi del metal. b) El efecto Kondo produce la aparición de una resonancia extra en la energía de Fermi [19]. . . . .	20

2.1.	Densidad de estados del punto cuántico central en función de la energía. El recuadro muestra como evoluciona la antiresonancia Fano a medida que se aumenta el acoplamiento con el contacto normal S. Los parámetros que se usaron fueron: $t = 0,2\Gamma_L$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ , $\epsilon_1 = 0$ . . . . .	28
2.2.	Probabilidad de transmisión de L a R en función de la energía. El recuadro muestra como a medida que se aumenta el acoplamiento con el contacto normal S, la antiresonancia Fano desaparece paulatinamente. Se usaron los mismos parámetros de la figura 2.1. . . . .	29
2.3.	Probabilidad de transmisión de L a R en función de la energía para $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ . Los parámetros que se usaron fueron: $t = 0,2\Gamma_L$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ . . . . .	30
2.4.	Sistema de dos puntos cuánticos acoplados a dos contactos normales L y R y a un contacto superconductor S . . . . .	31
2.5.	Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía para un punto cuántico doble en forma de T conectado a dos contactos normales (L y R) y a un contacto superconductor (S). Los parámetros usados fueron: $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ y $t = 0,2\Gamma_L$ a) $\Gamma_S = 0$ b) $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c) $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$ y d) $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a $\Delta = 1\Gamma_L$ y la línea discontinua a $\Delta = 0$ , es decir, para el caso en que los tres contactos son normales. . . . .	37
2.6.	Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía. Los parámetros usados fueron: $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_1 = 0$ , $\epsilon_2 = -3\Gamma_L$ y $t = 0,2\Gamma_L$ a) $\Gamma_S = 0$ b) $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c) $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$ y d) $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a $\Delta = 1\Gamma_L$ y la línea discontinua a $\Delta = 0$ . . . . .	38
2.7.	Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía. En el panel derecho $\epsilon_2 = 0$ , $\epsilon_1 = 0$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $t = 0,2\Gamma_L$ a) $\Gamma_S = 0$ b) $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c) $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$ y d) $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . En el panel izquierdo la energía del punto cuántico central es $\epsilon_2 = -3\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a $\Delta = 1\Gamma_L$ y la línea discontinua a $\Delta = 0$ . . . . .	39

2.8. Probabilidad de Transmisión del contacto normal L al contacto superconductor S: $T_{LS} = T_A + T_{qp}$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_1 = 0$ , $\epsilon_2 = 0$ y $t = 0,2\Gamma_L$ a) $\Gamma_S = 1\Gamma_L$ , b) $\Gamma_S = 2\Gamma_L$ y c) $\Gamma_S = 4\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a la transmisión total de L a S y la línea discontinua a representa la probabilidad de transmisión de las cuasipartículas . . . . .	41
2.9. Probabilidad de transmisión del contacto L a R (panel izquierdo) y transmisión de Andreev (panel derecho) en función de la energía para los parámetros: $\Delta = 1\Gamma_L$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $t = 0,2\Gamma_L$ , $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ and $\Gamma_S = 1\Gamma_L$ para a) y d), $\Gamma_S = 2\Gamma_L$ para b) y e) y $\Gamma_S = 4\Gamma_L$ para c) y f). La línea discontinua en el panel izquierdo corresponde a la transmisión de L a R para $\Delta = 0$ , i.e para un sistema con tres contactos normales. . . . .	42
2.10. Energías de las antirresonancias dentro del gap en función de $\Delta$ para $\Gamma_S = \Gamma_L$ , $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ , $t = 0,2\Gamma_L$ . . . . .	43
2.11. Densidad de estados del punto cuántico lateral en función de la brecha de energía del superconductor. Se consideró $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ , $\Gamma_L = \Gamma_R$ y $t = 0,2\Gamma_L$ . . . . .	43
2.12. Densidad de estados del punto cuántico central en función de la brecha de energía del superconductor. Se consideró $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ , $\Gamma_L = \Gamma_R$ y $t = 0,2\Gamma_L$ . . . . .	44
2.13. Densidad local de estados para: a) punto cuántico lateral and b) punto cuántico central. La línea sólida corresponde a $\Delta = 1\Gamma_L$ mientras la línea discontinua corresponde a $\Delta = 0$ . Se utilizaron los parámetros $\Gamma_R = \Gamma_L$ y $\Gamma_S = \Gamma_L$ . El recuadro en b) muestra la evolución de las antirresonancias Fano con $\Gamma_S$ para c) $\Gamma_S = 1\Gamma_L$ d) $\Gamma_S = 2\Gamma_L$ , e) $\Gamma_S = 3\Gamma_L$ , y f) $\Gamma_S = 4\Gamma_L$ . . . . .	45
2.14. Corriente de Andreev, shot noise debido a las reflexiones de Andreev y Factor Fano en función del voltaje aplicado. Los parámetros usados fueron: $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ , $t = 0,2\Gamma_L$ , $\Gamma_R = \Gamma_L$ y $\Gamma_S = 0.5, 1, 2$ y $4\Gamma_L$ . Donde, $I_0 = \frac{2e}{h}$ y $S_0 = \frac{4e^2}{h}$ y $F_{LR} = \frac{S_{LR}}{2q I_{LR} }$ . . . . .	47
2.15. Corriente L-R, shot noise y Factor Fano en función del voltaje externo aplicado. Los parámetros usados fueron los mismos de la figura 2.14. . . . .	48
3.1. Densidad de estados y transmisión para un sistema de dos puntos cuánticos y tres contactos normales en régimen Kondo. $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ , $\epsilon_1 = 0,001\Gamma_L$ . . . . .	54

3.2. Densidad de estados y transmisión para un sistema de dos puntos cuánticos y tres contactos normales en régimen Kondo. $\Gamma_R = \Gamma_L$ , $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ , $\epsilon_1 = 0,001\Gamma_L$ . El pico en el nivel de Fermi es debido al efecto Kondo. . . . .	55
3.3. $\tilde{\epsilon}_2$ en función de $\epsilon_2$ . La interacción renormaliza el nivel de energía del punto cuántico y lo alinea con la energía de Fermi en régimen Kondo . . . . .	56
3.4. Esquema del anillo de M-1 puntos cuánticos conectado a dos contactos L y R y sobre el cual se aplica un campo magnético. . . . .	56
3.5. Descripción del esquema usado para la implementación de LDECA para el caso particular de un anillo de M=4 acoplado a dos cadenas semi-infinitas (contactos L y R). . . . .	57
3.6. Conductancia en función de $\Phi$ y $V_g$ para un anillo de 4 sitios y un cluster de 6 sitios para $U = 0$ y $t' = 0,25t_a$ . Para $\Phi/\Phi_0 = 1/2$ se puede observar una cancelación total del efecto AB. . . . .	60
3.7. Conductancia en función de $\Phi$ y $V_g$ para un anillo de 4 sitios y un cluster de 6 sitios a temperatura cero y para $U = 0,5t_a$ y $t' = 0,25t_a$ . . . . .	61
3.8. Conductancia en función de $\Phi$ y $V_g$ para un anillo de 6 sitios y un cluster de 8 sitios para $U = 0,5t_a$ y $t' = 0,25t_a$ . . . . .	62

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Puntos cuánticos

Avances en las técnicas de fabricación de nanoestructuras han permitido fabricar pequeñas “cajas” de electrones en semiconductores que miden unos pocos ångströms ( $\text{\AA}$ ). Estas pequeñas cajas pueden contener desde uno, hasta cientos de miles de electrones y su tamaño y forma se pueden controlar con gran precisión. Estas estructuras acopladas a contactos eléctricos a través de junturas túnel han recibido varios nombres: transistores de un solo electrón, puntos cuánticos, gases de electrones cero dimensionales e islas de Coulomb. Pero quizás el nombre que mejor describe sus propiedades es el de átomos artificiales, ya que las propiedades electrónicas de los puntos cuánticos muestran muchos paralelos con las de los átomos reales, pues al igual que en estos, la carga y los niveles de energía están cuantizados debido al confinamiento de los electrones en las tres direcciones espaciales [1]. Sin embargo, a diferencia de los átomos reales, los átomos artificiales tienen una propiedad única: la corriente a través del Punto Cuántico (PC) y la capacitancia entre sus contactos puede variar muchos ordenes de magnitud cuando a su carga se añade un electrón.

Debido a que el interés de este trabajo es el transporte electrónico a través de puntos cuánticos, me limitaré a hablar solo de aquellos que son fabricados entre dos contactos eléctricos llamados fuente (source) y drenaje (drain). En tal configuración las medidas de corriente-voltaje son usadas para observar las propiedades de los átomos reales en los PC. Además es posible variar el número exacto de electrones cambiando el voltaje de puerta ( $V_g$ ) aplicado.

Este control sobre los parámetros del sistema permite escanear los elementos de la tabla periódica simplemente cambiando el voltaje.

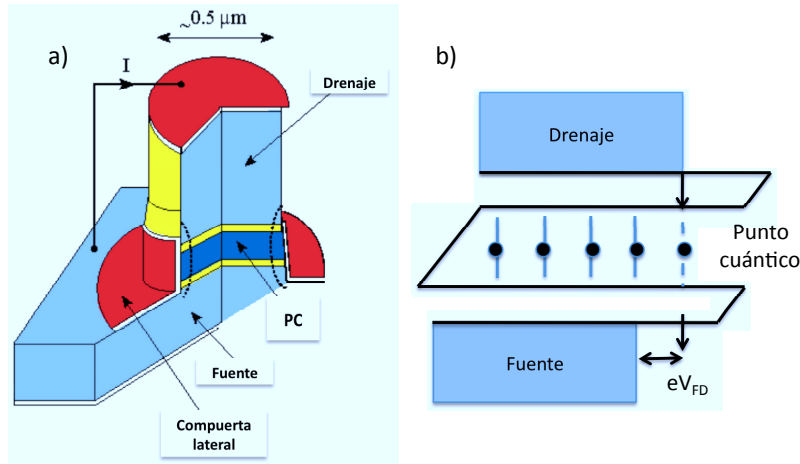


Figura 1.1: a) Diagrama esquemático de una heteroestructura semiconductor. El punto cuántico está localizado entre dos barreras no conductoras de AlGaAs. Aplicando un voltaje negativo a las compuertas laterales se reduce el diámetro efectivo del PC (línea discontinua). Esto reduce uno por uno el número de electrones hasta que el PC queda totalmente vacío. b) Diagrama de energía del PC.

En la Figura 1.1 (a) se muestra un PC vertical de unos 500nm de diámetro y 10nm de ancho, con capacidad para 100 electrones aproximadamente, el PC está entre dos capas de barreras no conductoras las cuales lo separan del material conductor arriba y abajo, es decir, de los contactos fuente y drenaje. Aplicando un voltaje negativo al contacto metálico que está alrededor del PC se puede reducir el número de electrones. Esto hace posible registrar el flujo de corriente a través del PC cuando el número de electrones, y por lo tanto, su energía varía [2]. Para entender un poco más el funcionamiento de los átomos artificiales es necesario medir la energía para agregar o remover un electrón, esto se hace midiendo la corriente a través del átomo artificial. El tunelamiento de electrones desde la fuente al punto cuántico y del punto cuántico al drenaje, está esencialmente dominado por un efecto clásico que surge del carácter discreto de la carga. Cuando las barrera de potencial que separan el PC de los contactos (fuente y drenaje) son relativamente altas, el

tunelamiento hacia y desde el PC es débil y el número de electrones  $N$  en el PC, será un número entero bien definido. El flujo de corriente como resultado de una secuencia de eventos de tunelamiento de electrones individuales a través del PC, requiere que el número de electrones fluctúe por uno. Sin embargo, para añadir un electrón extra al PC se debe pagar un costo de energía, debido a la repulsión Coulombiana entre los electrones que están en el PC. Es necesario, por lo tanto, una energía adicional para agregar un electrón y la corriente no fluirá hasta que un incremento de voltaje suministre esta energía. Este fenómeno es conocido como Bloqueamiento de Coulomb [3]. Debido a este fenómeno, la corriente puede fluir solo cuando los electrones en los contactos tienen energía suficiente para ocupar el estado de energía más bajo posible para  $N + 1$  electrones en el PC (figura 1.1(b)). Cambiando el voltaje de puerta los niveles de energía del punto cuántico son desplazados a través de la energía de Fermi de los contactos.

Esto lleva a una serie de resonancias muy marcadas en la corriente (figura 1.2 (a)). Para cada pico de la figura el número de electrones alterna entre  $N$  y  $N + 1$ . Entre los picos, la corriente es cero y  $N$  permanece constante, la distancia entre picos es proporcional a la energía de adición, es decir, a la diferencia entre el potencial de ionización (mínima energía necesaria para remover un electrón) y la afinidad electrónica (relacionada con la energía involucrada para capturar un electrón). Para entender esto, podemos usar un modelo simple para describir un PC conocido como modelo de interacción constante, en el cual la interacción de Coulomb entre electrones es independiente de  $N$  y está descrito por la capacitancia  $C$  del PC. Como se observa en la figura 1.2, la adición de electrones al PC, puede ser representado con órbitas circulares. Para añadir un segundo electrón al PC se requiere una energía de carga  $e^2/C$ . Añadir un tercer electrón al PC costará una energía extra, es decir,  $e^2/C$  más la diferencia de energía entre los estados cuánticos  $\Delta E$  consecutivos. El primer pico en la gráfica marca la energía en la cual el primer electrón entra al punto cuántico, el segundo pico registra la entrada del segundo electrón y así sucesivamente. El espacio entre los picos no es constante y se requiere más energía para añadir el segundo, el sexto y el doceavo electron [4].

Es importante destacar que los puntos cuánticos además de proporcionar una analogía con los átomos reales, permiten ser usados en experimentos en regímenes en los cuales los átomos reales no pueden acceder, por ejemplo, al aplicar un campo magnético las órbitas tanto de los átomos como de los PC son alteradas, pero el efecto de un campo magnético de  $1T$  en un PC es

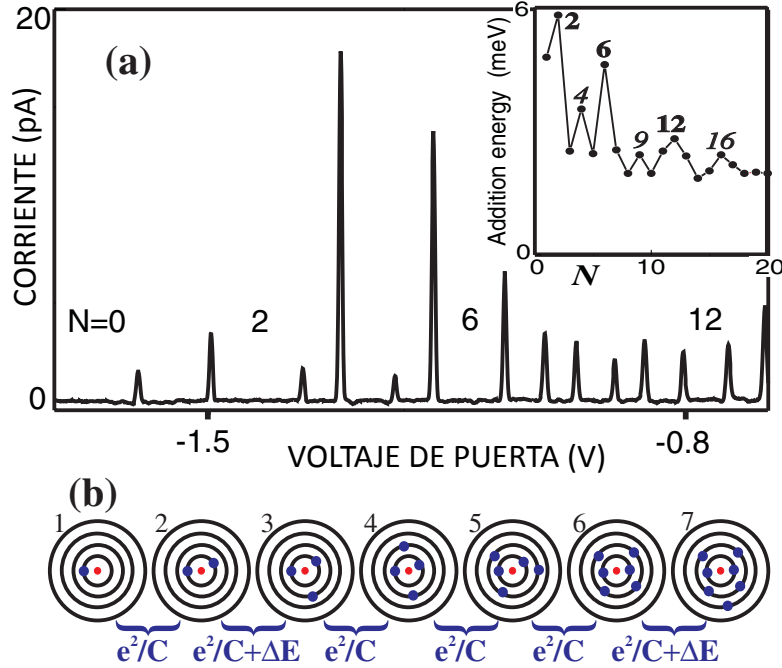


Figura 1.2: a) Medidas de corriente en función del voltaje de puerta para un PC. El primer pico corresponde al voltaje para el cual entra el primer electrón al PC, el número de electrones se incrementa por uno para cada pico subsiguiente. La distancia entre picos proporciona una medida de la energía de adición b) La adición de electrones individuales al PC puede ser representado en términos de órbitas circulares [4].

comparable con el efecto de un millón de teslas en un átomo real.

## 1.2. Reflexiones de Andreev y Efecto de Proximidad

El contacto entre materiales con diferentes ordenamientos de largo alcance modifica sus propiedades cerca de la interfase. En el caso de una interfase entre un metal normal y un superconductor N-S, el efecto de proximidad está relacionado con la aparición de propiedades superconductoras en el me-

tal normal, debido a que ha sido puesto en contacto eléctrico con el Superconductor (SC). Esta correlación se extiende en una gran escala de longitud en el metal normal (N) aún en ausencia de interacción entre electrones. La energía de Thouless, dada por  $E_C = \frac{\hbar}{\tau_D}$ , es una energía característica de metales desordenados y es de central importancia en el efecto de proximidad debido a que es una medida de sensibilidad de los niveles de energía a un cambio en las condiciones de frontera del sistema. Esta energía está caracterizada por el tiempo  $\tau_D = \frac{L^2}{D}$ , donde L es la longitud de la muestra y D es el coeficiente de difusión.  $\tau_D$ , no es más que el tiempo requerido por un solo electrón para sentir la presencia de la interfase. En el caso de una interfase N-S el tiempo característico está dado por  $\tau_D = \frac{L}{v_F}$ , donde  $v_F$ , es la velocidad de Fermi [5].

Una de las consecuencias más importantes del efecto de proximidad debido al contacto entre un metal normal y un SC, son las reflexiones de Andreev [6]. Andreev demostró como un electrón de un metal es convertido en un par de Cooper y explicó el mecanismo de transformación de una corriente eléctrica disipativa en una supercorriente sin disipación en la interfase N-S. Por lo tanto, El efecto de proximidad, no es más que el resultado de una interacción entre las RA en la interfase y coherencia de largo alcance en el metal normal.

### 1.2.1. Reflexiones de Andreev

Las Reflexiones de Andreev (RA) juegan un papel central en el efecto de proximidad, debido a que proporcionan un mecanismo simple para convertir estados de electrones individuales en el metal N, en pares de Cooper en el SC. Las diferencias entre reflexión normal y las RA, se ilustran en la figura 1.3.

Las principales características de las RA son [7]:

- Proceso de dos electrones:** Debido a la existencia de una brecha de energía en la densidad de estados del SC justo en la energía de Fermi, la transferencia de una sola cuasipartícula con una energía  $\epsilon < \Delta$  esta prohibida (ver figura 1.3 b)). Sin embargo, es posible otro tipo de transferencia cuando se consideran procesos de segundo orden. Un electrón incidente puede ser transferido al SC si un segundo electrón es también transferido a través de la interfase formando un par de Cooper en el SC. En términos de excitaciones individuales, este proceso es equivalente a la reflexión de un hueco. La manifestación de esta

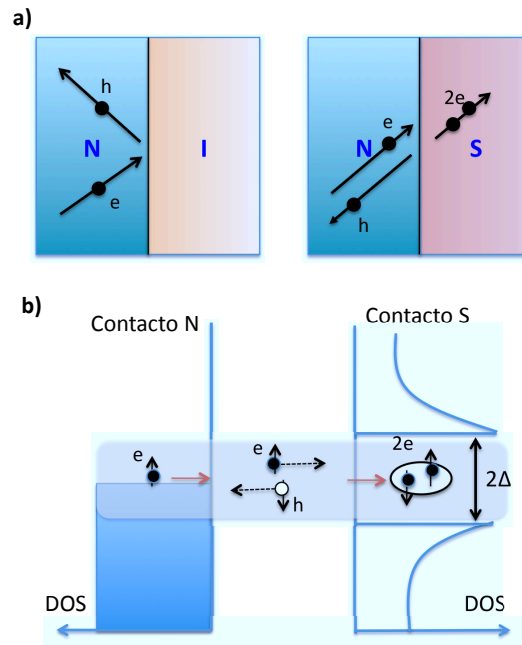


Figura 1.3: a) Reflexión normal por un aislante (I) versus reflexiones de Andreev por un superconductor (S) de un electrón incidente desde un metal normal (N) cerca al nivel de Fermi. b) Diagrama de las reflexiones de Andreev: un electrón ( $e$ ) es reflejado como un hueco ( $h$ ) con el mismo momentum y velocidad opuesta. La carga faltante  $2e$  es absorbida como un par de Cooper por el SC.

transferencia de doble carga en medidas de transporte para energías por debajo de la brecha de energía del SC, se verá reflejada en una conductancia dos veces mayor que la medida para un sistema N-N.

- **Retro-reflexión:** La reflexión de Andreev es una retro-reflexión perfecta solo para electrones incidentes en la energía de Fermi. Cuando la energía está por encima de la energía de Fermi el electrón incidente y el hueco reflejado tendrán diferente longitud de onda.
- **Propiedades de coherencia:** La propiedad más importante para el efecto de proximidad es la coherencia de fase del proceso. El hueco reflejado tiene información tanto de la fase del electrón como de la fase

del SC ( $\Delta e^{i\Phi}$ ). Las RA en la energía de fermi  $\epsilon = 0$ , están acompañadas por un cambio de fase de  $\pi/2$ , en este desplazamiento de fase está el origen de la resistencia finita de una juntura N-S a temperatura cero [8].

