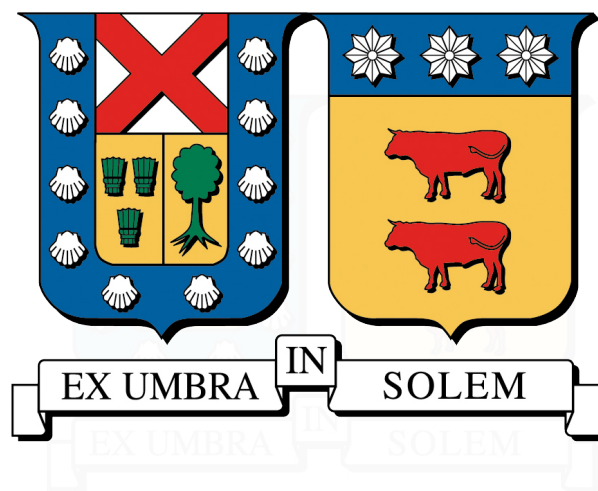


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
Valparaíso - CHILE



**Modelo analítico simplificado para la ignición de combustibles sólidos
dominadas por radiación y expuestos a múltiples flujos de calor no
estacionarios**

Tesis de Grado presentada por
Roberto Andrés Parot Alvarado
como requisito para optar al título de
Ingeniero Civil Industrial
y el grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Industrial

PROFESOR GUÍA	:	Ph.D. Andrés Fuentes C.
PROFESOR CORREFERENTE	:	Ph.D. Rodrigo Demarco B.
PROFESOR CORREFERENTE EXTERNO	:	Ph.D. Maria Thomsen S.

Marzo 2023

Agradecimientos

Agradezco en primera instancia a mi familia, en especial a mi hermano Alejandro, mi madre María Cecilia y mi padre Oscar, quien ya no se encuentra con nosotros. Los respeto y admiro profundamente por entregarme todas las enseñanzas y valores con las cuales me he realizado como persona y profesional, y por brindarme su apoyo y ayuda incondicional para poder cumplir todas mis metas y sueños.

También agradezco a mis amigos y a todas las personas que conocí durante mi vida universitaria, por las cuales se volvió una etapa inolvidable. En especial al grupo MQCLP comprendido por Anibal Trres, Carlos Castro y Juan José Oyanedel, con quienes compartí importantes horas de estudio, entretenimiento y relaxo, con quienes formé un gran vínculo de amistad, que espero perduren en el tiempo.

Finalmente a todos quienes componen el grupo de gestión energética, del departamento de industrias, quienes apoyaron y aportaron en mi formación como profesional y persona, a través de la realización de distintos proyectos y trabajos del área. En especial a Felipe Gonzalez, Francisco Patiño y José Ignacio Rivera quienes me acompañaron y brindaron su amistad y ayuda durante esta investigación, y a mi profesor guía Andrés Fuentes, quien además de guía, me otorgó la oportunidad de participar en distintos proyectos que aportaron a mi formación profesional.

A todos ustedes Muchas gracias.

RESUMEN EJECUTIVO

En este trabajo se realiza un estudio teórico y se desarrolla un modelo analítico simplificado sobre la ignición piloteada de un combustible sólido, bajo el contexto de exposición a un flujo de calor radiativo variable en el tiempo generado por un frente de llama en un incendio en la interfaz urbano-silvestre. En este mecanismo de propagación, existe una transferencia de calor entre dos cuerpos o elementos a diferentes temperaturas, principalmente mediante radiación. El frente de llama se considera como uno de los cuerpos con una temperatura elevada y entrega energía actuando como piloto, mientras que el segundo cuerpo es un sólido que aumenta su temperatura hasta un punto crítico donde se genera la ignición, pudiendo provocar un nuevo foco de incendio facilitando su propagación.

Tanto en sólidos homogéneos como en sólidos porosos la radiación es capaz de penetrar al interior del volumen del cuerpo, cambiando el comportamiento y evolución de la temperatura en el tiempo, teniendo en cuenta lo anterior los sólidos pueden clasificarse como térmicamente delgados o gruesos. El modelo desarrollado toma en cuenta este fenómeno y permite generalizarlo.