- **El papel del espín:** En las RA clásicas entre un metal y un superconductor BCS el grado de libertad del espín puede ser ignorado. El condensado está formado por pares de Cooper (dos electrones con el mismo momentum y espín opuesto) y las bandas de espín arriba y espín abajo para los electrones en el metal normal son idénticas. El esquema es el siguiente: un electrón incidente con espín  $\uparrow$  ( $\downarrow$ ) es transferido al SC junto con un segundo electrón con espín  $\downarrow$  ( $\uparrow$ ) para formar un par de Cooper. El hueco reflejado tiene espín  $\uparrow$  ( $\downarrow$ ) puesto que está asociado con la falta del un electrón con espín  $\downarrow$  ( $\uparrow$ ). La situación cambia drásticamente en ferromagnetos donde las bandas de energía son dependientes del espín.

### 1.2.2. Shot Noise

Debido al efecto de proximidad y en particular a las reflexiones de Andreev, las propiedades electrónicas de un metal que está en contacto con un superconductor son afectadas de forma relevante. La pregunta que nos hacemos ahora es: Como se manifiestan las RA en las medidas de shot noise y que física podemos deducir de estas medidas?

El hecho de que la corriente no se disipe en un SC es una propiedad del estado base, por lo tanto no está acompañada de fluctuaciones. Sin embargo, el ruido aparece si el SC está en contacto con un metal normal.

El Shot noise es una consecuencia directa de la granularidad de la carga eléctrica. Aunque una corriente eléctrica existe solo si hay portadores de carga libres, el valor de esta carga no afecta directamente cuanta corriente fluye a través de esta muestra. Se debe investigar las fluctuaciones de corriente para determinar la carga de los portadores. Como consecuencia las medidas de shot noise ofrece acceso directo a las excitaciones elementales de cualquier sistema a través de la determinación de su carga efectiva. Una carga efectiva diferente de  $1e$  refleja directamente como, debido a sus interacciones, los electrones están correlacionados. En un sistema N-S, los electrones pueden entrar al SC solo en pares, entonces la carga que participa en la corriente eléctrica no es  $1e$  sino  $2e$  [9]. Sin embargo, una expectativa ingenua es que el

shot noise se duplicará en presencia de una interfase N-S. En la sección 2.3.3 exploraremos este y otros aspectos del shot noise.

### 1.3. Efecto Kondo

Usualmente, la resistencia eléctrica de un metal puro cae a bajas temperaturas. Esto es debido a que los electrones pueden viajar con más facilidad a través del cristal cuando las vibraciones de los átomos son pequeñas. Sin embargo, cuando la temperatura disminuye por debajo de 10K, la resistencia se satura debido a los defectos estáticos del material. Algunos metales como el plomo, niobio y aluminio, pueden perder su resistencia a la corriente eléctrica repentinamente y convertirse en superconductores. Esta transición de fase conductora a superconductor ocurre a una temperatura crítica, por debajo de la cual los electrones se comportan como una sola entidad. Otros metales como el cobre y el oro permanecen conductores y tienen una resistencia finita constante, aún en las temperaturas más bajas accesibles. Sin embargo, esta conducta cambia drásticamente cuando a estos metales se les agrega átomos magnéticos como el cobalto, ya que la resistencia eléctrica se incrementa, en lugar de saturarse a bajas temperaturas. Alrededor de 1930 hubo varias observaciones de un incremento anómalo en la resistencia de algunos metales a bajas temperaturas [11]. Este efecto permaneció como un enigma hasta 1960 cuando evidencia experimental correlacionaba este aumento de la resistividad a bajas temperaturas con la presencia de impurezas magnéticas diluidas en el metal [12]. Inspirado por esta evidencia, J. Kondo consideró un modelo que involucraba una interacción antiferromagnética entre el momento local y el mar de electrones de conducción [13]. Usando teoría de perturbaciones, Kondo encontró, que la interacción antiferromagnética llevaba a un incremento logarítmico en la dispersión electrón-impureza cuando la temperatura  $T$  decrecía. La teoría Kondo describe correctamente el incremento logarítmico de la resistencia a bajas temperaturas, sin embargo, también predice que la resistencia será infinita a temperaturas aún más bajas, lo cual no tiene sentido físico. Por lo tanto, el resultado de Kondo era correcto solamente sobre una cierta temperatura, conocida como la temperatura Kondo  $T_K$ . El problema fué resuelto finalmente en 1975 por Kenneth Wilson, quien desarrolló un método conocido como “renormalización numérica” [10]. Su trabajo provo que a temperaturas por debajo de  $T_K$ , el momento magnético de la impureza es completamente apantallado por los espines de los electrones en

el metal. A pesar del éxito en la determinación del estado base (y las propiedades termodinámicas) del sistema, debieron pasar casi dos décadas antes de que el desarrollo de las técnicas numéricas para el método de renormalización pudieran calcular las propiedades de transporte exactamente en un amplio rango de temperatura [14], [19], [20].

El efecto Kondo surge cuando los defectos son magnéticos, es decir, cuando el espín total de los electrones en la impureza es diferente de cero. Estos electrones coexisten con los electrones del metal, los cuales se comportan como un mar de electrones que llena toda la muestra. Entonces, puesto que el efecto Kondo es una propiedad de impurezas alojadas en un metal, debería ser observable en el transporte a través de impurezas magnéticas situada entre dos contactos normales [15]. Esto se confirmó en junturas nanométricas que contenían una sola impureza [16]. En esta geometría, el efecto Kondo aumenta la conductancia a bajas temperaturas en lugar de aumentar la resistencia. En otras palabras, el efecto Kondo en puntos cuánticos produce una conducta opuesta a la del bulto de un metal. La aparición de heteroestructuras de GaAs junto con el avance de la tecnología litográfica hizo posible la creación de los primeros átomos artificiales en heteroestructuras de GaAs a finales de los 80's [17]. Al mismo tiempo se señaló que este tipo de sistemas se podrían comportar como impurezas magnéticas y por lo tanto deberían exhibir efecto Kondo [18].

El modelo más simple para describir una impureza magnética en un metal fue introducido por Anderson en 1961, este modelo tiene solo un electrón localizado con espín  $1/2$  y con energía  $\epsilon_0$ . En este caso, el electrón puede tunelar cuánticamente desde la impureza y escapar si su energía está sobre el nivel de Fermi, de lo contrario permanecerá atrapado. La figura 1.4 ilustra lo que sucede cuando un electrón es tomado de un estado localizado de impureza y es puesto en un estado de energía desocupada en el nivel de Fermi. Clásicamente, está prohibido tomar el electrón de la impureza sin entregarle energía al sistema. Sin embargo, en mecánica cuántica el principio de incertidumbre de Heisenberg permite que esto suceda en un intervalo de tiempo muy corto, dentro de esta escala de tiempo, otro electrón debe tunelar desde el mar de Fermi a la impureza. El estado inicial y el final de la impureza puede tener espines diferentes (ver figura 1.4 a)). Este intercambio de espín cambia el espectro de energía del sistema, cuando muchos de estos procesos son tomados en conjunto, se encuentra un nuevo estado conocido como resonancia Kondo que es generado en el nivel de Fermi (ver figura 1.4 b)). El estado Kondo es originado por estos procesos de intercambio entre electrones localizados

en la impureza y electrones libres en los contactos, cuando muchos de estos procesos participan, el efecto Kondo es un fenómeno de muchos cuerpos. Es importante anotar que el estado Kondo está siempre en resonancia, puesto que está fijo en la energía de Fermi [19].

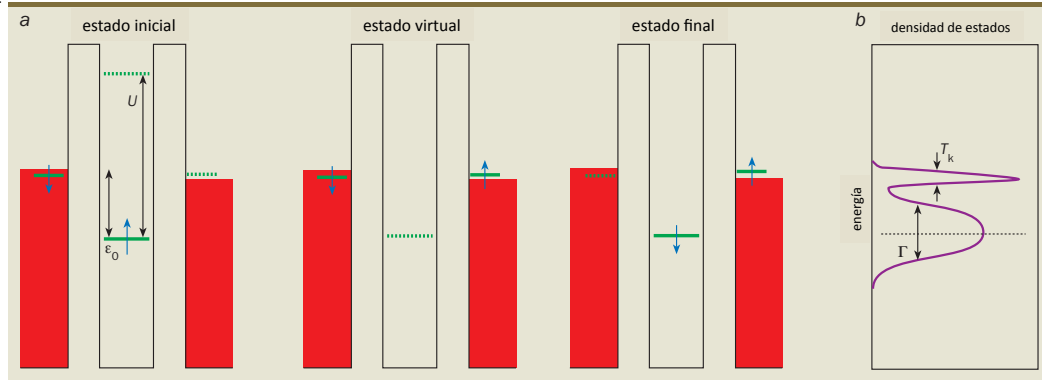


Figura 1.4: a) Modelo de Anderson para una impureza magnética de un nivel con energía  $\epsilon_0$  por debajo de la energía de Fermi del metal. b) El efecto Kondo produce la aparición de una resonancia extra en la energía de Fermi [19].

Los puntos cuánticos han proporcionado nuevas oportunidades de controlar el efecto Kondo experimentalmente y han dado un impulso a la investigación del efecto Kondo hacia nuevas direcciones, donde estas estructuras artificiales han sido explotadas en regímenes que antes eran inaccesibles con impurezas magnéticas.

## 1.4. Aproximación de Landauer

El propósito de esta sección es describir el transporte mesoscópico usando la aproximación de Landauer, en la cual la corriente a través de un conductor se expresa en términos de la probabilidad de que un electrón pueda ser transmitido a través de él.

La conductancia a través de un conductor conectado a dos contactos está dada por  $G = \sigma W/L$ , donde la conductividad  $\sigma$  es un parámetro del material independiente de las dimensiones de la muestra. Si esta relación

permaneciera válida a medida que la longitud  $L$  se reduce, entonces se esperaría que la conductancia creciera indefinidamente [22]. Por lo tanto, para dimensiones pequeñas debe hacerse dos correcciones a esta ley. Primero, hay una resistencia en la interfase independiente de la longitud  $L$  de la muestra y segundo, la conductancia no decrece linealmente con el ancho  $W$ . La fórmula de Landauer incorpora estas dos características.

La aproximación de Landauer establece una relación fundamental entre funciones de onda (amplitudes de dispersión) de un sistema cuántico sin interacción y sus propiedades de transporte, es decir, el problema de transporte a través de una muestra se considera equivalente a un problema de *scattering* en el cual lo que interesa es que una onda incidente atraviese una barrera. La aproximación de Landauer puede ser utilizada para encontrar la corriente a través de un sistema cuántico sin interacción, este tipo de transporte electrónico es llamado transporte coherente por que la interferencia cuántica es preservada durante el movimiento de los electrones a través del sistema. Debido a su simplicidad y generalidad, la aproximación de Landauer es muy importante en el entendimiento del transporte coherente.

En esta aproximación, el sistema que se quiere describir consiste de tres partes: reservorios, contactos y nanoestructura (región de *scattering*). Los reservorios se consideran en equilibrio, además, se estima que los electrones que entran y salen de estos no tienen ninguna correlación. La principal característica de los contactos es que tienen una estructura de modos entrantes  $\Psi_+(\mathbf{r})$  (desde los contactos a la nanoestructura) y salientes  $\Psi_-(\mathbf{r})$  que puede ser definidos. Por último, la nanoestructura puede ser algo tan simple como una barrera túnel o algo más complejo como una molécula fuera del equilibrio.

Landauer consideró el material como un complejo centro de dispersión sobre el que incide un flujo de cargas y, como fruto de esta interacción, aparece la resistividad del material; de esta forma, encontró que la conductividad a temperatura cero de un conductor estrictamente unidimensional viene dada por [23]

$$G = \frac{e^2}{h} \frac{T}{1-T} = \frac{e^2 T}{h R} \quad (1.1)$$

donde  $T$  es el coeficiente de transmisión del sistema y  $R = 1 - T$  es el coeficiente de reflexión. Este resultado parecía ser razonable al menos en dos casos límites: i) para  $T \rightarrow 0$  la conductancia es muy pequeña y ii) para  $T \rightarrow 1$  no hay *scattering* y por lo tanto, la conductancia tiende a ser infinita

de acuerdo a la ecuación 1.1. Sin embargo, cuando se calcula la conductancia a través de la nanoestructura acoplada a dos contactos en equilibrio por el método de respuesta lineal, se obtiene un resultado diferente [24]

$$G = \frac{e^2}{h} T \quad (1.2)$$

Esta conductancia es finita para el caso  $T = 1$  y además predice que un conductor perfecto tendría resistencia  $\frac{h}{e^2}$ . La contradicción entre las fórmulas 1.1 y 1.2 fué motivo de discusión por algún tiempo, finalmente, se demostró que ambas fórmulas eran razonables y daban como resultado la misma corriente, pero correspondían a voltajes definidos entre diferentes puntos. La diferencia entre las ecuaciones 1.1 y 1.2 era que la primera correspondía a la conductancia dentro de la nanoestructura, mientras que la segunda daba la conductancia de la nanoestructura relacionada a los contactos en equilibrio. El enigma de la resistencia finita ( $\frac{h}{e^2}$ ) para  $T \rightarrow 1$  fue también entendido teniendo en cuenta que el número de electrones que pasan a través del sistema es limitado, al igual que la corriente asociada a un estado electrónico, consecuentemente, la corriente promedio es determinada por el número de canales, su transmisión y nivel de población. Para problemas de transporte, solo la segunda fórmula de Landauer es importante. Por otro lado, el primer tipo de fórmula no es exacta para nanoestructuras de tamaño finito debido a que es dependiente de la distribución particular del potencial eléctrico.

Poco después, Fisher y Lee [25] extendieron este resultado al caso de  $N$  canales, obteniendo la expresión

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr} (tt^\dagger) = \frac{e^2}{h} \sum_n T_n \quad (1.3)$$

en la que  $t$  es la matriz de transmisión que conecta el flujo incidente en los diversos canales a un lado de la nanoestructura con el flujo saliente en los canales del otro lado y  $T_n$  son los autovalores de la matriz  $tt^\dagger$ .

El objetivo ahora es reescribir esta ecuación para la conductancia en una forma diferente pero equivalente, la cual proporcionará información adicional sobre el problema de transporte. Para esto, se debe introducir algunas nociones básicas sobre las funciones de Green.

En mecánica cuántica, el operador correspondiente a la función de Green de una sola partícula de un sistema descrito por un Hamiltoniano  $H$  puede

ser definido como la solución a la ecuación [26]

$$\left[ E - \widehat{H} \right] \widehat{G}(E) = 1 \quad (1.4)$$

Una solución formal a esta ecuación estaría dada por  $\widehat{G}(E) = (E - \widehat{H})^{-1}$ . Sin embargo, esta solución no está bien definida para valores de  $E$  correspondientes a los autovalores del Hamiltoniano. Esta sutileza se puede apreciar mejor cuando reescribimos la ecuación 1.4 incluyendo el espín:

$$\left[ E - \widehat{H}(x) \right] \widehat{G}(x, x', E) = \delta(x - x') \quad (1.5)$$

El vector  $x$  contiene las variables de posición y espín  $x = (\mathbf{r}, \sigma)$  y la función

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \langle \mathbf{x} | \widehat{G}(E) | \mathbf{x}' \rangle \quad (1.6)$$

es la función de Green del sistema. De la ecuación 1.5 se puede ver que la función de Green puede ser considerada como una función de onda en  $\mathbf{r}$  como resultado de una excitación en  $\mathbf{r}'$ . Por otro lado,  $G$  puede ser también considerada como la fuente de tal excitación. Ambas soluciones satisfacen 1.5, pero corresponden a condiciones de frontera diferentes: si  $H$  fuera por ejemplo, el Hamiltoniano correspondiente a una partícula en movimiento bajo la influencia de un potencial constante, entonces la primera solución correspondería a una onda saliente del punto  $\mathbf{r}'$ , mientras la segunda solución sería una onda entrante. Con el fin de incorporar estas condiciones de frontera en una única definición de la función de Green, se agrega una variable imaginaria infinitesimal, la cual lleva a las siguientes definiciones

$$G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E \pm i\eta) \quad (1.7)$$

donde la función  $G^\pm$  satisface

$$\left[ E \pm i\eta - H(\mathbf{x}) \right] G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.8)$$

Las funciones  $G^+$  y  $G^-$  son llamadas funciones de Green avanzadas y retardada respectivamente. En el ejemplo dado anteriormente, la función de Green retardada corresponde a una onda saliente y la función de Green avanzada a una onda entrante. En lenguaje de operadores las funciones de

Green retardada y avanzada están definidas para todos los valores reales de  $E$  por la relación

$$\widehat{G}^{\pm}(E) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{E \pm i\eta - \widehat{H}} \quad (1.9)$$

En lo que sigue el operador  $\widehat{G}$  será denotado por  $G$ , además,  $G^r$  y  $G^a$  representarán las funciones de Green retardada y avanzada respectivamente.

Como se explicó anteriormente, en el formalismo de Landauer, una nanoestructura se conecta a dos contactos metálicos, su conductancia y corriente puede ser expresado en términos de los coeficientes de transmisión entre los contactos. Este coeficiente de transmisión pueden ser relacionados con las funciones de Green de la nanoestructura acoplada a los contactos L y R, el cual en una representación tight-binding del sistema, estaría dado por [26]

$$T_{LR} = \text{Tr} [\Gamma_L G_{LR}^r \Gamma_R G_{LR}^a] \quad (1.10)$$

donde, la matriz  $\Gamma_{L(R)}$  está relacionada a la autoenergía del sistema  $\Sigma_L(R)$  por medio de la expresión (la autoenergía está relacionada a los elementos de la función de Green entre sitios en la superficie de los contactos)

$$\Gamma_L = i \left( \Sigma_{L(R)} - \Sigma_{L(R)}^\dagger \right) \quad (1.11)$$

# Capítulo 2

## Transporte a través de puntos cuánticos

### 2.1. Introducción

Avances en las técnicas de fabricación de nanoestructuras han hecho posible construir dispositivos en los cuales superconductores y puntos cuánticos estén conectados [28]. Propiedades muy interesantes aparecen cuando sistemas que involucran un gran número de electrones (como los superconductores) están conectados a puntos cuánticos, en los cuales se puede controlar electrones individualmente. Una de estas propiedades son las reflexiones de Andreev, las cuales juegan un papel muy importante en el entendimiento de las propiedades de transporte. Además, en estructuras cero dimensionales como los PC's, este proceso puede dar lugar a Estados Ligados de Andreev (ABS). Por ejemplo, recientemente, Dirks et al. reportó medidas de transporte en un sistema SC - punto cuántico de grafeno - metal normal y encontró ABS debidos al contacto entre los niveles discretos del PC y el SC [21]. Por otro lado, una amplia variedad de sistemas que involucran varios PC acoplados han sido estudiados últimamente, debido a que estos sistemas presentan efectos de interferencia que son inducidos por los múltiples caminos de propagación de los electrones [29]-[34]. Un ejemplo de estos efectos de interferencia, es el efecto Fano, el cual surge de la interferencia entre un estado discreto y el continuo. En este capítulo estudiaremos las propiedades de transporte a través de un punto cuántico doble, acoplado en forma de T a dos contactos metálicos normales y a un contacto superconductor. Obten-

dremos las expresiones analíticas para la transmisión entre los dos contactos normales, las reflexiones de Andreev y la densidad de estados del sistema. Además estudiaremos el papel del contacto superconductor en las propiedades interferométricas del sistema.

## 2.2. Dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a tres contactos normales: efecto de decoherencia

Aunque la mayoría de las propiedades del transporte electrónico a través de PC son dominadas por la coherencia cuántica, el mecanismo de decoherencia siempre está presente, influenciando en alguna medida las propiedades de transporte. Por esta razón, antes de estudiar el sistema de dos puntos cuánticos acoplados a dos contactos normales (L y R) y a un contacto superconductor (S), veamos que sucede cuando los tres contactos son normales. En particular nos interesa estudiar la influencia de la decoherencia en el efecto Fano. Para este sistema mencionado (ver figura 2.4) el Hamiltoniano está dado por:

$$H = H_{L(R)} + H_S + H_{dot} + H_T, \quad (2.1)$$

$H_{L(R)}$  es el Hamiltoniano correspondiente a los contactos metálicos normales L y R.  $H_S$  es el Hamiltoniano correspondiente al contacto normal S y está dado por:

$$H_\alpha = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger C_{k\alpha\sigma} \quad (2.2)$$

$$H_S = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger C_{kS\sigma} \quad (2.3)$$

donde  $C_{k\alpha\sigma}^\dagger$  ( $C_{k\alpha\sigma}$ ) son los operadores de creación (aniquilación) para electrones con momentum  $k$  y espín  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  en los contactos normales  $\alpha = L, R$  y S. El Hamiltoniano correspondiente a los dos puntos cuánticos es:

$$H_{dot} = \sum_{\sigma,i=1,2} \epsilon_i d_{i\sigma}^\dagger d_{i\sigma} + \sum_{\sigma} t \left( d_{1\sigma}^\dagger d_{2\sigma} + d_{2\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \right) \quad (2.4)$$

donde,  $d_{i\sigma}^\dagger$  ( $d_{i\sigma}$ ) crea (aniquila) un electrón en el punto cuántico  $i = 1, 2$  con energía  $\epsilon_i$ . El acoplamiento entre puntos cuánticos  $t$  se asume real.

Finalmente, el Hamiltoniano que da cuenta de la hibridización de los puntos cuánticos con los reservorios está dado por:

$$H_T = \sum_{k,\alpha,\sigma} \left( V_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger d_{2\sigma} + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left( V_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + h.c. \right) \quad (2.5)$$

donde,  $V_{k\alpha}$  es el acoplamiento entre el contacto  $\alpha = L, R$  y el punto cuántico 2 y  $V_{kS}$  es el acoplamiento entre el contacto normal S y el punto cuántico 1.

Las propiedades de transporte del sistema son investigadas usando el formalismo de las funciones de Green. Con el fin de obtener las funciones de Green del sistema usamos la ecuación de Dyson:

$$\mathbf{G}_{j,\sigma}^r = \mathbf{g}_{j,\sigma}^r + \mathbf{g}_{j,\sigma}^r \Sigma_j^r \mathbf{G}_{j,\sigma}^r \quad (2.6)$$

donde,  $g_{j,\sigma}^r$  es la función de Green para un punto cuántico no-interactuante y  $\Sigma^r$  es la autoenergía. Usando la ecuación de Dyson, obtenemos que las funciones de Green de los dos puntos cuánticos son,

$$G_{11}(\omega)^{-1} = (\omega - \epsilon_1) + i \frac{\Gamma_S}{2} - t^2 G_{11}(\omega) \quad (2.7)$$

$$G_{22}(\omega)^{-1} = (\omega - \epsilon_2) + i \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} - t^2 G_{22}(\omega) \quad (2.8)$$

donde, en la aproximación de banda ancha, las constantes de acoplamiento son constantes  $\Gamma_\alpha = 2\pi i \sum_k t_L \delta(\omega - \epsilon_{k\alpha})$  para  $\alpha = L, R$  y S. De aquí en adelante, se usará  $\Gamma_L$  como unidad de energía

La figuras 2.1 y 2.2 muestran la densidad de estados para el punto cuántico central y la transmisión de L a R en función de la energía para el para  $\Gamma_S = 1 \times 10^{-4} \Gamma_L$ . En ambas figuras, se puede observar un pico centrado en la energía del punto cuántico embebido  $\epsilon_2 = -3,5 \Gamma_L$ . Así mismo, se ve un pico más agudo que corresponde a una antirresonancia Fano ubicada en la energía del punto cuántico lateral. Esta antirresonancia Fano aparece debido a la interferencia cuántica entre el estado localizado en el punto cuántico lateral con el continuo del punto cuántico acoplado a los contactos L y R [27]. Adicionalmente, el recuadro en las figuras 2.1 y 2.2 muestra la evolución de la antirresonancia Fano a medida que el acoplamiento con el contacto normal S se incrementa. Se puede ver claramente que a medida que aumenta el acoplamiento  $\Gamma_S$  la antirresonancia va desapareciendo gradualmente, es decir, el contacto normal S introduce decoherencia en el sistema.

Estos resultados son generales, es decir, se obtiene cualitativamente el mismo resultado para diferentes energías de los puntos cuánticos. En la figura 2.3 se muestra la transmisión para el caso en el cual la energía del punto cuántico central  $\epsilon_2$  es cero. Se puede ver que para un acoplamiento  $\Gamma_S$  muy débil, tenemos una antiresonancia Fano simétrica respecto a cero. Al igual que en el caso anterior, a medida que se incrementa  $\Gamma_S$  la antirresonancia se va extinguiendo paulatinamente.

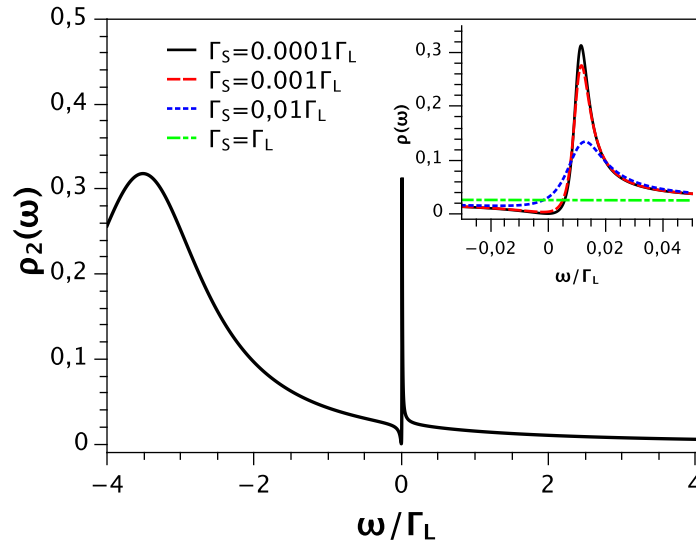


Figura 2.1: Densidad de estados del punto cuántico central en función de la energía. El recuadro muestra como evoluciona la antiresonancia Fano a medida que se aumenta el acoplamiento con el contacto normal S. Los parámetros que se usaron fueron:  $t = 0,2\Gamma_L$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = 0$

Con el fin de obtener una expresión de la forma  $T = A \frac{(x+q)^2}{x^2+1}$  característica del perfil Fano para  $\Gamma_S \approx 0$  se hace una expansión de Taylor alrededor de la antiresonancia, después de lo cual se obtiene:

$$T_{LR}(\omega) \approx \alpha \frac{\omega^2/t^4}{\beta^2 \omega^2/t^4 + 1} \quad (2.9)$$

donde,  $\alpha = \Gamma_L \Gamma_R$  y  $\beta^2 = \left(\frac{\Gamma_d}{2}\right)^2 - 2t^2$ . A medida que  $\Gamma_S$  se hace más grande, el parámetro Fano de asimetría se hace imaginario. Finalmente en  $\Gamma_S = \Gamma_L$

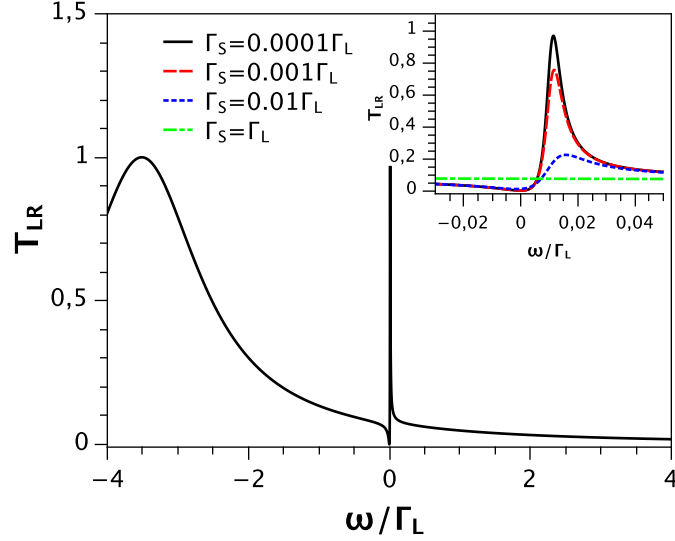


Figura 2.2: Probabilidad de transmisión de L a R en función de la energía. El recuadro muestra como a medida que se aumenta el acoplamiento con el contacto normal S, la antiresonancia Fano desaparece paulatinamente. Se usaron los mismos parámetros de la figura 2.1.

la antirresonancia Fano desaparece. Este efecto de decoherencia que surge al conectar el tercer contacto al sistema, es debido a que cuando un electrón al esta contacto otro electrón irá al PC con el fin de cancelar la tranferencia de carga. Pero en este proceso el electrón pierde su coherencia de fase lo cual destruye el efecto Fano. Por lo tanto, podemos concluir que el tercer contacto metálico normal tiene un efecto perjudicial en las propiedades de interferencia cuántica del sistema [39].

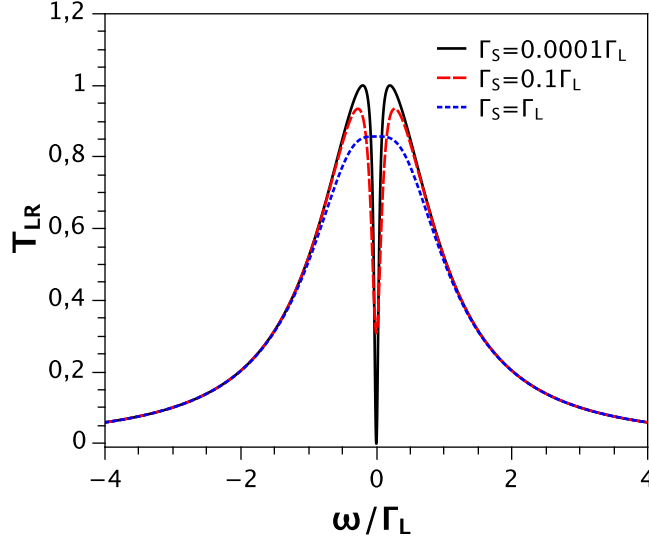


Figura 2.3: Probabilidad de transmisión de L a R en función de la energía para  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ . Los parámetros que se usaron fueron:  $t = 0,2\Gamma_L$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ .

## 2.3. Dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a dos contactos normales y a un contacto superconductor: Estados Ligados de Andreev

### 2.3.1. Descripción del modelo teórico

En la figura 2.4 se observa un sistema de dos puntos cuánticos acoplados a dos contactos metálicos normales (L y R) y a un tercer contacto superconductor (S). Despreciando por ahora la interacción entre electrones, el sistema puede ser modelado por un Hamiltoniano de Anderson de la forma,

$$H = H_{L(R)} + H_S + H_{dot} + H_T, \quad (2.10)$$

$H_{L(R)}$  es el Hamiltoniano correspondiente a los contactos metálicos normales L y R y está dado por,

$$H_\alpha = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger C_{k\alpha\sigma} \quad (2.11)$$

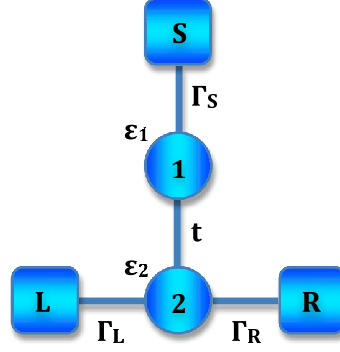


Figura 2.4: Sistema de dos puntos cuánticos acoplados a dos contactos normales L y R y a un contacto superconductor S

donde  $C_{k\alpha\sigma}^\dagger$  ( $C_{k\alpha\sigma}$ ) son los operadores de creación (aniquilación) para electrones con momentum  $k$  y espín  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  en el contacto normal  $\alpha = L, R$ .

El Hamiltoniano del superconductor puede ser escrito de acuerdo a la teoría BCS en la aproximación de campo medio, la cual se basa en el hecho de que los portadores de carga no son electrones sino parejas de electrones (conocidas como pares de Cooper) [35]. Por lo tanto, el emparejamiento entre electrones ocurre en estados con momentum y espín opuesto, es decir, entre estados  $(\mathbf{k}, \uparrow)$  y  $(-\mathbf{k}, \downarrow)$ :

$$H_S = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger C_{kS\sigma} + \sum_k \left( \Delta C_{kS\uparrow}^\dagger C_{-kS\downarrow}^\dagger + h.c. \right) \quad (2.12)$$

donde,  $\Delta$  es la brecha de energía del superconductor. A pesar del nombre, el concepto no está relacionado con la brecha prohibida de los semiconductores, salvo en que se comporta de forma parecida. Para superconductores de onda-s  $\Delta$  no depende del momentum y se considera constante [36]. El Hamiltoniano correspondiente a los puntos cuánticos es:

$$H_{dot} = \sum_{\sigma,i=1,2} \epsilon_i d_{i\sigma}^\dagger d_{i\sigma} + \sum_{\sigma} t \left( d_{1\sigma}^\dagger d_{2\sigma} + d_{2\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \right) \quad (2.13)$$

donde,  $d_{i\sigma}^\dagger$  ( $d_{i\sigma}$ ) crea (aniquila) un electrón en el punto cuántico  $i = 1, 2$  con energía  $\epsilon_i$  y espín  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  y con un acoplamiento entre puntos cuánticos  $t$  el

cual se asume real. Finalmente, la hibridización de los puntos cuánticos con los reservorios está dado por:

$$H_T = \sum_{k,\alpha,\sigma} \left( V_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger d_{2\sigma} + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left( V_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + h.c. \right) \quad (2.14)$$

donde,  $V_{k\alpha}$  es el acoplamiento entre el contacto  $\alpha = L, R$  y el punto cuántico embebido.  $V_{kS}$  es el acoplamiento entre el contacto superconductor  $S$  y el punto cuántico 1.

Las propiedades de transporte del sistema son investigadas usando el formalismo de las funciones de Green. Con el fin de obtener las funciones de Green del sistema usamos la ecuación de Dyson:

$$\mathbf{G}_{j,\sigma}^r = \mathbf{g}_{j,\sigma}^r + \mathbf{g}_{j,\sigma}^r \Sigma_j^r \mathbf{G}_{j,\sigma}^r \quad (2.15)$$

donde,  $g_{j,\sigma}^r$  es la función de Green para un punto cuántico no-interactuante y  $\Sigma^r$  es la autoenergía. Para dar cuenta de los grados de libertad de electrón y hueco, es de gran utilidad introducir la notación espinorial de Nambu en la cual la función de Green retardada puede ser escrita como [37]:

$$G^r(t, t') = -i\theta(t - t') \langle \Psi(t), \Psi^\dagger(t') \rangle \quad (2.16)$$

donde  $\Psi_i^\dagger(t) = (d_{i\uparrow}^\dagger, d_{i\downarrow})$ . En el espacio espinorial de Nambu podemos escribir  $g_{j,\sigma}^r$  y  $\Sigma^r$  como:

$$\mathbf{g}_1^r(\omega) = \begin{pmatrix} g_{1,11} & 0 \\ 0 & g_{1,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega - \epsilon_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega + \epsilon_1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{g}_2^r(\omega) = \begin{pmatrix} g_{2,11} & 0 \\ 0 & g_{2,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega - \epsilon_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega + \epsilon_2} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\Sigma^r(\omega) = \begin{pmatrix} \Sigma_{S1,11} & \Sigma_{S1,12} & 0 & 0 \\ \Sigma_{S1,21} & \Sigma_{S1,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{d2,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{d2,22} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde,

$$\Sigma_d = \Sigma_L + \Sigma_R = -\frac{i}{2} \left[ \Gamma_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \Gamma_R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.20)$$

y

$$\Sigma_S = -i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta}{\omega} \\ -\frac{\Delta}{\omega} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

donde,  $\rho(\omega)$  corresponde a la densidad de estados del superconductor

$$\rho(\omega) = \left( \frac{\omega}{i} \frac{\Theta(\Delta - |\omega|)}{\sqrt{\Delta^2 - \omega^2}} + \omega \text{Sgn}(\omega) \frac{\Theta(|\omega| - \Delta)}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \right) \quad (2.22)$$

La ecuación de Dyson 2.15 se puede reescribir como:

$$\left[ (\mathbf{g}_{j,\sigma}^r)^{-1} - \Sigma_j^r \right] \mathbf{G}_{j,\sigma}^r = \mathbf{1} \quad (2.23)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.17 - 2.21 en la ecuación de Dyson 2.23, obtenemos (ver Apéndice A):

$$\mathbf{G}_1(\omega)^{-1} = \left( \omega + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \mathbf{I} - \epsilon_1 \sigma_z - i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \sigma_x - t^2 \mathbf{G}_2(\omega) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{G}_2(\omega)^{-1} = \left( \omega + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) \mathbf{I} - \epsilon_2 \sigma_z - t^2 \mathbf{G}_1(\omega) \quad (2.25)$$

donde,  $\mathbf{I}$  representa la matriz identidad  $2 \times 2$  y  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  denotan las matrices de Pauli usuales.

Calculando explícitamente la función de Green  $\mathbf{G}_2(\omega)$  obtenemos que cada componente de esta matriz  $2 \times 2$  está dada por:

$$G_{2,11}(\omega) = \frac{1}{D_2(\omega)} \left( \omega + \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) - \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( \omega - \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \right) \quad (2.26)$$

$$G_{2,12}(\omega) = \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \right) \quad (2.27)$$

$$G_{2,21}(\omega) = \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \right) \quad (2.28)$$

$$G_{2,11}(\omega) = \frac{1}{D_2(\omega)} \left( \omega - \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) + \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( \omega + \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \right) \quad (2.29)$$

donde  $D_1(\omega)$  y  $D_2(\omega)$  corresponden a,

$$D_1(\omega) = \left( \omega - \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \left( \omega + \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) + \left( \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \right)^2 \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} D_2(\omega) &= \left( \omega - \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) \left( \omega + \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) + \frac{t^4}{D_1(\omega)} \\ &\quad - \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( \omega - \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) \left( \omega - \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \\ &\quad - \frac{t^2}{D_1(\omega)} \left( \omega + \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) \left( \omega + \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

y con  $\rho(\omega)$  (la densidad de estados del SC) dado por:

$$\rho(\omega) = \left( \frac{\omega}{i} \frac{\Theta(\Delta - |\omega|)}{\sqrt{\Delta^2 - \omega^2}} + \omega \text{Sgn}(\omega) \frac{\Theta(|\omega| - \Delta)}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \right) = -i g_1(\omega) + g_2(\omega) \quad (2.32)$$

### 2.3.2. Propiedades de transporte

En régimen estacionario, la corriente a través del sistema es independiente del tiempo y podemos trabajar con la transformada de Fourier de la funciones de Green. En este caso la corriente que va del contacto normal L al contacto normal R está dada por:

$$I_{LR}(\omega) = \frac{2e}{h} \sum_{\sigma} \int T_{LR\sigma}(\omega) [f_L(\omega) - f_R(\omega)] d\omega \quad (2.33)$$

Es fácil darse cuenta que la transmisión para spín up está dada por:

$$T_{LR\uparrow}(\omega) = \Gamma_L \Gamma_R (|G_{2,11}(\omega)|^2 + |G_{2,12}(\omega)|^2) \quad (2.34)$$

Por otro lado, la corriente que va del contacto L al contacto superconductor S se puede escribir como [38]:

$$I_{LS}(\omega) = I_A(\omega) + I_{qp}(\omega) \quad (2.35)$$

donde,  $I_A$  es la corriente de Andreev y  $I_{qp}$  es la corriente de cuasipartículas. La corriente de Andreev está dada por:

$$I_A(\omega) = \frac{e}{h} \int \text{Tr} (\mathbf{G}_2^r \Gamma_L \mathbf{f}_L \mathbf{G}_2^a \Gamma_L \sigma_z - \mathbf{G}_2^r \Gamma_L \mathbf{f}_L \sigma_z \mathbf{G}_2^a \Gamma_L) d\omega \quad (2.36)$$

a partir de esta expresión, obtenemos:

$$I_A(\omega) = \frac{2e}{h} \int T_A(\omega) [f(\omega) - f(\omega - \mu_L)] d\omega \quad (2.37)$$

donde,

$$T_A(\omega) = \Gamma_L^2 (|G_{2,12}^r(\omega)|^2 + |G_{2,12}^r(-\omega)|^2) \quad (2.38)$$

La corriente de Andreev  $I_A$  representa la contribución de las reflexiones de Andreev  $T_A$  a la corriente, en la cual un electrón incidente desde el contacto L es reflejado como un hueco, como consecuencia de esto se crea un par de Cooper extra en el contacto superconductor.