Para validar el modelo desarrollado se comparó los resultados con otros modelos analíticos encontrados en la literatura tomando flujos radiativos crecientes en el tiempo con perfiles constantes, lineales, polinomiales y exponenciales, siendo estos últimos los que se ajustan mejor al comportamiento real que tiene un flujo de calor radiativo proveniente desde un frente de llama que avanza, sin embargo, estos perfiles seleccionados no limitan la aplicabilidad de la metodología, pudiendo incorporar cualquier perfil temporal ya sea creciente o decreciente.

Índice de Contenidos

1. Introducción y Antecedentes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	2
1.2.1. Efectos de incendios WUI	2
1.2.2. Mecanismos de propagación de incendios forestales	3
1.2.3. Historia de los modelos de Ignición en sólidos	6
1.3. Alcance	7
1.4. Objetivos	8
1.4.1. Objetivo General	8
1.4.2. Objetivos Específicos	9
2. Marco Teórico	11
2.1. Termodinámica y Transferencia de calor	11
2.1.1. Conducción	12
2.1.2. Convección	13
2.1.3. Radiación	14
2.2. Aproximación Térmicamente Delgado (Thermally Thin) y Grueso (Thermally Thick) . .	15
2.3. Transferencia radiativa en medio participativo	16
2.3.1. Absorción	16
2.3.2. Dispersión	17
2.3.3. Emisión	17
2.3.4. Ecuación de transferencia de calor radiativa	18
2.4. Divergencia del flujo radiativo	19
2.5. Aproximación Schuster-Schwarzschild	20
2.6. Teoría de ignición de sólidos	22
2.6.1. Descripción	22
2.6.2. Fase sólida	22
2.6.3. Proceso de pirólisis	23
2.6.4. Fase gaseosa e ignición	23
2.6.4.1. Ignición espontánea	23
2.6.4.2. Ignición piloteada	24
2.6.5. Consideraciones de la Ignición	25
2.6.5.1. Flujo crítico de ignición	25
2.6.5.2. Temperatura de ignición y tiempo de ignición	25
2.7. Material: PMMA	26
2.8. Sólidos porosos	26
2.8.1. Densidad de masa	27
2.8.2. Densidad aparente	27
2.8.3. Packing ratio y porosidad	27
2.9. Fundamentos matemáticos	28
2.9.1. Aproximación en series de Taylor	28
2.9.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)	29
2.9.3. Transformada de Laplace	29
2.9.4. Ecuación de Chini	30
2.9.5. Función error	30
2.10. Métodos numéricos	31
2.10.1. Método de Newton	31
2.10.2. Runge-Kutta	32

2.10.3. Método de mínimos cuadrados	33
2.11. Python	34
3. Desarrollo	37
3.1. Modelo analítico	37
3.2. Ecuación de energía	38
3.3. Divergencia del flujo de calor radiativo	40
3.4. Modelo promediado espacialmente	42
3.5. Modelo aproximado	42
3.6. Soluciones para flujos de calor incidente variables en el tiempo	43
3.6.1. Caso constante ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0''$)	43
3.6.2. Caso lineal ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0'' + rt$)	45
3.6.3. Caso exponencial ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0'' e^{bt}$)	46
3.6.4. Caso polinomial ($\dot{q}_{inc}''(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2 + \dots + d_{N+1} t^N$)	47
3.7. Tiempo de retardo de ignición	50
3.7.1. Caso constante	50
3.7.2. Caso lineal	51
3.7.3. Caso exponencial	51
3.7.4. Caso polinomial	52
3.8. Creación de código	53
4. Resultados	57
4.1. Prueba del modelo	57
4.1.1. Caso constante	57
4.1.2. Caso lineal	60
4.1.3. Caso exponencial	63
4.1.4. Caso polinomial	65
4.1.5. Escalado generalizado de los resultados	67
4.2. De materiales semitransparentes a opacos	68
4.2.1. Propiedades efectivas	70
5. Extensión del modelo	73
6. Conclusiones y Comentarios	77
Bibliografía	79
A. Anexos	85
A.1. Código caso constante	85
A.2. Código caso lineal	90
A.3. Código caso exponencial	96
A.4. Código caso polinomial	100