La corriente de cuasipartículas  $I_{qp}$  está dada por:

$$I_{qp}(\omega) = \frac{e}{h} \int \Gamma_L \Gamma_S(\omega) \text{Sgn}(\omega) \text{Tr} \sigma_z \Omega_S \sigma_z [\mathbf{G}_{21}^r \mathbf{f}_L \sigma_z \mathbf{G}_{12}^a - \mathbf{G}_{12}^a \mathbf{f}_R \sigma_z \mathbf{G}_{21}^r] \quad (2.39)$$

donde,  $\Gamma_S(\omega) = \Gamma_s |g_2(\omega)|$ , con  $g_2(\omega)$  dada por la ecuación 2.32.  $\sigma_z$  es la matriz de pauli usual y las matrices  $\Omega_S$  y  $\mathbf{f}_L$  están dadas por:

$$\Omega_S = \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ \Delta & \Omega \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{f}_L = \begin{pmatrix} f(\omega - \mu_L) & 0 \\ 0 & f(\omega + \mu_L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_L & 0 \\ 0 & \bar{f}_L \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Usando 2.39, 2.40 y 2.41 se obtiene que la corriente de cuasipartículas se puede escribir de la siguiente forma,

$$I_{qp}(\omega) = \frac{2e}{h} \int T_{qp}(\omega) [f(\omega) - f(\omega - \mu_L)] d\omega \quad (2.42)$$

donde,

$$\begin{aligned} T_{qp}(\omega) = & \frac{1}{2} \Gamma_L \Gamma_S(\omega) |\omega| [ |G_{21,11}^r(\omega)|^2 + |G_{21,12}^r(\omega)|^2 \\ & + |G_{21,22}^r(-\omega)|^2 + |G_{21,21}^r(-\omega)|^2 ] \\ & - \Gamma_L \Gamma_S(\omega) \text{Sign}(\omega) \Delta \text{Re} [(G_{21,12}^r(\omega))^* G_{21,11}^r(\omega) \\ & - (G_{21,21}^r(\omega))^* G_{21,22}^r(\omega)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como se mencionó anteriormente, la corriente  $I_{qp}$  es la corriente de cuasipartículas y  $T_{qp}$  es la contribución de las cuasipartículas excitadas sobre la brecha de energía prohibida del superconductor  $\Delta$ .  $T_{qp}$  da cuenta del proceso convencional de tunelamiento entre un metal normal y un superconductor, el cual consta de varios procesos: a) tunelamiento convencional a través del sistema, este tunelamiento está relacionado con los términos del tipo  $|G_{21,11}^r(\omega)|^2$ , b) un electrón incidente desde el contacto L se convierte en un cuasihueco en el contacto superconductor, este proceso está dado relacionado con los términos  $|G_{21,12}^r(\omega)|^2$ , c) un electrón (hueco) proveniente del contacto L, es transmitido al contacto superconductor, convirtiéndose en una excitación de cuasipartícula para luego formar una pareja con algún otro electrón (hueco) excitado, es decir, términos del estilo  $(G_{21,12}^r(\omega))^* G_{21,11}^r(\omega)$ . Es importante notar que a temperatura cero,  $I_{qp} = 0$  para  $|\omega| < \delta$ . En este caso solamente las reflexiones de Andreev contribuirán a la corriente.

Con el fin de investigar las propiedades de transporte del sistema vamos a estudiar la transmisión y la densidad de estados. Uno de los objetivos principales de este estudio es analizar el papel que juega el contacto superconductor en las propiedades de interferencia del sistema. Con este propósito calculamos la probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R usando la ecuación 3.23. Los resultados obtenidos para  $T_{LR}$  se muestran en la figura 2.5. Como ya se mencionó, las energías del sistema se darán en unidades de  $\Gamma_L$ .

En el panel a) de la figura 2.5 se estudia la transmisión para el caso  $\Gamma_S = 0$ , es decir, para un sistema de dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a dos contactos metálicos normales. Como ya habíamos visto en la sección anterior, en este caso, la transmisión muestra un perfil Fano simétrico ( $q = 0$ ) que se hace cero alrededor de  $\epsilon_1$ . Este efecto aparece debido a la interferencia cuántica entre un estado localizado en el punto cuántico lateral y el continuo en el punto cuántico central. En los paneles b), c) y d) de la figura 2.5 podemos ver la evolución del sistema a medida que el acoplamiento  $\Gamma_S$  va aumentando progresivamente. Se observa como el parámetro de asimetría  $q$ , característico del perfil Fano, se vuelve imaginario puro y cuando  $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$  vemos como debido a la presencia del superconductor emergen dos pequeñas antiresonancias Fano, las cuales se acentúan a medida que  $\Gamma_S$  aumenta. Para obtener una expresión analítica del perfil Fano cuando  $\Gamma_S \neq 0$ , podemos hacer uso de la expresión obtenida en la sección anterior, la cual nos arroja una luz sobre como debería ser la expresión de la línea característica Fano para b), c) y d), teniendo esto en cuenta, la interferencia del sistema debería comportarse como:  $T_{LR}(\omega) \approx T_0 \left( \frac{(\omega+q^R)^2}{\gamma^2\omega^2+1} + \frac{(q^I)^2}{\gamma^2\omega^2+1} \right) + T_1$ , donde,  $q = q^R + iq^I$ .

El resultado obtenido en la Figura 2.5 se extiende para el caso en el cual las

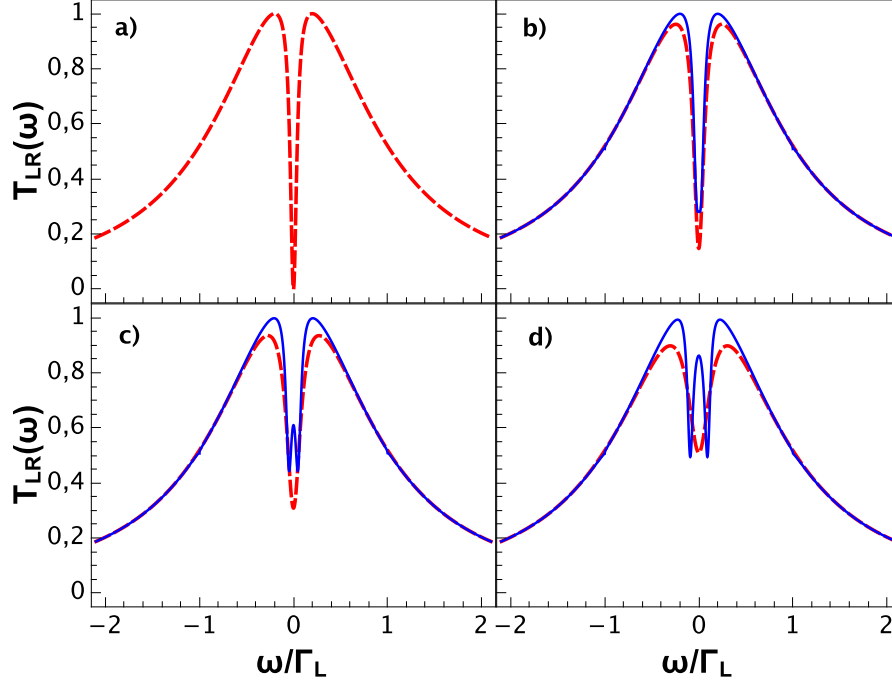


Figura 2.5: Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía para un punto cuántico doble en forma de T conectado a dos contactos normales (L y R) y a un contacto superconductor (S). Los parámetros usados fueron:  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  y  $t = 0,2\Gamma_L$  a)  $\Gamma_S = 0$  b)  $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c)  $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$  y d)  $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a  $\Delta = 1\Gamma_L$  y la línea discontinua a  $\Delta = 0$ , es decir, para el caso en que los tres contactos son normales.

energías de los puntos cuánticos son diferentes de cero, como se muestra en la figura 2.6. En esta figura, se muestra la transmisión de L a R para una energía del punto cuántico central  $\epsilon_2 = -3,0\Gamma_L$ . Inicialmente, en el panel a) se observa una antiresonancia Fano característica de un sistema de dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a dos contactos normales. A medida que  $\Gamma_S$  se aumenta paulatinamente, comienzan a aparecer dos antiresonancias Fano que se van separando una de la otra a medida que  $\Gamma_S$  crece. Es importante notar que para el caso en el que se considera el tercer contacto normal (línea roja discontinua en las figuras 2.5 y 2.6), la antiresonancia que se tenía inicialmente para  $\Gamma_S = 0$  va desapareciendo gradualmente a medida que se incrementa el acoplamiento con el tercer contacto

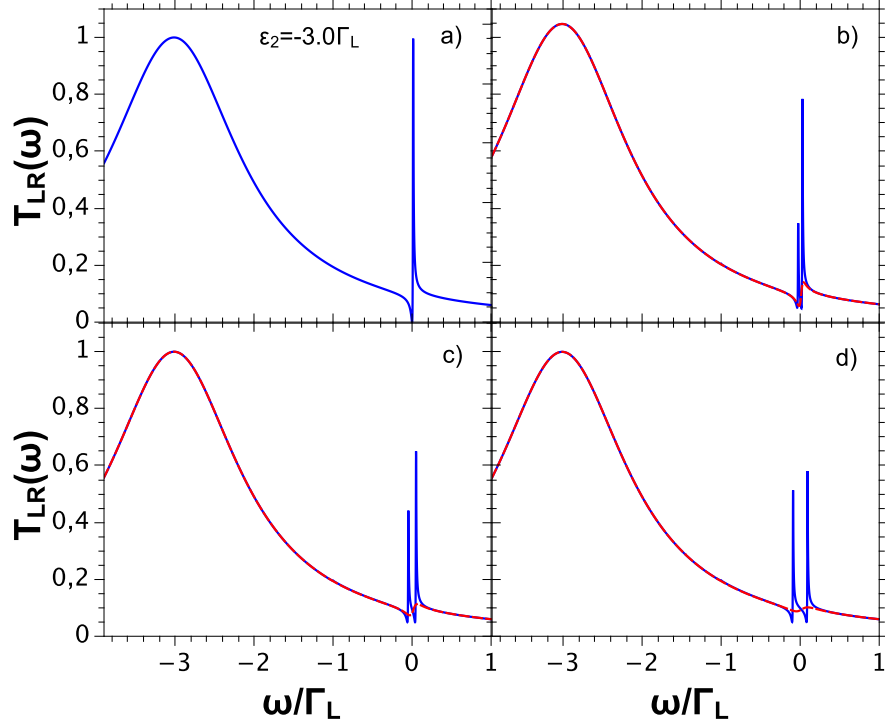


Figura 2.6: Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía. Los parámetros usados fueron:  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = -3\Gamma_L$  y  $t = 0,2\Gamma_L$  a)  $\Gamma_S = 0$  b)  $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c)  $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$  y d)  $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a  $\Delta = 1\Gamma_L$  y la línea discontinua a  $\Delta = 0$ .

normal, es decir el tercer contacto normal afecta negativamente la interferencia cuántica del sistema. Esto ya se había estudiado en la sección anterior.

Un resultado similar al anterior se obtiene cuando el acoplamiento  $\Gamma_S$  es grande, en este caso las antiresonancias Fano son cada vez más acentuadas y se separan a medida que  $\Gamma_S$  crece como se muestra en la Figura 2.7. Es importante contrastar este resultado con el obtenido para el caso en el cual el tercer contacto es metálico normal, donde no se observan resonancias Fano debido a la decoherencia introducida por el tercer lead.

Por otro lado, cuando estudiamos la probabilidad de transmisión del contacto L al contacto superconductor S podemos ver que  $T_{LS}$  tiene contribuciones tanto de la transmisión de Andreev como de la transmisión de las cuasipartículas.

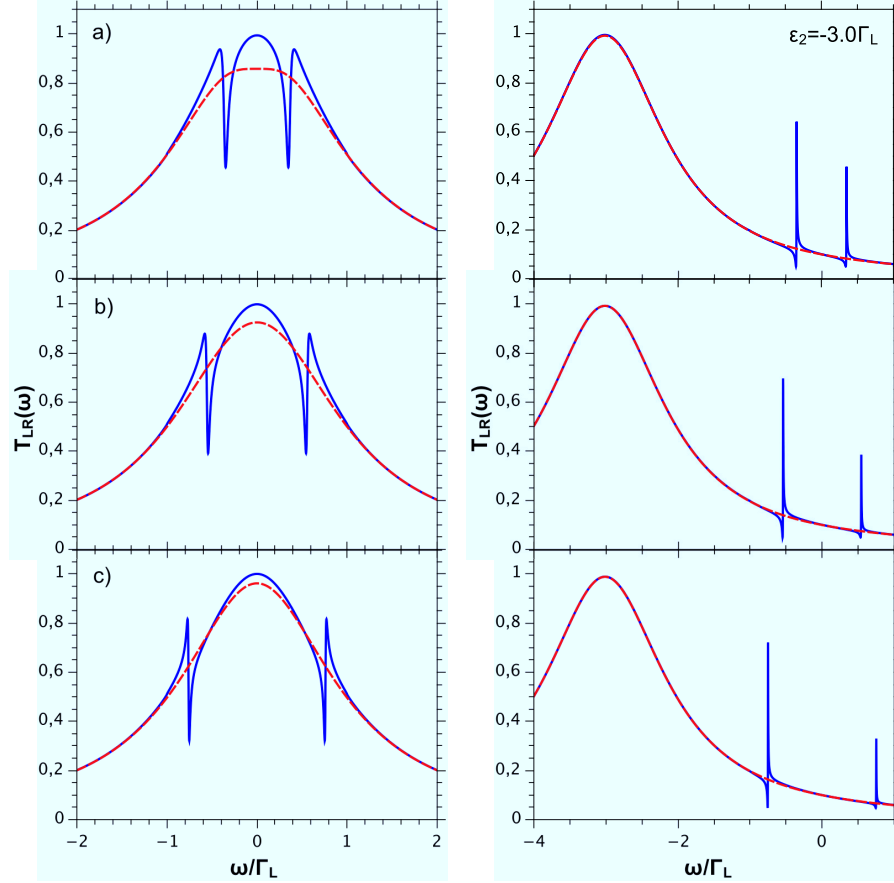


Figura 2.7: Probabilidad de transmisión entre los contactos metálicos normales L y R en función de la energía. En el panel derecho  $\epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $t = 0,2\Gamma_L$  a)  $\Gamma_S = 0$  b)  $\Gamma_S = 0,05\Gamma_L$ , c)  $\Gamma_S = 0,1\Gamma_L$  y d)  $\Gamma_S = 0,2\Gamma_L$ . En el panel izquierdo la energía del punto cuántico central es  $\epsilon_2 = -3\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a  $\Delta = 1\Gamma_L$  y la línea discontinua a  $\Delta = 0$ .

Como se anotó anteriormente y de acuerdo con la ecuación 2.43, la corriente de cuasipartículas es cero para energías menores que la brecha de energía del superconductor como evidencia la línea discontinua en la Figura 2.8 a), b) y c). Por el contrario, la transmisión de Andreev solo es apreciable para energías dentro del gap del superconductor. Es importante anotar que la transmisión de Andreev es simétrica  $T_A(\omega) = T_A(-\omega)$  debido a que involucra grados de libertad tanto de electrones como de huecos. Aunque usamos la palabra probabilidad para referirnos

a la transmisión de Andreev, este es un término inapropiado, ya que  $T_A$  puede ser mayor que la unidad debido a que el transporte por debajo de la brecha de energía es por medio de pares de Cooper. En nuestro sistema se obtiene una transmisión de Andreev igual a 2 cuando  $\Gamma_R$  es muy pequeño.

Con el fin de lograr una mejor comprensión de la conducta del sistema antes descrita, es interesante hacer una comparación entre la transmisión entre los dos contactos normales L y R y la transmisión de Andreev. En los paneles a), b) y c) de la figura 2.9 se muestra la transmisión L-R para  $\Gamma_S = 1, 2$  y  $4\Gamma_L$ . Como se había dicho antes, en la figura se observan dos antirresonancias Fano muy marcadas con formas idénticas pero signo opuesto en el parámetro de asimetría Fano. Debido al efecto de proximidad, la localización de estas antirresonancias depende de  $\Gamma_S$  según la relación:  $E \approx \pm (a\sqrt{\Gamma_S} + b\Gamma_S + c)^2$ , con  $a = 0,61$ ,  $b = -0,11$  y  $c = 0,09$ .

Por otro lado, en los paneles d), e) y f) de la figura observamos la transmisión de Andreev que consiste de dos antirresonancias debidas a las reflexiones de Andreev de electrones de baja energía tratando de pasar al contacto SC. Debido al tamaño reducido de estas estructuras cero dimensionales, el electrón y el hueco realizarán un movimiento finito, dando lugar a niveles de energía discretos, lo cual origina los estados ligados de Andreev (ABS). Es importante darse cuenta que las resonancias exhibidas en  $T_A$  están centradas en la misma posición de las antirresonancias Fano en la transmisión de L-R. Por lo tanto, podríamos decir que estas “antirresonancias Fano-Andreev” en la transmisión L-R son debidas a las reflexiones de Andreev. Es interesante, contrastar estos resultados con los obtenidos por Domański et al. en un sistema N - punto cuántico doble - S [39]. Ellos mostraron que un tercer contacto normal introduce decoherencia en el sistema y destruye el efecto Fano, siendo estas antirresonancias Fano entidades muy frágiles respecto a la decoherencia inducida por el tercer contacto. En nuestro caso, al ser el tercer contacto un SC, las propiedades de interferencia cuántica del sistema no se ven afectadas a medida que  $\Gamma_S$  se incrementa y por el contrario las líneas de interferencia Fano se acentúan con el aumento de  $\Gamma_S$ .

Adicionalmente, en la figura 2.10 se ilustran como evolucionan las energías de esas antirresonancias dentro del gap obtenidas para  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  en función del gap del superconductor.

Por último, en las figuras 2.11, 2.12 y 2.13 se muestra la densidad de estados de los puntos cuánticos central y lateral respectivamente. Esta cantidad está dada por:  $\rho_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{i,11}^r(\omega)$ . En la figura 2.13 a) vemos como la curva Lorentziana centrada en  $\epsilon_2$  (línea discontinua) se divide en dos picos (línea sólida) debido a los estados ligados de Andreev. En el recuadro de la figura 2.13 b) mostramos una vez más como los contactos superconductores no introducen decoherencia y el efecto Fano permanece a medida que el acoplamiento  $\Gamma_S$  se incrementa.

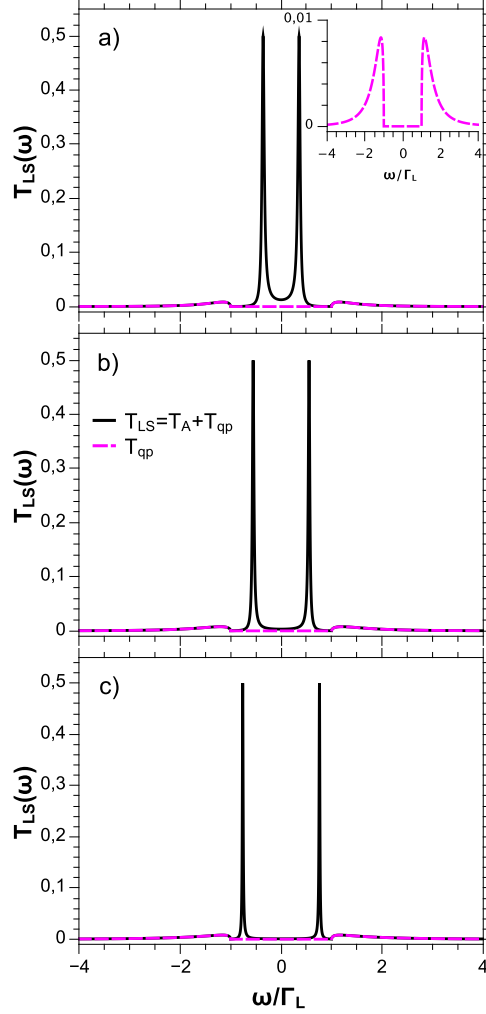


Figura 2.8: Probabilidad de Transmisión del contacto normal L al contacto superconductor S:  $T_{LS} = T_A + T_{qp}$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 0$  y  $t = 0,2\Gamma_L$  a)  $\Gamma_S = 1\Gamma_L$ , b)  $\Gamma_S = 2\Gamma_L$  y c)  $\Gamma_S = 4\Gamma_L$ . La línea sólida corresponde a la transmisión total de L a S y la línea discontinua a representa la probabilidad de transmisión de las cuasipartículas

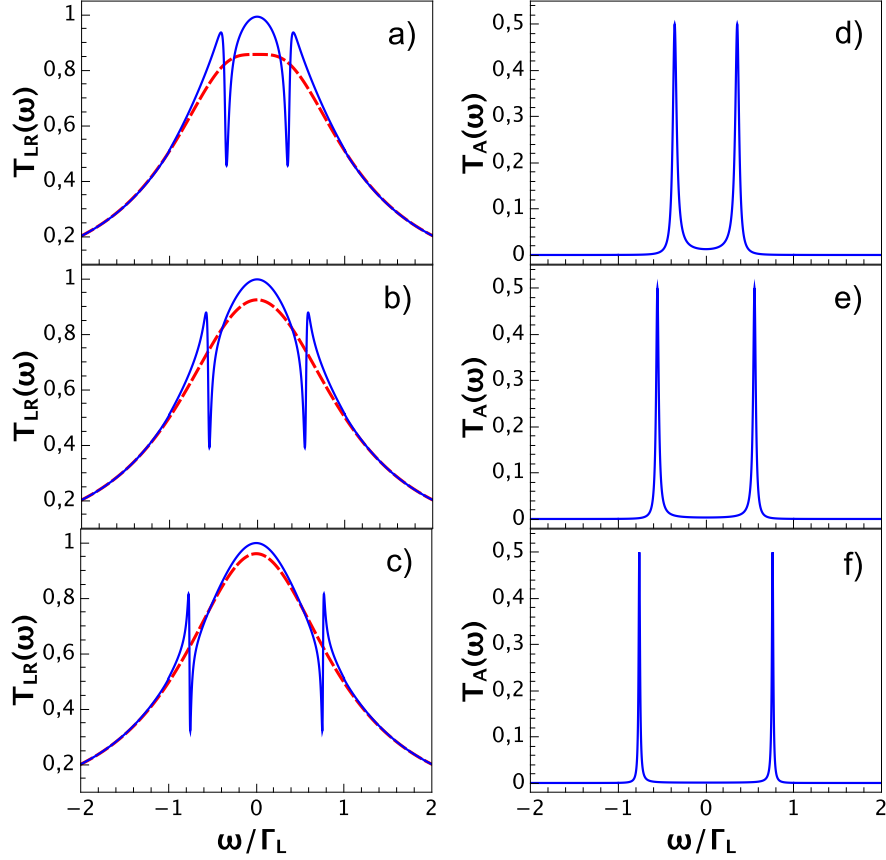


Figura 2.9: Probabilidad de transmisión del contacto L a R (panel izquierdo) y transmisión de Andreev (panel derecho) en función de la energía para los parámetros:  $\Delta = 1\Gamma_L$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $t = 0,2\Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  and  $\Gamma_S = 1\Gamma_L$  para a) y d),  $\Gamma_S = 2\Gamma_L$  para b) y e) y  $\Gamma_S = 4\Gamma_L$  para c) y f). La línea discontinua en el panel izquierdo corresponde a la transmisión de L a R para  $\Delta = 0$ , i.e para un sistema con tres contactos normales.

### 2.3.3. Shot Noise

El shot noise, es una consecuencia del carácter discreto de la carga eléctrica. Debido a esto las medidas de shot noise ofrecen un acceso directo a las excitaciones elementales de cualquier sistema. En lo que sigue, exploraremos como se manifiestan las reflexiones de Andreev en las medidas de shot noise y que propiedades interesantes se pueden deducir de tales medidas. Con este propósito, en esta

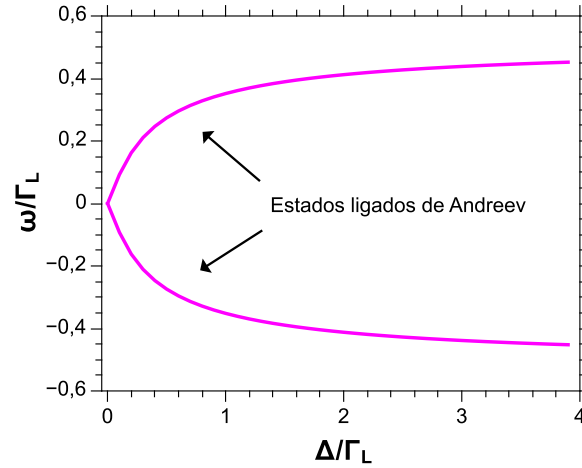


Figura 2.10: Energías de las antirresonancias dentro del gap en función de  $\Delta$  para  $\Gamma_S = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ ,  $t = 0,2\Gamma_L$ .

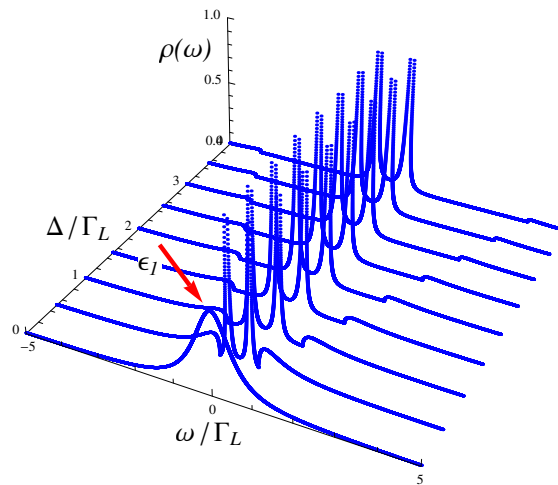


Figura 2.11: Densidad de estados del punto cuántico lateral en función de la brecha de energía del superconductor. Se consideró  $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ ,  $\Gamma_L = \Gamma_R$  y  $t = 0,2\Gamma_L$

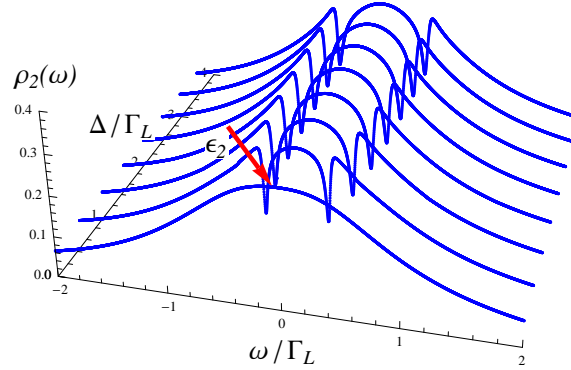


Figura 2.12: Densidad de estados del punto cuántico central en función de la brecha de energía del superconductor. Se consideró  $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ ,  $\Gamma_L = \Gamma_R$  y  $t = 0,2\Gamma_L$

sección estudiaremos el shot noise de un sistema N-S y estudiaremos además la corriente y el factor Fano.

La expresión general para las fluctuaciones de corriente (shot noise) entre dos contactos  $\alpha$  y  $\beta$  está definido como:

$$S(t_1, t_2) = \langle \Delta I_\alpha(t_1) \Delta I_\beta(t_2) \rangle \quad (2.44)$$

donde,

$$\Delta I_\alpha(t) = I_\alpha(t) - \langle I_\alpha(t) \rangle \quad (2.45)$$

teniendo en cuenta que la corriente está dada por:

$$I_{\alpha\sigma}(t) = i \frac{e}{\hbar} \sum_k \left( T_{\alpha k} C_{\alpha, k\sigma}^\dagger(t) d_{i\sigma}(t) - T_{\alpha k}^* d_{i\sigma}^\dagger(t) C_{\alpha, k\sigma}(t) \right) \quad (2.46)$$

Se puede encontrar que la expresión para el shot noise de un sistema N-S está dada por (ver Apéndice B),

$$S = \frac{2e^2}{h} \int d\omega (4T_A(1 - T_A) + T_{qp}(1 - T_{qp}) - 4T_A T_{qp}) \quad (2.47)$$

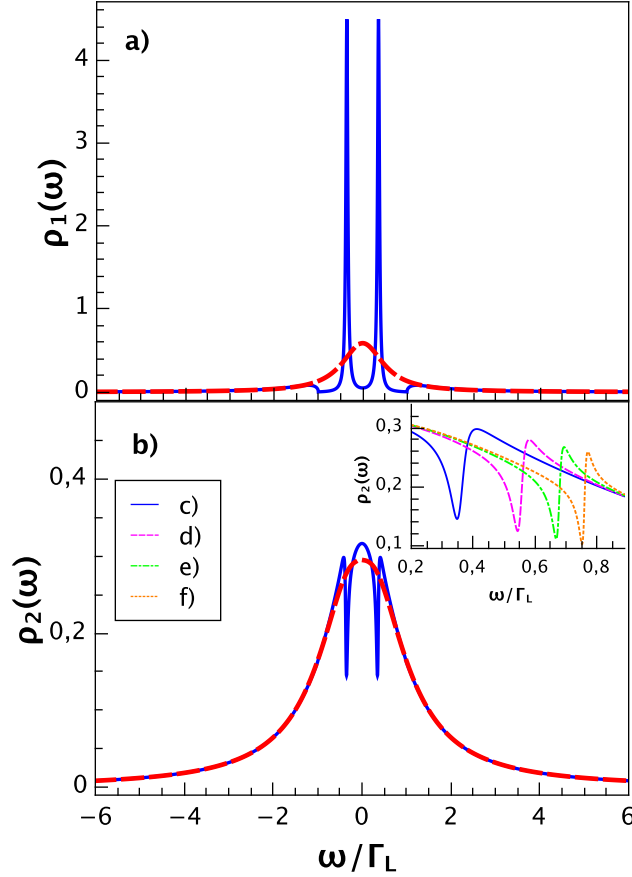


Figura 2.13: Densidad local de estados para: a) punto cuántico lateral and b) punto cuántico central. La línea sólida corresponde a  $\Delta = 1\Gamma_L$  mientras la línea discontinua corresponde a  $\Delta = 0$ . Se utilizaron los parámetros  $\Gamma_R = \Gamma_L$  y  $\Gamma_S = \Gamma_L$ . El recuadro en b) muestra la evolución de las antirresonancias Fano con  $\Gamma_S$  para c)  $\Gamma_S = 1\Gamma_L$  d)  $\Gamma_S = 2\Gamma_L$ , e)  $\Gamma_S = 3\Gamma_L$ , y f)  $\Gamma_S = 4\Gamma_L$ .

Por lo tanto, si consideramos solo energías dentro del gap del superconductor, obtenemos que el shot noise debido a la reflexión de Andreev en el sistema es:

$$S_A = \frac{4e^2}{h} \int_0^{eV} d\epsilon [2T_A (1 - T_A)] \quad (2.48)$$

Por otro lado, el ruido de la corriente que va del contacto L al R está dado por

la ecuación [38]

$$S_{LR} = \frac{4e^2}{h} \int d\omega [f_L f_L + f_R f_R] T(\omega) + \frac{4e^2}{h} \int d\omega [f_L - f_R]^2 \text{Tr} \left\{ \mathbf{T}(\omega) - [\mathbf{T}(\omega)]^2 \right\} \quad (2.49)$$

El primer término corresponde al ruido térmico o ruido de Johnson y es despreciable a temperatura cero, la segunda línea es el shot noise que está directamente relacionado con el carácter discreto de la carga del electrón. El integrando de la segunda línea puede ser simplificado como  $T(\omega) [1 - T(\omega)]$  excepto cuando  $\det \Gamma_L \neq 0$  y  $\det \Gamma_R \neq 0$ . Por lo tanto, el shot noise debido a la transmisión del L a R puede ser expresado de la siguiente forma

$$S_{LR} = \frac{4e^2}{h} \sum_{\sigma} \int_0^{eV} d\epsilon T_{LR\sigma}(\epsilon) [1 - T_{LR\sigma}(\epsilon)] \quad (2.50)$$

En la figura 2.14 se muestra la Corriente de Andreev  $I_A$ , el shot noise asociado a las reflexiones de Andreev  $S_A$  y el factor Fano,  $F_A = \frac{S_A}{2q|I_A|}$ , en función del voltaje externo aplicado. Se puede observar como varían  $I_A$ ,  $S_A$  y  $F_A$  cuando el acoplamiento con el superconductor aumenta gradualmente. En primer lugar vemos que la corriente y el shot noise tienen comportamientos similares, es decir, se puede ver que para voltajes externos pequeños la corriente y el shot noise aumentan pausadamente hasta llegar a un determinado valor del voltaje donde aumentan abruptamente y finalmente se saturan y permanece constantes. Los resultados para el factor Fano muestran resultados interesantes. Debido a que en un sistema N-S, los electrones solo pueden entrar en el superconductor en pares, la carga elemental  $q$  que participa en la corriente eléctrica es  $2e$  [40], [41]. Por lo tanto, el factor Fano asociado a las reflexiones de Andreev puede llegar hasta un valor de 2 como se observa en el panel inferior de la figura 2.14. Es de esperar que el salto abrupto en la corriente y el shot noise, así como la repentina disminución de  $F_A$  esté directamente relacionado con los estados ligados de Andreev que se exhiben en las figuras 2.9.

Por otro lado, en la figura 2.15 se puede ver el comportamiento de la corriente, el shot noise y el factor Fano,  $F_{LR} = \frac{S_{LR}}{2q|I_{LR}|}$ , cuando el voltaje externo es variado. En el panel superior se observa la corriente  $I_{LR}$  para diferentes valores de  $\Gamma_S$ . Se puede ver que la corriente aumenta suavemente con el voltaje externo. En el panel intermedio se ilustra el shot noise  $S_{LR}$  y se puede observar que cada una de estas líneas exhibe un pequeño pico para diferentes valores del voltaje externo, mientras que la línea naranja, correspondiente al shot noise para un sistema con tres contactos normales, crece suavemente con el voltaje y no presenta ningún pico. La

presencia de estos pequeños picos se debe a los estados ligados de Andreev estudiados en la sección anterior. Por lo tanto, el shot noise asociado a la Transmisión entre L y R, es afectado por las reflexiones de Andreev. Finalmente, en el panel inferior se observa el factor Fano  $F_{LR}$ . La figura muestra que la transmisión de L-R ocurre a través de partículas individuales con una carga  $q = 1e$  y por lo tanto el valor máximo que puede tomar  $F_{LR}$  es uno, como era de esperarse.

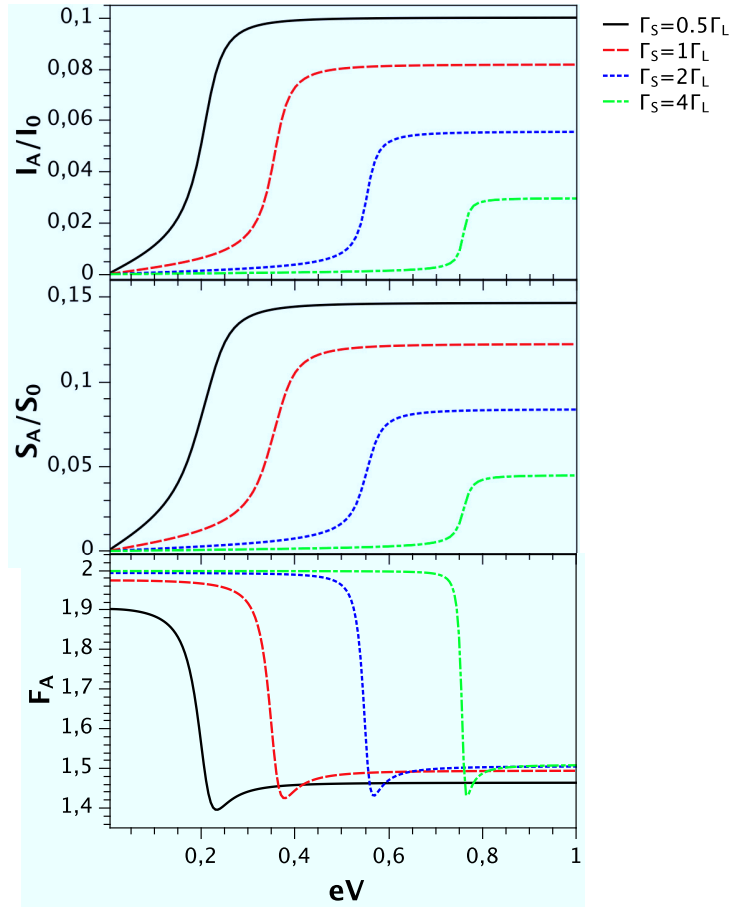


Figura 2.14: Corriente de Andreev, shot noise debido a las reflexiones de Andreev y Factor Fano en función del voltaje aplicado. Los parámetros usados fueron:  $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$ ,  $t = 0,2\Gamma_L$ ,  $\Gamma_R = \Gamma_L$  y  $\Gamma_S = 0.5, 1, 2$  y  $4\Gamma_L$ . Donde,  $I_0 = \frac{2e}{h}$  y  $S_0 = \frac{4e^2}{h}$  y  $F_{LR} = \frac{S_{LR}}{2q|I_{LR}|}$ .

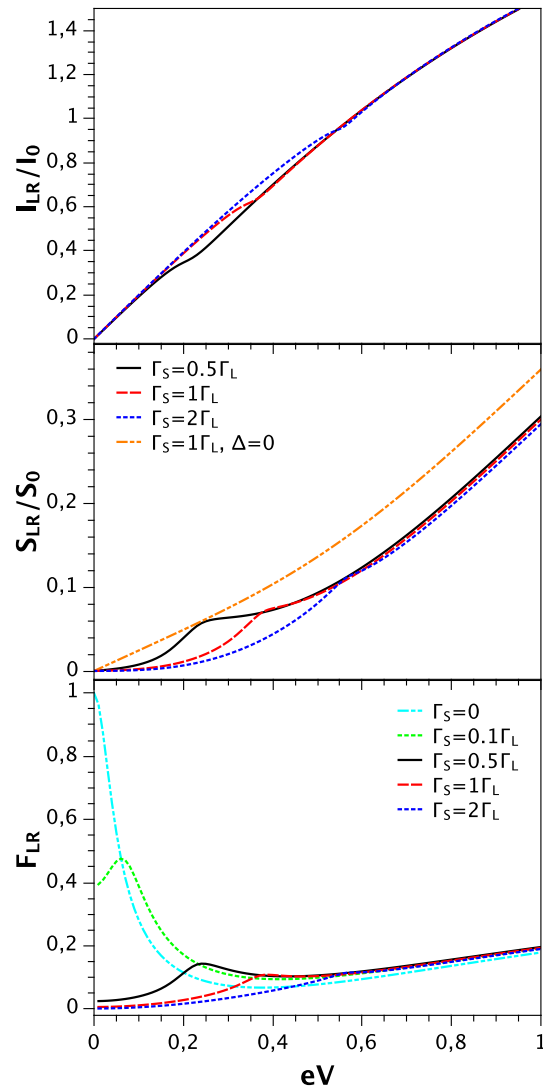


Figura 2.15: Corriente L-R, shot noise y Factor Fano en función del voltaje externo aplicado. Los parámetros usados fueron los mismos de la figura 2.14.

# Capítulo 3

## Efecto Kondo en puntos cuánticos

En este capítulo estudiaremos el efecto Kondo en PC's. Inicialmente, analizaremos un sistema de dos puntos cuánticos acoplados a tres contactos normales considerando una fuerte interacción Coulombiana. Con el objetivo de investigar las propiedades de transporte del sistema utilizaremos una técnica que permite estudiar sistemas de electrones interactuantes a bajas temperaturas, llamado, método de bosones esclavos, en particular estudiaremos el caso  $U$  infinito. Finalmente analizaremos las propiedades de transporte de un anillo con electrones fuertemente correlacionados a bajas temperaturas usando un método de diagonalización exacta.

### 3.1. Doble punto cuántico en configuración T acoplado a tres contactos normales

#### 3.1.1. Método de bosones esclavos para $U$ infinito

En esta sección vamos a estudiar el efecto Kondo de un sistema de dos puntos cuánticos acoplados en forma de T a tres contactos normales (ver sección 2.2) considerando una fuerte correlación entre los electrones del punto cuántico embebido. Teniendo en cuenta que el espaciamiento entre los niveles de energía es muy grande debido al fuerte confinamiento, será suficiente tener en cuenta un único nivel en el PC. Como consecuencia de esto, la interacción Coulombiana restringirá la doble ocupación de ese nivel por lo que podemos considerarla como infinita ( $U = \infty$ ). Para estudiar este problema vamos a emplear el método de bosones esclavos para

U infinito [42], [43].

El método de bosones esclavos consiste en introducir unos operadores auxiliares a los operadores fermiónicos de tal manera que la física Kondo será considerada a través de ellos. Por lo tanto, vamos a introducir los siguientes operadores auxiliares para el punto cuántico central,

$$d_{2\sigma}^\dagger \rightarrow f_{2\sigma}^\dagger b_2 \quad (3.1)$$

$$d_{2\sigma} \rightarrow b_2^\dagger f_{2\sigma} \quad (3.2)$$

donde  $f_{2\sigma}$  ( $f_{2\sigma}^\dagger$ ) es el operador aniquilación (creación) del cuasifermión para un estado ocupado con espín  $\sigma$ , mientras que  $b_2$  ( $b_2^\dagger$ ) es el operador aniquilación (creación) para un estado vacío en el punto cuántico central.

Para eliminar la doble ocupación se debe imponer la siguiente restricción (vínculo) sobre las nuevas cuasipartículas:

$$\sum_{\sigma} f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + b_2^\dagger b_2 = 1 \quad (3.3)$$

que no es más que la relación de completez en el espacio de Hilbert para el punto cuántico central.