Índice de Tablas

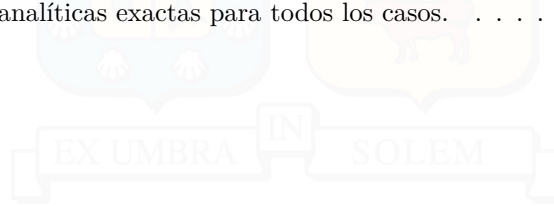
2.1. Tranformadas de Laplace utilizadas en este estudio	29
3.1. Resumen de soluciones a los diferentes casos aplicados al modelo. * Tenga en cuenta que el flujo polinomial en el inverso del tiempo de retardo de ignición se desarrolló solo para $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_3 t^2$	54
4.1. Propiedades del material de PMMA y constantes utilizadas en este modelo.	58
4.2. Resumen de expresiones normalizadas para predecir t_{ig} para los diferentes casos aplicados al modelo.	67
4.3. Comparación de propiedades efectivas y error obtenido con el modelo analítico exacto (entre paréntesis), modelo analítico aproximado y resultados experimentales. El valor estándar de las propiedades efectivas es $\rho c_p = 1,999,2 \text{ kJ} / \text{m}^3 \text{ K}$. Obtenido para un espesor de penetración óptimo δ^*	71



Índice de Figuras

1.1. Procesos de transferencia de calor directa e indirecta por conducción, radiación y convección. Elaboración propia.	4
1.2. Fases de la propagación de un incendio producto del transporte de pavesas.	5
2.1. Distribución transitoria de temperaturas para distintos números de Biot en placas planas enfriadas simétricamente por convección. Elaboración propia.	16
2.2. Atenuación de la intensidad radiativa producto de los efectos de absorción y dispersión	18
2.3. Volumen de control para la derivación de la divergencia del flujo radiativo.	20
2.4. Método de newton	32
3.1. Representación simplificada del contexto físico del problema a resolver.	38
3.2. Representación de los fenómenos físicos, llevado a escala experimental, para un sólido inerte unidimensional expuesto a un flujo de calor incidente variable en el tiempo, con pérdidas convectivas y radiativas en la superficie.	40
4.1. Resultados para el caso constante: (a) Evolución temporal de la temperatura media, comparación entre soluciones analíticas exactas y aproximadas. (b) Predicciones del tiempo de retardo de ignición para diferentes modelos disponibles en la literatura y las soluciones analíticas aproximadas y exactas desarrolladas en este documento. (c) Inverso del tiempo de retardo de la ignición frente al flujo de calor incidente. (d) Tiempo de retardo de ignición normalizado vs. flujo de calor incidente normalizado. Esta escala se utiliza para recuperar las propiedades del material.	59
4.2. Retardo en el tiempo de ignición para diferentes flujos de calor constantes incidentes probados, comparación entre modelos de referencia, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick.	60
4.3. Resultados para el caso lineal: (a) Evolución de la temperatura media en profundidad, comparación entre soluciones analíticas exactas y aproximadas. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick. (c) Inverso del retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.	61
4.4. Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thin.	63
4.5. Resultados para el caso exponencial: (a) Evolución de la temperatura promedio en profundidad, comparación entre soluciones analíticas numéricas y aproximadas, dados diferentes incrementos exponenciales. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes relaciones de incremento exponencial, comparación entre la solución numérica de Gong y este documento soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (c) Inverso retardo en el tiempo de ignición para diferentes relaciones de incremento exponencial, comparación entre la solución numérica de Gong, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.	64

4.6. Resultados para el caso polinomial: (a) Evolución de la temperatura promedio, comparación entre soluciones analíticas numéricas exactas y aproximadas, dadas diferentes rampas de flujo cuadráticas. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor cuadráticas probadas, comparación entre el modelo de Zhai, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (c) Inverso del retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor cuadráticas probadas, comparación entre el modelo de Zhai, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.	66
4.7. Comparación entre modelos analíticos aproximados de autores anteriores y los aquí desarrollados, para todos los casos considerados en este estudio.	69
4.8. Potencias inversas de retardo de ignición para diferentes flujos de calor incidente, test de rampas o coeficientes exponenciales, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas para todos los casos.	72