Escribiendo el Hamiltoniano 2.10 en términos de los bosones auxiliares  $b_2$  y de los operadores de cuasi fermión  $f_{2\sigma}$  e introduciendo el vínculo 3.3 por medio de un multiplicador de Lagrange, obtenemos,

$$\begin{aligned} H = & \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger C_{k\alpha\sigma} + \sum_{k,\sigma} \epsilon_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger C_{kS\sigma} + \sum_k \left( \Delta C_{kS\uparrow}^\dagger C_{-kS\downarrow}^\dagger + h.c. \right) \\ & + \sum_{\sigma} \epsilon_1 d_{1\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + \sum_{\sigma} \epsilon_2 f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\sigma} t \left( d_{1\sigma}^\dagger b_2^\dagger f_{2\sigma} + f_{2\sigma}^\dagger b_2 d_{1\sigma} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,\alpha,\sigma} \left( V_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger b_2^\dagger f_{2\sigma} + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left( V_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + h.c. \right) \\ & + \lambda \left( \sum_{\sigma} f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + b_2^\dagger b_2 - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La aproximación de campo medio para bosones esclavos se basa en reemplazar el campo bosónico por su valor de expectación

$$\frac{\langle b_2^\dagger \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{\langle b_2 \rangle}{\sqrt{N}} \equiv z^{1/2} \quad (3.5)$$

Entonces, el Hamiltoniano se convierte en un Hamiltoniano efectivo de una partícula independiente dado por,

$$\begin{aligned}
 H_{MFA} = & \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger C_{k\alpha\sigma} + \sum_{k,\sigma} \epsilon_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger C_{kS\sigma} + \sum_k \left( \Delta C_{kS\uparrow}^\dagger C_{-kS\downarrow}^\dagger + h.c. \right) \\
 & + \sum_\sigma \epsilon_1 d_{1\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + \sum_\sigma \tilde{\epsilon}_2 f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + \sum_\sigma \tilde{t} \left( d_{1\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + f_{2\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \right) \\
 & + \sum_{k,\alpha,\sigma} \left( \tilde{V}_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}^\dagger f_{2\sigma} + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left( V_{kS} C_{kS\sigma}^\dagger d_{1\sigma} + h.c. \right) + \lambda (Nz - 1)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

con  $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 + \lambda$ ,  $\tilde{t} = z^{1/2}t$  y  $\tilde{V}_{k\alpha} = z^{1/2}V_{k\alpha}$ . Los parámetros  $z$  y  $\lambda$  pueden ser determinados minimizando la energía del estado base del Hamiltoniano en la aproximación de campo medio  $H_{MFA}$  respecto a estos dos parámetros. Entonces,  $\langle H_{MFA} \rangle$  está dado por,

$$\begin{aligned}
 \langle H_{MFA} \rangle = & \sum_{k,\sigma} \epsilon_{k\alpha} \langle C_{k\alpha\sigma}^\dagger C_{k\alpha\sigma} \rangle + \sum_{k,\sigma} \epsilon_{kS} \langle C_{kS\sigma}^\dagger C_{kS\sigma} \rangle + \sum_k \left( \Delta \langle C_{kS\uparrow}^\dagger C_{-kS\downarrow}^\dagger \rangle + h.c. \right) \\
 & + \sum_\sigma \epsilon_1 \langle d_{1\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \rangle + \sum_\sigma \tilde{\epsilon}_2 \langle f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle + \sum_\sigma \tilde{t} \left( \langle d_{1\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle + \langle f_{2\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \rangle \right) \\
 & + \sum_{k,\alpha,\sigma} \left( \tilde{V}_{k\alpha} \langle C_{k\alpha\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left( V_{kS} \langle C_{kS\sigma}^\dagger d_{1\sigma} \rangle + h.c. \right) + \lambda (z - 1)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La condición de mínima energía es:

$$\frac{\partial \langle H_{MFA} \rangle}{\partial \lambda} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \langle H_{MFA} \rangle}{\partial z} = 0 \tag{3.9}$$

y usando el teorema de Hellman-Feynman:

$$\frac{\partial \langle H_{MFA} \rangle}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial H_{MFA}}{\partial x} \right\rangle \tag{3.10}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$z = \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \sum_\sigma \langle f_{2\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle \tag{3.11}$$

$$\sum_\sigma z^{1/2} t \langle d_{1\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle + \sum_\sigma \sum_{k,\alpha=L,R} z^{1/2} V_{k\alpha} \langle C_{k\alpha\sigma}^\dagger f_{2\sigma} \rangle + \lambda z N = 0 \tag{3.12}$$

Teniendo en cuenta que  $N = 2$ ,

$$z - i \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{4\pi} \ll f_{2\sigma}, f_{2\sigma}^{\dagger} \gg^{<} = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

$$-i \sum_{\sigma} \tilde{t} \int \frac{d\omega}{2\pi} \ll f_{2\sigma}, d_{1\sigma}^{\dagger} \gg^{<} -i \sum_{\sigma k, \alpha=L,R} \tilde{V}_{k\alpha} \int \frac{d\omega}{2\pi} \ll f_{2\sigma}, C_{k\alpha\sigma}^{\dagger} \gg^{<} + 2\lambda z = 0 \quad (3.14)$$

Para simplificar un poco la ecuación 3.14, calculemos la ecuación de movimiento para  $f_{2\sigma}(t)$ :

$$i \frac{df_{2\sigma}(t)}{dt} = \tilde{\epsilon}_2 f_{2\sigma}(t) + \tilde{t} d_{1\sigma}(t) + \sum_{k,\alpha} \tilde{V}_{k\alpha} C_{k\alpha\sigma}(t) \quad (3.15)$$

entonces, multiplicando 3.15 por  $f_{2\sigma}^{\dagger}(t')$  y tomando el valor medio  $\langle \dots \rangle$  se obtiene:

$$\langle i f_{2\sigma}^{\dagger}(t) \cdot \frac{df_{2\sigma}(t)}{dt} \rangle = \tilde{\epsilon}_2 \langle f_{2\sigma}^{\dagger}(t') f_{2\sigma}(t) \rangle + \tilde{t} \langle f_{2\sigma}^{\dagger}(t') d_{1\sigma}(t) \rangle + \sum_{k\alpha} \tilde{V}_{k\alpha} \langle f_{2\sigma}^{\dagger}(t') C_{k\alpha\sigma}(t) \rangle \quad (3.16)$$

Expresando la ecuación obtenida en términos de la función de las funciones de Green y haciendo además la conjugación hermitica de la expresión obtenida, se encuentra,

$$\lambda z = i \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{4\pi} (\omega - \tilde{\epsilon}_2) \ll f_{2\sigma}, f_{2\sigma}^{\dagger} \gg^{<} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 son las ecuaciones centrales de la aproximación de bosones esclavos, estas constituyen un conjunto de ecuaciones autoconsistentes que deben ser resueltas numéricamente. Es importante destacar que el problema quedó reducido al un sistema efectivo de una sola partícula donde el efecto la correlación entre electrones está contenido en los parámetros autoconsistentes.

Finalmente, las ecuaciones 3.18 y 3.19 se pueden escribir de la siguiente forma,

$$z - i \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{4\pi} G_{22}^{<}(\omega) = \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

$$\lambda z = i \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{4\pi} (\omega - \tilde{\epsilon}_2) G_{22}^{<}(\omega) \quad (3.19)$$

### 3.1.2. Propiedades de transporte

Como ya habíamos visto en la sección 2.2, las funciones de Green de los puntos cuánticos están dadas por,

$$G_{11}(\omega)^{-1} = (\omega - \epsilon_1) + i\frac{\Gamma_S}{2} - t^2 G_{11}(\omega) \quad (3.20)$$

$$G_{22}(\omega)^{-1} = (\omega - \epsilon_2) + i\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} - t^2 G_{22}(\omega) \quad (3.21)$$

donde,  $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 + \lambda$ ,  $\tilde{t} = z^{1/2}t$  y  $\tilde{\Gamma}_{k\alpha} = z\Gamma_{k\alpha}$

La densidad de estados para el PC central puede ser escrita como

$$\rho(\omega) = -\frac{z}{\pi} \text{Im } G_{22}^r(\omega) \quad (3.22)$$

y la transmisión está dada por,

$$T_{LR}(\omega) = \Gamma_L \Gamma_R |G_{22}(\omega)|^2 \quad (3.23)$$

Con la formulación desarrollada en la sección anterior podemos realizar los cálculos numéricos para calcular las propiedades de transporte del sistema, en particular, la densidad de estados del PC central y la transmisión del contacto L a R. Los resultados numéricos obtenidos para la densidad de estados y la transmisión de L a R son mostrados en la figura 3.1. Se consideró un acoplamiento débil entre los puntos cuánticos central y lateral y un acoplamiento simétrico entre L, R y el PC,  $\Gamma_R = \Gamma_L$ . En la figura se muestra como cambia la densidad de estados y la transmisión a medida que se incrementa paulatinamente el acoplamiento del sistema L-puntos cuánticos-R con el contacto normal S. Se puede observar un pico en el nivel de Fermi el cual es debido al efecto Kondo, adicionalmente, centrado en la energía del punto cuántico lateral, podemos ver un pico correspondiente al efecto Fano ocasionado por la interferencia cuántica entre el estado localizado en el PC lateral con el continuo del PC acoplado a los contactos L y R. A medida que se incrementa el acoplamiento del sistema con el contacto S, se ve como el pico asociado al efecto Fano va desapareciendo. Sin embargo el pico asociado al efecto Kondo no se ve afectado por el incremento del acoplamiento  $\Gamma_S$ .

En la figura 3.2 se puede observar la densidad de estados y la transmisión cuando el acoplamiento entre puntos cuánticos ( $t$ ) se incrementa. Podemos observar una vez más el pico Kondo centrado en la energía de Fermi y un pico lateral correspondiente a la interferencia Fano. En este caso los picos están más separados que en el caso anterior y el pico Fano es menos agudo. Al incrementar  $\Gamma_S$  ocurre exactamente lo mismo observado en la figura 3.1, esto es, el pico Fano disminuye a medida que el acoplamiento con S aumenta. Adicionalmente en la figura 3.3 se

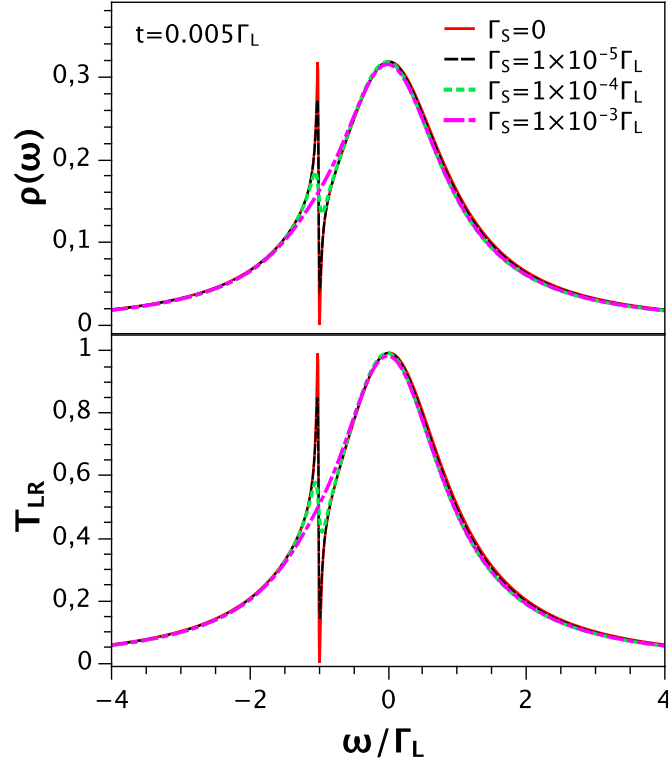


Figura 3.1: Densidad de estados y transmisión para un sistema de dos puntos cuánticos y tres contactos normales en régimen Kondo.  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = 0,001\Gamma_L$ .

muestra como varía la energía renormalizada en función de la energía del punto cuántico central, claramente se observa que aunque el sistema comience con una energía  $\epsilon_0$ , muy lejana a la energía de Fermi, el efecto Kondo altera esta energía y la lleva al nivel de Fermi [19]. Por lo tanto, al igual que en el sistema sin interacción, el contacto normal S juega un papel crucial introduciendo decoherencia en el sistema. Es importante mencionar que las principales características encontradas para el caso no-interactuante permanecen cuando se consideran correlación entre electrones, es decir, el perfil Fano es afectado drásticamente por el tercer contacto. De nuestros resultados podemos concluir que el efecto Fano es robusto frente a la interacción entre electrones.

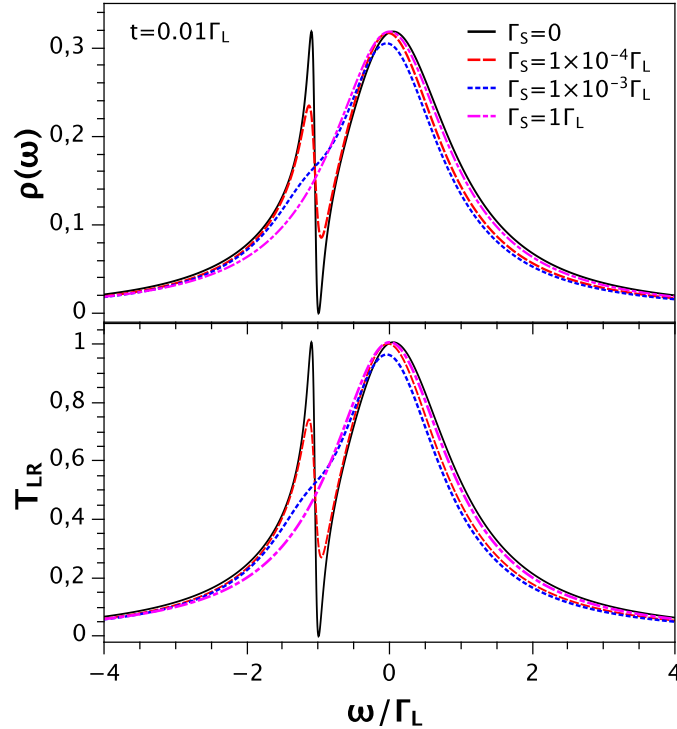


Figura 3.2: Densidad de estados y transmisión para un sistema de dos puntos cuánticos y tres contactos normales en régimen Kondo.  $\Gamma_R = \Gamma_L$ ,  $\epsilon_2 = -3,5\Gamma_L$ ,  $\epsilon_1 = 0,001\Gamma_L$ . El pico en el nivel de Fermi es debido al efecto Kondo.

## 3.2. Efecto Kondo en un anillo

En esta sección estudiaremos las propiedades de transporte de un anillo en el régimen Kondo. Este tipo de sistemas han recibido mucha atención debido a que la presencia del campo magnético incorpora nuevas herramientas en el control de las propiedades de transporte. Hay varios estudios experimentales en los cuales se observa al mismo tiempo el efecto Kondo y el efecto Aharonov-Bohm (AB) [45], [46]. Por ejemplo, experimentos presentados por A. Fuhrer et al. investigan el efecto Kondo de un anillo como función del campo magnético, en el estudio de este sistema se encontró un efecto Kondo inusual debido a la presencia de un estado triplete [47]. Las transiciones single-triplete han sido extensivamente estudiadas en puntos cuánticos [49], [50]. En esta sección se estudiará como surge este estado

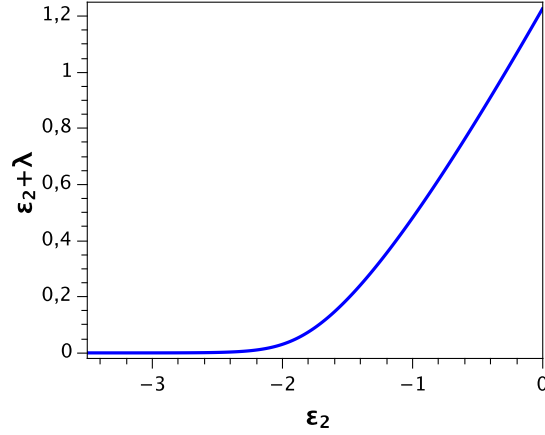


Figura 3.3:  $\tilde{\epsilon}_2$  en función de  $\epsilon_2$ . La interacción renormaliza el nivel de energía del punto cuántico y lo alinea con la energía de Fermi en régimen Kondo

tripleto y su evolución con el voltaje de puerta y el campo magnético aplicado.

El esquema del sistema que se va a estudiar se muestra en la figura 3.4. Debido al fuerte confinamiento, la energía de repulsión entre electrones  $U$ , juega un papel importante. El sistema consta de un anillo de  $M$  sitios conectado a dos contactos normales el cual representamos por el siguiente Hamiltoniano,

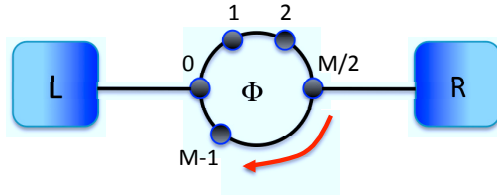


Figura 3.4: Esquema del anillo de  $M-1$  puntos cuánticos conectado a dos contactos L y R y sobre el cual se aplica un campo magnético.

$$\begin{aligned}
 H_{\text{anillo}} = & \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} t_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \sum_{i\sigma} V_g n_{i\sigma} \\
 & + U \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i\bar{\sigma}} + U \sum_{i \neq j, \sigma, \sigma'} n_{i\sigma} n_{j\sigma'} + h.c
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde,  $c_{i\sigma}$  ( $c_{i\sigma}^\dagger$ ) aniquila (crea) un electrón en el sitio  $i$  del anillo con espín  $\sigma$ ,  $n_{i\sigma}$  es el operador numero de partículas,  $\langle ij \rangle$  indica que los sitios  $i$  y  $j$  son contiguos,  $V_g$  es el voltaje de puerta (se considera el mismo para cada sitio del anillo),  $U$  es la repulsión Coulombiana entre los electrones en el anillo. El subíndice  $i$  va desde 0 hasta  $M - 1$ . Se asume que la repulsión Coulombiana entre dos electrones en el mismo sitio del anillo es igual a la repulsión experimentada entre dos electrones localizados en diferentes sitios del anillo. Los elementos de matriz  $t_{ij}$  dependen del flujo magnético de la forma  $t_{ij} = t_a e^{i\phi}$  donde,

$$\phi = \frac{2\pi\Phi}{M\Phi_0} \quad (3.25)$$

donde  $\Phi$  es el flujo que atraés del anillo y  $\Phi_0 = h/e$  es el cuanto de flujo magnético.

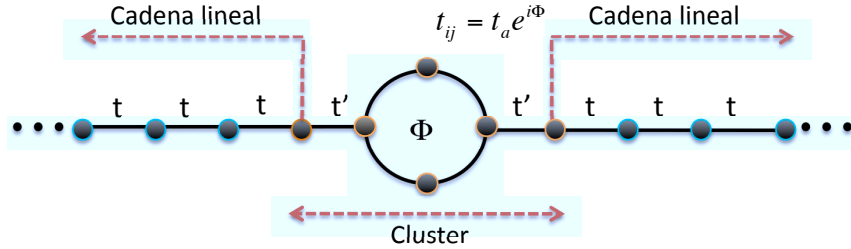


Figura 3.5: Descripción del esquema usado para la implementación de LDECA para el caso particular de un anillo de  $M=4$  acoplado a dos cadenas semi-infinitas (contactos L y R).

Los contactos, son descritos por cadenas semi-infinitas de átomos conectados por un elemento de matriz  $t$ . La conductancia calculada usando el formalismo de Keldysh y a diferencia de potencial cero, está dada por

$$\sigma_{LR} = 4e^2/h\pi^2 (t_c^2 \rho_{sc}(E_F))^2 |G_{LR}(E_F)|^2 \quad (3.26)$$

donde  $G_{LR}$  es el propagador que mueve un electrón de L a R y  $E_F$  es la energía de Fermi. La función de Green  $G_{LR}$  a temperatura cero, es calculada usando el método LDECA (“Logarithmic Discretized Embedded Cluster Approximation”) [44]. El método LDECA es usado para estudiar sistemas que consisten de una región en la cual se considera interacción entre electrones, débilmente acoplada a bandas de conducción sin interacción. Esta aproximación está basada en la idea de que los efectos de muchos cuerpos son de carácter local. El primer paso en

este método consiste en separar el sistema en dos porciones. Una de las porciones consta de un clúster que contiene el anillo y los primeros sitios de los contactos y es allí donde se espera que la mayoría de los efectos de muchos cuerpos estén confinados. La otra corresponde a el resto de los contactos (ver figura 3.5). La función de Green del cluster es calculada exactamente usando el método de Lanczos [48], la otra porción es un problema de un cuerpo y su función de Green también puede ser calculada exactamente. La conexión entre las dos porciones del sistema es reestablecida usando la ecuación de Dyson,  $G = g + gtG$ , donde  $g$  es la función de Green de cada parte del sistema,  $G$  es la función de Green total que queremos calcular y  $t$  es la matriz de acoplamiento que reestablece las conexiones. La figura 3.6 muestra la conductancia en función del voltaje de puerta para un anillo de  $M = 4$  sitios y para  $U = 0$ . En este caso, la conductancia tiene un pico cada vez que  $E_n = E_F$ . Se observa que para  $\Phi/\Phi_0 = 0$  la conductancia exhibe tres picos los cuales corresponden a  $E_0 = -2t_a$ ,  $E_2 = 2t_a$  y  $E_1 = E_3 = 0$ . Cuando  $\Phi/\Phi_0 \neq 0$  los niveles degenerados se desdoblán como era de esperarse. Vemos también que la conductancia se hace cero cuando  $\Phi/\Phi_0 = 1/2$  (en general hay una supresión de la conductancia para  $\Phi/\Phi_0 = n/2$  [51]).