1 | Introducción y Antecedentes

1.1. Introducción

Los incendios forestales se presentan en la actualidad como un problema cada vez más frecuente y grave en todo el mundo. En general la gran mayoría de los incendios son causados por la acción humana, ya sea de forma accidental o deliberada [Balch et al. \(2017\)](#), aumentando también los peligros asociados y los costos de combatirlos. Las posibles causas naturales de un incendio son producto de la caída de rayos en una tormenta eléctrica o debido al calor generado por actividad volcánica. Los incendios forestales se propagan, acercándose a zonas urbanas y poniendo en peligro el desarrollo humano, cuando aquello ocurre, se denominan incendios de interfaz urbano-silvestre o WUI (*Wildland-Urban interface*) [Manzello et al. \(2018b\)](#). En todo el mundo existen ciudades que colindan directamente con zonas silvestres, donde éste tipo de incendios representa grandes riesgos para muchas personas y para el ecosistema, causando un daño directo e indirecto, ya que grandes incendios pueden propiciar condiciones climáticas que facilitan nuevos incendios dentro del área en el corto o mediano plazo. Las causas más influyentes en el aumento de los incendios WUI son el cambio climático, el desarrollo humano descontrolado en zonas rurales o de interfaz urbano-silvestre y el mal manejo o gestión de combustibles [Caton et al. \(2017\)](#). En muchos lugares el cambio climático a significado menos lluvias o precipitaciones y además mayores temperaturas, ambos efectos provocan que la vegetación combustible presente menores niveles de contenido de humedad, lo que a su vez propicia la generación de incendios, una mayor velocidad de propagación y una severidad mayor en los incendios WUI, además se espera que el cambio climático y el aumento de las temperaturas afecte cada vez más el desarrollo de incendios en los años venideros en sectores como la India, la parte occidental de Estados Unidos, gran parte de Australia y la parte sur de América del sur [Pechony y Shindell \(2010\)](#). El desarrollo humano sin control o supervisión dentro de la interfaz urbano-silvestre también propicia la severidad de los incendios al no contar con las medidas mínimas para combatir incendios como lo son la generación de zonas limpias de combustible y defendibles al incorporar barreras efectivas ante los distintos mecanismos de avance de los incendios [Stein et al. \(2013\)](#); [Manzello \(2020\)](#). Finalmente el factor de la gestión de combustibles también juega un rol importante, ya que los incendios controlados permiten mantener un nivel bajo de combustible propenso a iniciar o facilitar incendios en las zonas WUI de riesgo, disminuyendo la probabilidad de desarrollar incendios severos, lo que a su vez permite disminuir la cantidad gases contaminantes liberados en estos incendios [Defossé et al. \(2011\)](#).

Al tratar de comprender las causas y el desarrollo de incendios y la combustión en general, a través de los años se han creado diversas áreas de estudio para prevenir y/o controlar estos fenómenos, algunas de éstas áreas son: métodos de detección; técnicas de medición; herramientas de riesgo; equipamiento, entrenamiento y tácticas para personal de bomberos; métodos de mitigación; vulnerabilidad de estructuras; y modelos predictivos de propagación. Todas estas temáticas hacen un extenso uso de la física, la matemática e ingeniería, creando modelos que tratan de representar y explicar la realidad. En particular éste trabajo se enfoca en la última área de estudio mencionada, es decir, en la generación de un modelo predictivo de propagación. Particularmente en una sub-categoría del área, interesa conocer el retardo en el tiempo de ignición de materiales forestales y urbanos, ya que los incendios WUI tal y como lo indica su nombre, se desarrollan en ambos entornos y cuenta con diversos tipos de combustibles. Por lo tanto, se busca crear una herramienta capaz de ser utilizada para una gran variedad de materiales comunes en los incendios de interfaz urbano-silvestre.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Efectos de incendios WUI