En las figuras 3.7 se muestran los resultados para la conductancia en el régimen Kondo para un clúster con  $M = 4$ . Para  $\Phi/\Phi_0 = 0$  se observa que para un potencial de puerta  $V_g/t_a = 2$  el anillo tiene un electrón en el estado  $k_0$ . El espín del electrón en el anillo se correlaciona con los espines de los contactos y por lo tanto aparece una resonancia en el nivel de Fermi debido al efecto Kondo, lo mismo ocurre para el estado  $k_2$ . El caso de los estados degenerados  $k_1$  y  $k_3$  es más interesante (parte central de la figura 3.7). Se observan 3 picos, el primer y tercer pico corresponden a 3 y 5 electrones en el anillo y por lo tanto, el espín de anillo para estos estados sería  $1/2$ . Este espín total del anillo interactúa con el espín de los electrones en los contactos y por lo tanto se produce la resonancia Kondo en el nivel de Fermi como en el caso anterior. Para el pico central el anillo tiene 4 electrones. La presencia del pico Kondo en la conductancia es una consecuencia de un estado con espín total 1. Puesto que el estado  $k_1$  y  $k_3$  son degenerados, dos electrones con el mismo espín pueden entrar al anillo formando un estado triple con  $S = 1$ . Estos estados tripletes han sido observados experimental y teóricamente en puntos cuánticos. Cuando  $\Phi \neq 0$  la degeneración de los estados la degeneración de los estados  $k_1$  y  $k_3$  se rompe.

Un análisis similar se puede hacer en el caso de  $M=6$  como se ve en la figura 3.8. En este caso se tienen 6 estados correspondientes a las energías  $E_2 = -2t_a$ ,  $E_0 = E_5 - 1t_a$ ,  $E_1 = E_4 = 1t_a$ ,  $E_3 = 2t_a$ . Se observa que cuando  $\Phi = 0$  los estados  $k_0(k_1)$  es degenerado con  $k_0(k_1)$ . Cuando  $\Phi \neq 0$  la degeneración de los estados la degeneración de los estados  $k_1$  y  $k_5$  se rompe. A medida que el flujo se incrementa ocurre una transición entre los estados  $S = 1$  y  $S = 0$  y la conductancia

---

cae a cero. Otro resultado interesante se observa cuando  $\Phi/\Phi_0 = 1/2$  se produce una interferencia destructiva que destruye el estado  $S = 1$  y por lo tanto el efecto Kondo desaparece.

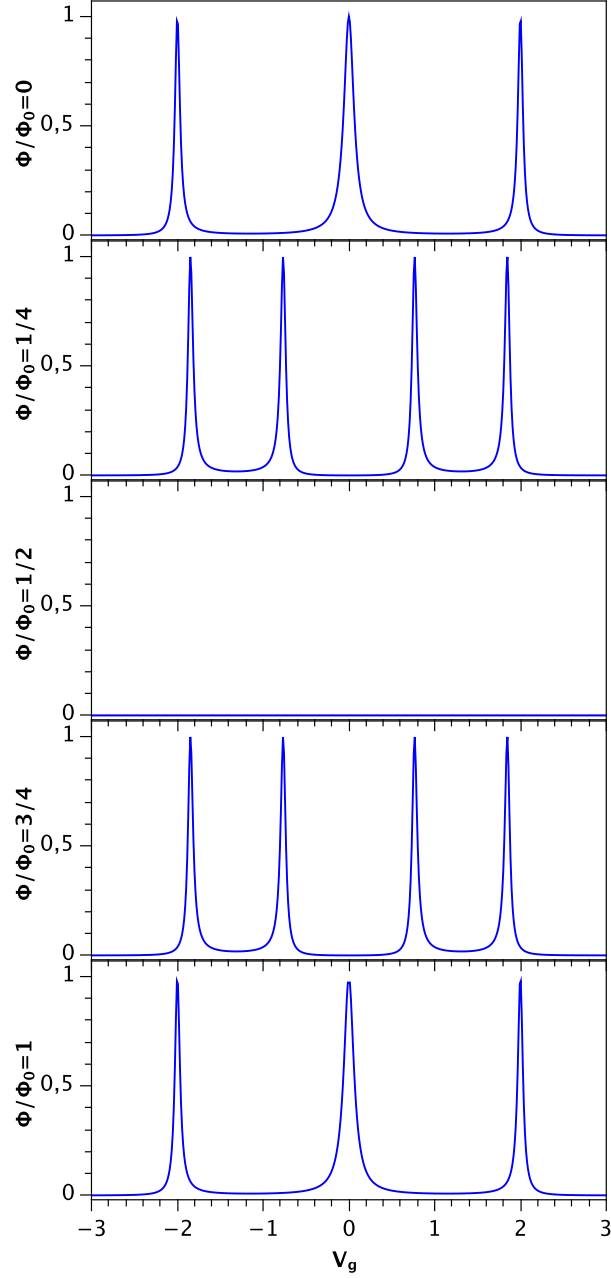


Figura 3.6: Conductancia en función de  $\Phi$  y  $V_g$  para un anillo de 4 sitios y un cluster de 6 sitios para  $U = 0$  y  $t' = 0,25t_a$ . Para  $\Phi/\Phi_0 = 1/2$  se puede observar una cancelación total del efecto AB.

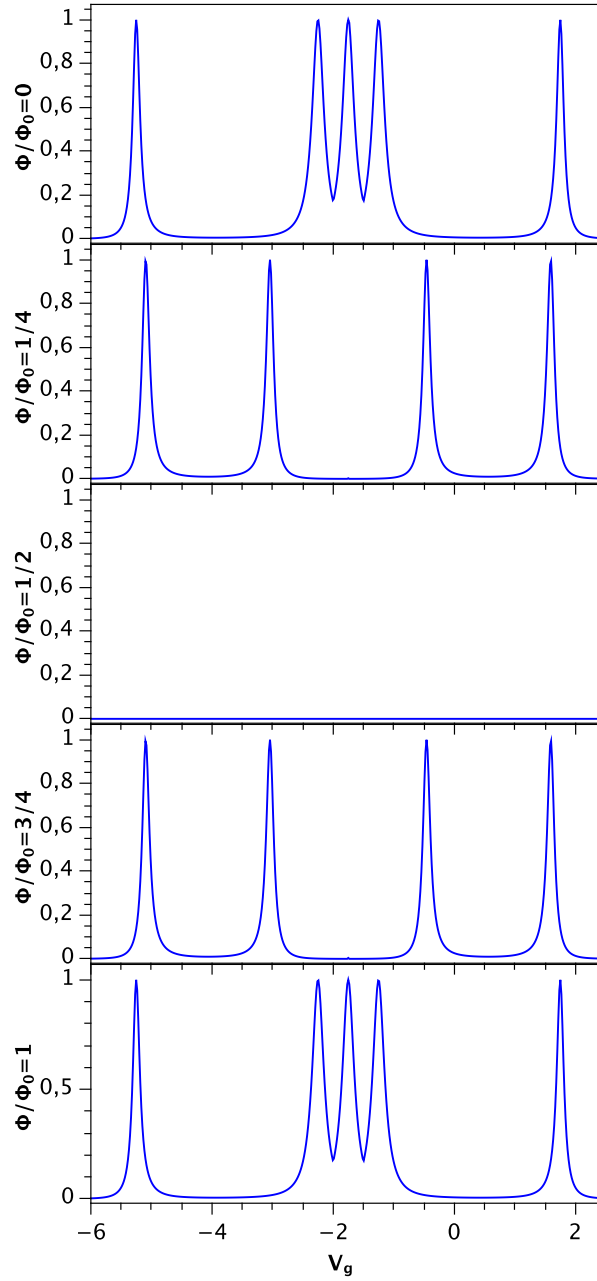


Figura 3.7: Conductancia en función de  $\Phi$  y  $V_g$  para un anillo de 4 sitios y un cluster de 6 sitios a temperatura cero y para  $U = 0,5t_a$  y  $t' = 0,25t_a$

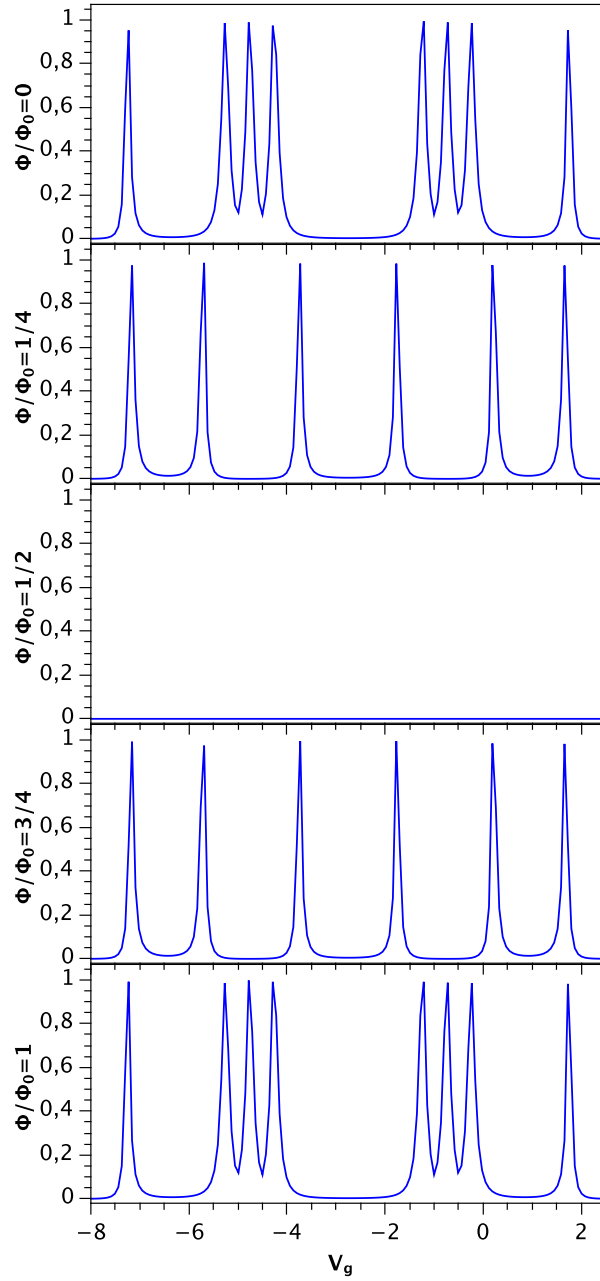


Figura 3.8: Conductancia en función de  $\Phi$  y  $V_g$  para un anillo de 6 sitios y un cluster de 8 sitios para  $U = 0,5t_a$  y  $t' = 0,25t_a$

# Capítulo 4

## Conclusiones

A lo largo de esta tesis se investigaron las propiedades de transporte a través de puntos cuánticos. Inicialmente se estudió el problema de dos puntos cuánticos acoplados a tres contactos normales y se analizó el efecto de decoherencia producido por el tercer contacto normal. Posteriormente, se estudió un sistema similar, pero considerando ahora que uno de los contactos era superconductor. Se analizó la densidad de estados de los PC's y la transmisión entre dos contactos normales  $T_{LR}$  y entre un contacto normal y el superconductor  $T_{LS}$ . El objetivo era investigar el papel del contacto superconductor en las propiedades de interferencia cuántica del sistema. La transmisión entre dos contactos normales muestra perfiles atribuidos a los efectos de interferencia cuántica Fano-Andreev, esto es, efecto Fano debido a estados ligados de Andreev inducidos por el contacto superconductor. Además, encontramos que a medida que el acoplamiento con el contacto superconductor aumenta, se acentúan las líneas asimétricas del perfil Fano. Por lo mencionado anteriormente, se concluyó que el contacto superconductor no introduce decoherencia en el sistema y por el contrario, preserva las propiedades de interferencia cuántica. Adicionalmente, con el fin de obtener una mejor comprensión del sistema estudiamos el comportamiento de la corriente, shot noise y factor Fano, en función de los parámetros que definen el sistema. Estas cantidades revelan una clara influencia del efecto de proximidad y por lo tanto, de las reflexiones de Andreev en las propiedades de transporte del sistema.

Para complementar el estudio anterior se estudiaron los efectos de correlación electrónica en puntos cuánticos y anillos cuánticos. Primero se estudió el efecto Kondo en un sistema de dos puntos cuánticos acoplados a tres contactos normales. Se analizaron la densidad de estados y transmisión electrónica. Los resultados muestran que el efecto de tercer contacto es introducir decoherencia en el sistema destruyendo el efecto Fano. Se pudo concluir, sin embargo, que los efectos de

interferencia cuánticas son robustos frente a la interacción de Coulomb.

Finalmente, se investigó el efecto Kondo en un anillo conectado simétricamente a dos contactos normales. Debido a que los estados del anillo suficientemente separados y que la energía de Coulomb  $U$  es grande, el sistema alcanza el régimen Kondo en este caso. Se encontró que usando el flujo magnético la degeneración de los estados del anillo puede ser sintonizada. En este caso, se observó la aparición de un estado Kondo donde los contactos están apantallando un espín total  $S = 1$ . Para los estados degenerados se puede concluir lo siguiente: i) Cuando el flujo es un número entero de veces  $\Phi_0$  los estados degenerados tienen la misma fase y se observa un espín total  $S = 1$ , en este caso, a medida que se incrementa el flujo se rompe la degeneración. ii) Cuando el flujo es una fracción  $n\Phi_0/2$  se produce una interferencia destructiva que destruye el estado  $S = 1$  y el efecto Kondo soportado por este estado. También se observó el efecto Aharonov-Bohm para  $\Phi = \Phi_0/2$ .

# Apéndice A

## Cálculo de las funciones de Green del sistema de Doble punto cuántico en configuración T acoplado a dos contactos normales y un SC

La ecuación de Dyson 2.15 se puede reescribir como:

$$\left[ (\mathbf{g}_{j,\sigma}^r)^{-1} - \Sigma_j^r \right] \mathbf{G}_{j,\sigma}^r = \mathbf{1} \quad (\text{A.1})$$

de la cual se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} g_{1,11}^{-1} - \Sigma_{S1,11} & -\Sigma_{S1,12} \\ -\Sigma_{S1,21} & g_{1,22}^{-1} - \Sigma_{S1,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11,11}^r & G_{11,12}^r \\ G_{11,21}^r & G_{11,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{21,11}^r & G_{21,12}^r \\ G_{21,21}^r & G_{21,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Reemplazando  $g_{1,11}(\omega)^{-1}$ ,  $\Sigma_{S1,11}(\omega)$ ,  $\Sigma_{S1,12}(\omega)$ , etc, de acuerdo a las ecuaciones 2.21, 2.17 y 2.18, podemos escribir A.2 como:

$$\begin{pmatrix} \omega - \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) & -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} \\ -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} & \omega + \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11,11}^r & G_{11,12}^r \\ G_{11,21}^r & G_{11,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{21,11}^r & G_{21,12}^r \\ G_{21,21}^r & G_{21,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

La segunda ecuación matricial que obtenemos de 2.23 es:

$$\begin{pmatrix} g_{2,11}^{-1} - \Sigma_{S2,11} & 0 \\ 0 & g_{2,22}^{-1} - \Sigma_{S2,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{21,11}^r & G_{21,12}^r \\ G_{21,21}^r & G_{21,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11,11}^r & G_{11,12}^r \\ G_{11,21}^r & G_{11,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Usando las ecuaciones 2.21, 2.17 y 2.18 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \omega - \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) & 0 \\ 0 & \omega + \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{21,11}^r & G_{21,12}^r \\ G_{21,21}^r & G_{21,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11,11}^r & G_{11,12}^r \\ G_{11,21}^r & G_{11,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La tercera ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} g_{1,11}^{-1} - \Sigma_{S1,11} & -\Sigma_{S1,12} \\ -\Sigma_{S1,21} & g_{1,22}^{-1} - \Sigma_{S1,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12,11}^r & G_{12,12}^r \\ G_{12,21}^r & G_{12,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{22,11}^r & G_{22,12}^r \\ G_{22,21}^r & G_{22,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{pmatrix} \omega - \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) & -i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \\ -i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} & \omega + \epsilon_1 + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12,11}^r & G_{12,12}^r \\ G_{12,21}^r & G_{12,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{22,11}^r & G_{22,12}^r \\ G_{22,21}^r & G_{22,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Por último, de la ecuación 2.23 obtenemos la cuarta ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} g_{2,11}^{-1} - \Sigma_{S2,11} & 0 \\ 0 & g_{2,22}^{-1} - \Sigma_{S2,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{22,11}^r & G_{22,12}^r \\ G_{22,21}^r & G_{22,22}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12,11}^r & G_{12,12}^r \\ G_{12,21}^r & G_{12,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) & 0 \\ 0 & \omega + \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{22,11}^r & G_{22,12}^r \\ G_{22,21}^r & G_{22,22}^r \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12,11}^r & G_{12,12}^r \\ G_{12,21}^r & G_{12,22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

De las ecuaciones A.3 y A.5 obtenemos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) & -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} \\ -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} & \omega + \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \omega - \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) & 0 \\ 0 & \omega + \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) \end{pmatrix}} \\ & = \begin{pmatrix} G_{11,11}^r & G_{11,12}^r \\ G_{11,21}^r & G_{11,22}^r \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Análogamente, de las ecuaciones A.7 y A.9 obtenemos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) & 0 \\ 0 & \omega + \epsilon_2 + i\left(\frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2}\right) \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \omega - \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) & -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} \\ -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} & \omega + \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) \end{pmatrix}} \\ & = \begin{pmatrix} G_{22,11}^r & G_{22,12}^r \\ G_{22,21}^r & G_{22,22}^r \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Haciendo uso de la técnica de decimación, se puede ver fácilmente que el denominador del segundo término en las ecuaciones A.10 y A.11 está relacionada con las funciones de Green de los puntos cuánticos 1 y 2 cuando se consideran desacoplados el uno del otro. Por lo tanto, A.10 puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} G_{1,11}^r & G_{1,12}^r \\ G_{1,21}^r & G_{1,22}^r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) & -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} \\ -i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega)\frac{\Delta}{\omega} & \omega + \epsilon_1 + i\frac{\Gamma_S}{2}\rho(\omega) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{2,11} & G_{2,12} \\ G_{2,21} & G_{2,22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

y A.11 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{2,11}^r & G_{2,12}^r \\ G_{2,21}^r & G_{2,22}^r \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) & 0 \\ 0 & \omega + \epsilon_2 + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{1,11} & G_{1,12} \\ G_{1,21} & G_{1,22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, usando una notación más compacta las ecuaciones A.12 y A.13 pueden ser escritas como:

$$\mathbf{G}_1(\omega)^{-1} = \left( \omega + i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \right) \mathbf{I} - \epsilon_1 \sigma_z - i \frac{\Gamma_S}{2} \rho(\omega) \frac{\Delta}{\omega} \sigma_x - t^2 \mathbf{G}_2(\omega) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{G}_2(\omega)^{-1} = \left( \omega + i \left( \frac{\Gamma_L + \Gamma_R}{2} \right) \right) \mathbf{I} - \epsilon_2 \sigma_z - t^2 \mathbf{G}_1(\omega) \quad (\text{A.15})$$

donde,  $\mathbf{I}$  representa la matriz identidad  $2 \times 2$  y  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  denotan las matrices de Pauli usuales.