Así como el cambio climático del planeta afecta la severidad y recurrencia de incendios forestales, el efecto también es recíproco, es decir, los mismos incendios tienen efectos sobre el cambio climático, al liberar grandes cantidades de gases de efecto invernadero como dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4) y óxido nitroso (N_2O). Otros efectos de los incendios en general son la liberación de partículas inhalables que comprometen el estado de salud de las personas expuestas, pérdida de hábitat naturales, amenazas a especies vulnerables y efectos secundarios a mediano o largo plazo en las zonas afectadas como por ejemplo deslizamientos de tierra en topografías con pendiente [Manzello et al. \(2018a\)](#). Muchos incendios de importantes pérdidas se han detectado en el mundo en el último tiempo, se puede mencionar el caso de la temporada de incendios forestales en Australia desde junio de 2019 hasta mayo de 2020, quemando al menos 11 millones de hectáreas [BBC \(2020\)](#). Se destaca que no ha sido el peor incendio forestal observado hasta la fecha en dicho continente, ya que en los años 1974-75 se registró pérdidas de 117 millones de hectáreas, correspondiente a un 15 % del continente [N. P. Cheney \(1995\)](#). También se tiene el estado de California en Estados Unidos que destaca por tener una amplia historia de incendios forestales y urbano-silvestres, ocupando varios espacios de los 20 incendios más graves de dicho país [NFWA \(2019\)](#) y durante el año 2020 se quemaron aproximadamente 4.2 millones de hectáreas, que significa una cantidad 16 veces mayor que en el año 2019 durante el mismo periodo de evaluación [Cal-fires \(2020\)](#). No se puede dejar de mencionar los incendios ocurridos en la Amazonia, en 2019 el instituto nacional de desarrollo espacial de Brasil INPE, encontró una de las series de incendios mas destructivos en la selva amazónica, con 73.000 incendios, un 83 % más que en el año 2018, cuyas

causas se atribuyen a la acción humana, sobre todo con el fin de limpiar terrenos para agricultura [NationalGeographic \(2019a\)](#). Se debe destacar que el Amazonas genera cerca de un 9 % del oxígeno del planeta considerando todos los medios de producción terrestres y marinos [NationalGeographic \(2019b\)](#). En Chile también se cuenta con historia referente a los incendios forestales y múltiples estudios se han realizado al respecto como por ejemplo en los incendios de Valparaíso [Reszka y Fuentes \(2015\)](#) donde gran parte de la ciudad se encuentra en una interfaz urbano-silvestre, en este incendio se registraron 15 fallecidos, 500 heridos, aproximadamente 2.900 casas destruidas y 1.000 hectáreas quemadas. La corporación nacional forestal (CONAF) cuenta con datos históricos referentes a la ocurrencia y daño de los incendios forestales, indica que desde el año 1964 hasta julio de 2020 la cantidad de incendios forestales anuales aumentó desde 435 a 8.127, mientras que las áreas afectadas anuales se han mantenido dentro de las 100.000 hectáreas a excepción del año 2017 cuando el daño fue de 570.197 hectáreas en todo el país [CONAF \(2020\)](#). El mayor daño durante dicho año se explica por la denominada tormenta de fuego en las regiones de O'Higgins, el Maule y el Biobío cuya inusual severidad se atribuye al cambio climático, durante un periodo de 14 horas quemó 114.000 hectáreas, normalmente la severidad de los incendios se cataloga en una escala del 1 al 5, mientras que esta tormenta de fuego fue la primera de su tipo y creó la escala 6 debido a la energía liberada y su velocidad de propagación. [CONAF \(2017\)](#). En la actualidad al comparar la severidad en el último decenio con el año 2020, destacan las regiones de Valparaíso y la Araucanía con la mayor cantidad de hectáreas afectadas por incendios forestales de alta magnitud, mostrando aumentos de 31,78 % y 134,23 % respectivamente [CONAF \(2020\)](#), en 2022 y 2023 destacan incendios de alto conocimiento público, como es el incendio de origen forestal en Viña del mar que terminó con alrededor de 371 viviendas afectadas, también destacan los incendios ocurrido en las regiones de Biobío, Araucanía, Ñuble y Maule, dejando un saldo de 26 fallecidos, 392 mil hectáreas afectadas y 2450 viviendas destruidas. Por lo tanto, la tendencia sostenida del calentamiento global y el continuo desarrollo humano en la interfaz urbano-silvestre en todo el mundo, amerita el estudio a profundidad de este fenómeno con el fin de desarrollar nuevas herramientas que permitan mitigar los potenciales daños a las personas y al medio ambiente.

1.2.2. Mecanismos de propagación de incendios forestales

En los incendios forestales y WUI los mecanismos de propagación pueden ser directos o indirectos y son principalmente tres, contacto con llama directa por conducción (directo), exposición a la radiación y convección (indirecto) y por el transporte de pavesas o brasas generadas por el mismo incendio (indirecto) [Caton et al. \(2017\)](#). El contacto con llama directa, ocurre cuando la vegetación u otros cuerpos combustibles forman un camino continuado para que el frente de llama avance, generando la ignición en cuerpos que alcanza de forma directa por conducción. La radiación y convección como mecanismos de transferencia de calor permite al frente de llama intercambiar un flujo de calor con las

estructuras y vegetación cercana que tengan a cierta distancia, este intercambio de energía significa que los elementos expuestos aumenten su temperatura y pierdan contenido de humedad, lo que puede provocar la ignición si se mantienen ciertas condiciones. La ignición radiativa ocurre cuando una alta intensidad del flujo se mantiene por un tiempo suficiente, la distancia es adecuada y dependiendo también de la forma, tamaño y propiedades físicas de los elementos expuestos a la radiación térmica, como por ejemplo, la humedad del elemento, su densidad, su calor específico, su porosidad, entre otros. se ha demostrado que este método de propagación puede encender elementos situados hasta 30 metros de distancia del frente de llama [Cohen \(2004\)](#). Un ejemplo que permite visualizar este mecanismo de propagación son las llamas en las coronas de los árboles, las cuales son amplias y transmiten una gran cantidad de energía, según el tamaño del árbol. En la Figura 1.1 se aprecian esquemáticamente la propagación por conducción, radiación y convección. El último método es por el transporte de pavesas

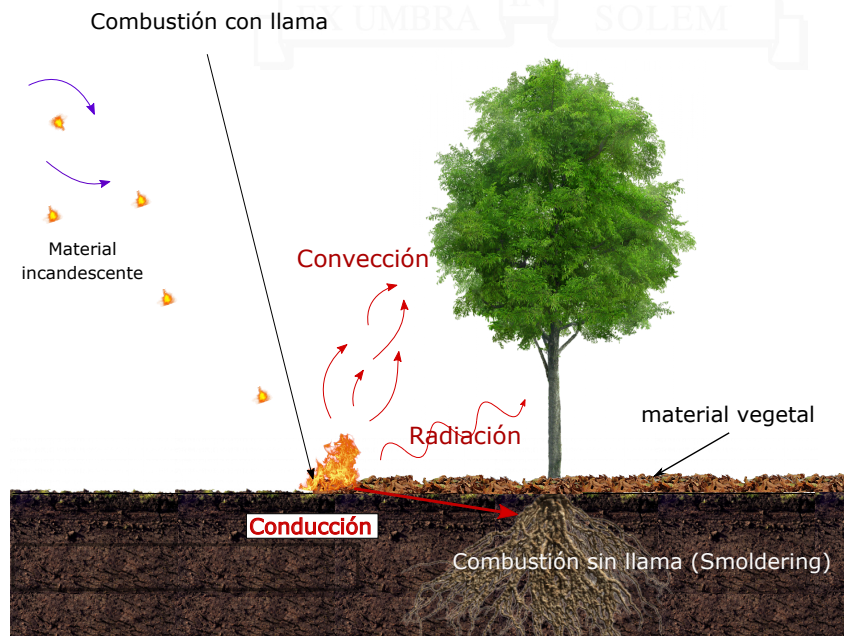


Figura 1.1: Procesos de transferencia de calor directa e indirecta por conducción, radiación y convección. Elaboración propia.