# Apéndice B

## Shot noise para un sistema N-S

La expresión general para las fluctuaciones de corriente (shot noise) entre dos contactos  $\alpha$  y  $\beta$  está definido como:

$$S(t_1, t_2) = \langle \Delta I_\alpha(t_1) \Delta I_\beta(t_2) \rangle \quad (\text{B.1})$$

donde,

$$\Delta I_\alpha(t) = I_\alpha(t) - \langle I_\alpha(t) \rangle \quad (\text{B.2})$$

Haciendo la transformada de Fourier de la ecuación B.1

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(0) S &= \int dt_1 dt_2 \langle \Delta I_\alpha(t_1) \Delta I_\beta(t_2) \rangle \\ &= \int dt_1 dt_2 \sum_{\sigma\sigma'} \langle \Delta I_{\alpha\sigma}(t_1) \Delta I_{\beta\sigma'}(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde, la corriente está dada por:

$$I_{\alpha\sigma}(t) = i \frac{e}{\hbar} \sum_k \left( T_{\alpha k} C_{\alpha, k\sigma}^\dagger(t) d_{i\sigma}(t) - T_{\alpha k}^* d_{i\sigma}^\dagger(t) C_{\alpha, k\sigma}(t) \right) \quad (\text{B.4})$$

Calculemos primero  $\langle \Delta I_{\alpha\uparrow}(t_1) \Delta I_{\beta\uparrow}(t_2) \rangle$ :

$$\langle \Delta I_{L\uparrow}(t_1) \Delta I_{L\uparrow}(t_2) \rangle = \langle [I_{L\uparrow}(t_1) - \langle I_{L\uparrow}(t_1) \rangle] [I_{L\uparrow}(t_2) - \langle I_{L\uparrow}(t_2) \rangle] \rangle \quad (\text{B.5})$$

Aquí  $\langle \dots \rangle$  denota el promedio estadístico y cuántico sobre el estado de no-equilibrio. Después de un poco de manipulación algebraica y además usando el

teorema de Wick, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \langle \Delta I_{L\uparrow}(t_1) \Delta I_{L\uparrow}(t_2) \rangle \\
&= -\frac{e^2}{\hbar^2} \sum_{kk'} \sum_{nm} \left[ T_{kLn} T_{k'Lm} \langle C_{Lk\uparrow}^\dagger(t_1) d_{m\uparrow}(t_2) \rangle \langle d_{n\uparrow}(t_1) C_{Lk'\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle \right. \\
&\quad + T_{kLn}^* T_{k'Lm}^* \langle d_{n\uparrow}^\dagger(t_1) C_{Lk'\uparrow}(t_2) \rangle \langle C_{Lk\uparrow}(t_1) d_{m\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle \\
&\quad - T_{kLn} T_{k'Lm}^* \langle C_{kL\uparrow}^\dagger(t_1) C_{Lk'\uparrow}(t_2) \rangle \langle d_{n\uparrow}(t_1) d_{m\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle \\
&\quad \left. - T_{kLn}^* T_{k'Lm}^* \langle d_{n\uparrow}^\dagger(t_1) d_{m\uparrow}(t_2) \rangle \langle C_{kL\uparrow}(t_1) C_{Lk'\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle \right]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

En la notación de Nambu podemos expresar los acoplamientos con los contactos que llamaremos  $t_{k\alpha n\uparrow(\downarrow)}$  y las funciones de Green de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_{k\alpha n} = \begin{pmatrix} t_{k\alpha n\uparrow} & 0 \\ 0 & -t_{-k\alpha n\downarrow} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta}^<(t_1, t_2) = i \begin{pmatrix} \langle Y_{\beta\uparrow}^\dagger(t_2) X_{\alpha\uparrow}(t_1) \rangle & \langle Y_{\beta\downarrow}(t_2) X_{\alpha\uparrow}(t_1) \rangle \\ \langle Y_{\beta\uparrow}^\dagger(t_2) X_{\alpha\downarrow}(t_1) \rangle & \langle Y_{\beta\downarrow}(t_2) X_{\alpha\downarrow}(t_1) \rangle \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta}^<(t_1, t_2) = -i \begin{pmatrix} \langle X_{\alpha\uparrow}(t_1) Y_{\beta\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle & \langle X_{\alpha\uparrow}(t_1) Y_{\beta\downarrow}(t_2) \rangle \\ \langle X_{\alpha\downarrow}(t_1) Y_{\beta\uparrow}^\dagger(t_2) \rangle & \langle X_{\alpha\downarrow}(t_1) Y_{\beta\downarrow}^\dagger(t_2) \rangle \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

donde  $X$  y  $Y$  representan los operadores  $C_{Lk\sigma}$ ,  $d_{n\sigma}$ , etc.

De acuerdo con esto, la ecuación B.6 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
& \langle \Delta I_{L\uparrow}(t_1) \Delta I_{L\uparrow}(t_2) \rangle \\
&= -\frac{e^2}{\hbar^2} \sum_{kk'} \sum_{nm} \left\{ \left[ \mathbf{G}_{m,Lk}^< \mathbf{T}_{kLn} \right]_{11} \left[ \mathbf{G}_{n,Lk'}^> \mathbf{T}_{k'Lm} \right]_{11} \right. \\
&\quad + \left[ \mathbf{G}_{Lk',n}^< \mathbf{T}_{k'Lm}^* \right]_{11} \left[ \mathbf{G}_{Lk,m}^> \mathbf{T}_{kLn} \right]_{11} \\
&\quad - \left[ \mathbf{G}_{Lk',Lk}^< \mathbf{T}_{kLn}^* \right]_{11} \left[ \mathbf{G}_{n,m}^> \mathbf{T}_{k'Lm} \right]_{11} \\
&\quad \left. - \left[ \mathbf{G}_{m,n}^< \mathbf{T}_{kLn}^* \right]_{11} \left[ \mathbf{G}_{Lk,Lk'}^> \mathbf{T}_{k'Lm} \right]_{11} \right\}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Adicionalmente, usando las reglas de continuación analítica obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
G_{d\uparrow,k\uparrow}^{<, >}(t_1, t_2) &= T_{kLm}^* \int dt \left[ G_{d\uparrow,d\uparrow}^r(t_1, t) g_{k\uparrow,k\uparrow}^{<, >}(t, t_2) + G_{d\uparrow,d\uparrow}^{<, >}(t_1, t) g_{k\uparrow,k\uparrow}^a(t, t_2) \right. \\
&\quad \left. + G_{d\uparrow,d\downarrow}^r(t_1, t) g_{k\downarrow,k\uparrow}^{<, >}(t, t_2) + G_{d\uparrow,d\downarrow}^{<, >}(t_1, t) g_{k\downarrow,k\uparrow}^a(t, t_2) \right]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$G_{k\uparrow,d\uparrow}^{<, >}(t_1, t_2) = T_{kLm} \int dt \left[ g_{k\uparrow,k\uparrow}^{<, >}(t_1, t) G_{d\uparrow,d\uparrow}^a(t, t_2) + g_{k\uparrow,k\uparrow}^r(t_1, t) G_{d\uparrow,d\uparrow}^{<, >}(t, t_2) \right. \\ \left. + g_{k\uparrow,k\downarrow}^{<, >}(t_1, t) G_{d\downarrow,d\uparrow}^a(t, t_2) + g_{k\uparrow,k\downarrow}^r(t_1, t) G_{d\downarrow,d\uparrow}^{<, >}(t, t_2) \right] \quad (\text{B.12})$$

$$G_{k\uparrow,k'\uparrow}^{<, >}(t_1, t_2) = T_{k'Lm}^* \int dt \left[ G_{k\uparrow,d\uparrow}^r(t_1, t) g_{k'\uparrow,k'\uparrow}^{<, >}(t, t_2) + G_{k\uparrow,d\uparrow}^{<, >}(t_1, t) g_{k'\uparrow,k'\uparrow}^a(t, t_2) \right. \\ \left. + G_{k\uparrow,d\downarrow}^r(t_1, t) g_{k'\downarrow,k'\uparrow}^{<, >}(t, t_2) + G_{k\uparrow,d\downarrow}^{<, >}(t_1, t) g_{k'\downarrow,k'\uparrow}^a(t, t_2) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$G_{k\uparrow,d\sigma}^r(t_1, t_2) = T_{kLm} \int dt \left[ g_{k\uparrow,k\uparrow}^r(t_1, t) G_{d\uparrow,d\sigma}^r(t, t_2) + g_{k\uparrow,k\downarrow}^r(t_1, t) G_{d\downarrow,d\sigma}^r(t, t_2) \right] \quad (\text{B.14})$$

Sutituyendo las relaciones B.11 a B.14 en la ecuación B.10 y después de un poco de manipulación algebraica teniendo en cuenta que  $\Gamma_\alpha = 2\pi \sum_k \rho_\alpha |T_{\alpha k}|^2$  (con  $\rho_\alpha$  la densidad de estados del contacto  $\alpha$ ), todas las funciones de Green pueden ser expresadas en términos de las funciones de Green del punto cuántico y los contactos. Entonces, el espectro de ruido  $S_{11}$  para  $\langle \Delta I_{L\uparrow}(t_1) \Delta I_{L\uparrow}(t_2) \rangle$  puede ser escrito como:

$$S_{11} = -\frac{e^2}{h} \int d\omega \left[ (G^r \Sigma_L^< + G^< \Sigma_L^a)_{11} (G^r \Sigma_L^> + G^> \Sigma_L^a)_{11} \right. \\ + (\Sigma_L^< G^a + \Sigma_L^r G^<)_{11} (\Sigma_L^> G^a + \Sigma_L^r G^>)_{11} \\ - G_{11}^> (\Sigma_L^r G^r \Sigma_L^<)_{11} - G_{11}^> [(\Sigma_L^< G^a + \Sigma_L^r G^<) \Sigma_L^a]_{11} \\ \left. - G_{11}^< (\Sigma_L^r G^r \Sigma_L^>)_{11} - G_{11}^< [(\Sigma_L^> G^a + \Sigma_L^r G^>) \Sigma_L^a]_{11} \right] \quad (\text{B.15})$$

donde,  $G^{r,a,<,>} \equiv G_{d,d}^{r,a,<,>}$  son las funciones de Green para los puntos cuánticos en presencia de los contactos, mientras que  $g^{r,a,<,>}$  son las funciones de Green exactas en ausencia del acoplamiento entre los contactos y los puntos cuánticos.

Podemos simplificar un poco más la ecuación B.15 usando la ecuación de

$$\text{Keldysh } \mathbf{G}^{<,>} = (1 + \mathbf{G}^r \Sigma^r) \mathbf{G}_0^{<,>} (1 + \Sigma^a \mathbf{G}^a) + \mathbf{G}^r \Sigma^< \mathbf{G}^a$$

$$\begin{aligned} S_{11} = -\frac{e^2}{h} \int d\omega & \left[ G_{11}^r \Sigma_{L,11}^< G_{11}^r \Sigma_{L,11}^> + G_{11}^r \Sigma_{L,11}^< G_{11}^> (\Sigma_{L,11}^a - \Sigma_{L,11}^r) \right. \\ & + G_{11}^< (\Sigma_{L,11}^a - \Sigma_{L,11}^r) G_{11}^> \Sigma_{L,11}^a + G_{11}^< (\Sigma_{L,11}^a - \Sigma_{L,11}^r) G_{11}^r \Sigma_{L,11}^> \\ & + G_{11}^a \Sigma_{L,11}^< G_{11}^a \Sigma_{L,11}^> + G_{11}^> \Sigma_{L,11}^< G_{11}^a (\Sigma_{L,11}^r - \Sigma_{L,11}^a) \\ & \left. + G_{11}^< (\Sigma_{L,11}^r - \Sigma_{L,11}^a) G_{11}^> \Sigma_{L,11}^r + (\Sigma_{L,11}^r - \Sigma_{L,11}^a) G_{11}^< \Sigma_{L,11}^> G_{11}^a \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

En la aproximación de banda ancha, a temperatura cero y teniendo en cuenta las expresiones para  $T_A$  y  $T_{qp}$  dadas por 2.37 y en 2.39, la ecuación B.16 se reduce a

$$S_{11} = \frac{e^2}{h} \int d\omega (2T_A (1 - T_A) + T_{qp} (1 - T_{qp}) - 2T_A T_{qp}) \quad (\text{B.17})$$

Usando un procedimiento similar podemos calcular  $S_{12}$  que está relacionado con  $\langle \Delta I_{L\uparrow}(t_1) \Delta I_{L\downarrow}(t_2) \rangle$ . Así mismo,  $S_{22}$  ( $S_{21}$ ) se puede obtener de  $S_{11}$  ( $S_{12}$ ) cambiando  $\uparrow$  por  $\downarrow$ . Al final se obtiene que la expresión para el shot noise es:

$$S = \frac{2e^2}{h} \int d\omega (4T_A (1 - T_A) + T_{qp} (1 - T_{qp}) - 4T_A T_{qp}) \quad (\text{B.18})$$

# Bibliografía

- [1] M. A. Kastner, *Artificial Atoms*, **Physics Today** **46**, 24 (1993).
- [2] L.P. Kouwenhoven, D.G. Austing, S. Tarucha, *Few electrons quantum dots*, **Reports on Progress in Physics**, **64** , 701 (2001).
- [3] L. I. Glazman and M. Pustilnik, *Coulomb blockade and Kondo effect in quantum dots*, **New Directions in Mesoscopic Physics (Towards Nanoscience)**, 93 (2003).
- [4] S. Tarucha, D. G. Austing, and T. Honda, R. J. van der Hage and L. P. Kouwenhoven, *Shell Filling and Spin Effects in a Few Electron Quantum Dot*, **Physical Review Letters** **77**, 3613 (1996).
- [5] A. I. Buzdin *Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures*, **Rev. Mod. Phys.** **77**, 935 (2005).
- [6] A.F. Andreev, *Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors*, **Zh. Eksp. Teor. Fiz.** **46**, 1823 (1964), (**Sov. Phys. JETP** **19**, 1228 (1964)).
- [7] B. Pannetier, H. Courtois, *Andreev Reflection and Proximity effect*, **J. of Low Temp. Phys.** **118**, 599 (2000).
- [8] C. W. J. Beenakker, *Why does a metal-superconductor junction have a resistance?*, **Quantum Mesoscopic Phenomena and Mesoscopic Devices in Microelectronics**, edited by I.O. Kulik and R. Ellialtioglu, **NATO Science Series C559**, 51 (2000).
- [9] B. Reulet, D. E. Prober, W. Belzig, *Shot noise of mesoscopic NS structures: the role of Andreev reflection*, **Quantum Noise in Mesoscopic Physics**. **Y.V. Nazarov (ed.)**, **Kluwer Academic Publishers** , 73 (2003).
- [10] K. Wilson *Renormalization group methods*, **Advances in Mathematics** **16**, 170 (1975).

- [11] W. J. de Hass, *The electrical resistance of gold, copper and lead at low temperatures*, **Physica** **1**, 1115 (1934).
- [12] M. P. Sarachick, E. Corenzwit and L. D. Longinotti, *Resistivity of Mo-Nb+Mo-Re Alloys containing 1 % Fe*, **Physical Review** **135**, A1041 (1964).
- [13] J. Kondo, *Resistance minimum in dilute magnetic alloys*, **Progress of Theoretical Physics**, 32 (1964).
- [14] D. Goldhaber-Gordon, H. Shtrikman, D. Mahalu, D. Abusch-Magder, U. Meirav and M. A. Kastner, *Kondo effect in a single electron transistor*, **Nature** **391**, 156 (1998).
- [15] J. Appelbaum, *Exchange model of zero bias tunneling anomalies*, **Physical review Letters** **17**, 91 (1966).
- [16] S. Gregory, *Experimental-observation of scattering of tunneling electrons by a single magnetic moment*, **Physical Review Letters** **68**, 2070 (1992). D. C. Ralph and R. A. Buhrman, *Kondo-assited and resonant-tunneling via a single charge trap - a realization of the Andreson model out of equilibrium*, **Physical Review Letters** **72**, 3401 (1994).
- [17] M. A. Reed, J. N. Randall, R. J. Aggarwal, R. J. Matyi, T. M. Moore and A. E. Wetsel, *Observation of discrete electronic states in a zero dimensional semiconductor nanostructure*, **Physical review Letters** **60**, 535 (1988).
- [18] L. I. Glazman and M. E. Raikh, *Resonant Kondo transparency of a barrier with quasilocal impurity states*, **Jept Letters** **47**, 452 (1988).
- [19] Leo Kouwenhoven, Leonid Glazman, *Revival of the Kondo effect*, **Physics World** **14**, 33 (2001).
- [20] M. Grobis, I. G. Rau, R. M. Potok, and D. Goldhaber-Gordon *Kondo Effect in Mesoscopic Quantum Dots*, **Mesoscale and Nanoscale Physics** (2006).
- [21] T. Dirks, T.L. Hughes, S. Lal, B. Uchoa, Y.-F. Chen, C. Chialvo, P.M. Goldbart, N. Mason, *Transport through Andreev bound states in a graphene quantum dot*, **Nature Physics** **7**, 386 (2011).
- [22] S. Datta, *Electronic transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press, New York, First Edition (1995)
- [23] R. Landauer, *Electrical resistance of disordered one-dimentional lattices*, **Phil. Mag.** **21**, 863 (1970).

- [24] E. N. Economou y C. M. Soukoulis, *Static Conductance and Scaling Theory of Localization in One Dimension*, **Physical Review Letters** **46**, 618 (1981).
- [25] D. S. Fisher and P. A. Lee, *Relation between conductivity and transmission matrix*, **Physical Review B** **23**, 6851 (1981).
- [26] M. Di Ventra *Electrical transport in nanoscale systems*, Cambridge University Press, New York, First Edition (2008).
- [27] U. Fano, *Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts*, **Physical Review** **124**, 1866 (1961).
- [28] S. De Franceschi, L. Kouwenhoven, C. Schönberger, W. Wernsdorfer, *Hybrid superconductor quantum dot devices*, **Nature Nanotechnology** **5**, 703 (2010).
- [29] Y. Tanaka, N. Kawakami, *Interference Effects on Kondo-Assisted Transport through Double Quantum Dots*, **Physical Review B** **72**, 085304 (2005) .
- [30] P. Trocha, J. Barnas, *Kondo-Dicke resonances in electronic transport through triple quantum dots*, **Physical Review B** **78**, 075424 (2008) .
- [31] M.L. Ladrón de Guevara, P.A. Orellana, *Electronic transport through a parallel-coupled triple quantum dot molecule: Fano resonances and bound states in the continuum*, **Physical Review B** **73**, 205303 (2006) .
- [32] T. Tanamoto, Y. Nishi, *Fano-Kondo effect in a two-level system with triple quantum dots* **Phys. Rev. B** **76**, 155319 (2007) .
- [33] P.A. Orellana, F. Domínguez-Adame, *Conductance control in quantum wires by attached quantum dots*, **Phys. Stat. Sol. A** **203**, 1178 (2006) .
- [34] K. Kobayashi, H. Aikawa, A. Sano, S. Katsumoto, Y. Iye, *Fano resonance in a quantum wire with a side-coupled quantum dot*, **Physical Review B** **70**, 035319 (2004).
- [35] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, **Phys. Rev.** **108**, 1175 (1957)
- [36] G. D. Mahan, *Many body physics*, Plenum, New York (1984), Third edition.
- [37] ZHU Yu, SUN Qing-Feng and LIN Tsung-Han, *Effect of Intra-Dot Coulomb Interaction on Andreev Reflection in Normal-Metal/Quantum-Dot/Superconductor System*, **Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)** **36**, 101 (2001).

- [38] T.-S. Kim, S. Hershfield, *Even-odd parity effects in conductance and shot noise of metal-atomic wie-metal (superconducting) junctions*, **Physical Review B** **65**, 214526 (2002).
- [39] J. Barański, T. Domański, *Decoherence effect on the Fano lineshapes in double quantum dots coupled between normal and superconducting leads*, **Physical Review B** **85**, 205451 (2012).
- [40] F. Lefloch, C. Hoffmann, M. Sanquer, and D. Quirion, *Doubled full shot noise in quantum coherent superconductor-semiconductor junctions*. **Phys. Rev. Lett.** **90**, 067002 (2003).
- [41] Ya. M. Blanter, M. Buttiker, *Shot Noise in Mesoscopic Conductors*, **Phys. Rep.** **336**, 1 (2000).
- [42] P. Coleman, *New approach to the mixed-valence problem*, **Physical Review B** **29**, 3037 (1984).
- [43] D. M. Newns and N. Read, *Mean-field theory of intermediate valence/heavy fermion systems*, **Advances in Physics** **36**, 799 (1987).
- [44] E. V. Anda, G. Chiappe, C. A. Büsser, M. A. Davidovich, G. B. Martins, F. Heidrich-Meisner, and E. Dagotto, *Method to study highly correlated nanostructures: The logarithmic-discretization embedded-cluster approximation*, **Phys. Rev. B** **78**, 085308 (2008).
- [45] U.F. Keyser, C. Fühner, S. Borek, R.J. Haug, *Kondo Effect in a Few-Electron Quantum Ring*, **Physical Review Letters** **90** 196601 (2003).
- [46] M. Sigrist, A. Fuhrer, T. Ihn, K. Ensslin, S.E. Ulloa, W. Wegscheider, M. Bichler, *Magnetic-Field-Dependent Transmission Phase of a Double-Dot System in a Quantum Ring*, **Physical Review Letters** **93** 066802 (2004).
- [47] A. Fuhrer, T. Ihn, K. Ensslin, W. Wegscheider, and M. Bichler, *Kondo Effect in a Many-Electron Quantum Ring*, **Phys. Rev. Lett.** **93**, 176803 (2004).
- [48] E. Dagotto, *Correlated electrons in high-temperature superconductors*, **Rev. Mod. Phys.** **66**, 763 (1994).
- [49] S. Sasaki, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, W. G. van der Wiel, M. Eto, S. Tarucha and L. P. Kouwenhoven, *Kondo effect in an integer-spin quantum dot*, **Nature** **405**, 464 (2000). M. Pustilnik and L. I. Glazman, *Conduction through a Quantum Dot near a Singlet-Triplet Transition*, **Physical Review Letters** **85**, 2993 (2000).

- 
- [50] Maria A. Davidovich, E. V. Anda, C. A. Büsser, and G. Chiappe *Quantum dot spin effect on the conductance of a quantum wire*, **Physical Review B** **65**, 233310 (2002).
- [51] A. Fuhrer, S. Lüscher, T. Ihn, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider and M. Bichler, *Energy spectra of quantum rings*, **Nature** **413**, 822 (2001).