o Spotting y a diferencia de los otros dos mecanismos solo puede ser evitado parcialmente por defensas comunes, por ejemplo, instalación de cortafuegos, limpieza de combustibles en la zona de riesgo o estructuras y la mantención de distancias suficientes limpias en la interfaz urbano-silvestre. la razón es por que una pavesa o brasa puede ser transportada por corrientes de aire a través de grandes distancias y posicionarse en algún material combustible, incluso causando ignición horas después de que el frente de llama haya pasado o se haya extinguido [Albini \(1983\)](#); [Huang et al. \(2004\)](#). Se ha demostrado que el transporte de pavesas puede llegar a distancias de 30 km [Thurston et al. \(2016\)](#). Respecto a este método de propagación, la pavesa se genera de la vegetación o estructura parcialmente consumido por las llamas, el cual sufre de daños en su integridad estructural y piezas del combustible se desprenden, pudiendo caer

al suelo o ser levantados en el aire y arrastrados por el viento, pudiendo aterrizar en otro combustible. Se pueden distinguir diferentes fases en este método de propagación: La generación de pavesas, que estudia la creación de estas brasas, su forma, sus propiedades y su desprendimiento desde estructuras y vegetación. Su transporte por el movimiento de masas de aire, que provoca grandes desplazamientos según las condiciones climáticas, velocidad del viento, las propiedades aerodinámicas según la forma de la pavesa, velocidad de combustión y masa de la pavesa. La última fase es la deposición en la cama de combustible y su posterior ignición, ya sea en forma de llama o smoldering [Manzello et al. \(2020\)](#). Esta ignición también puede darse por contacto directo (conducción) o a distancia (convección y radiación). Un esquema con las distintas fases de la propagación por pavesas o spotting se presenta en la Figura 1.2. Para los distintos métodos de propagación mencionados, la velocidad de ignición (en caso de ocurrir)

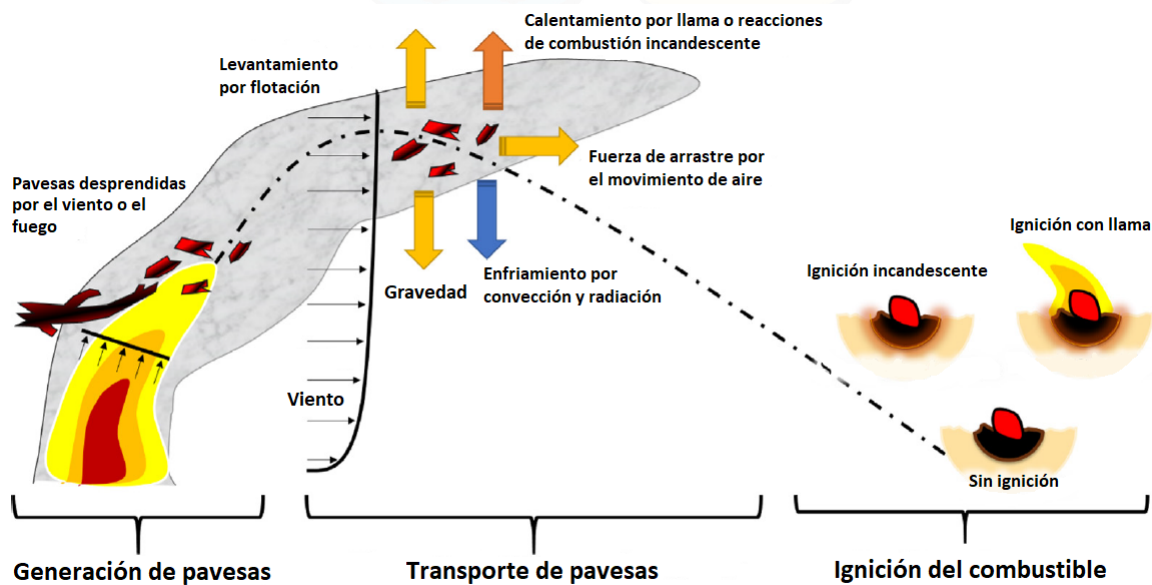


Figura 1.2: Fases de la propagación de un incendio producto del transporte de pavesas.

así como su combustión y extinción, dependerá de una serie de variables ambientales, del combustible o pavesa, por ejemplo, el contenido de humedad del combustible, el ratio de superficie en el volumen del combustible, la velocidad del viento, masa, temperatura y energía liberada por la fuente de calor. Al caracterizar estos distintos procesos individuales o fases, es posible obtener la información necesaria para desarrollar modelos predictivos de detección de incendios forestales basados en la física. Estos modelos tienen varios usos, por ejemplo, junto con mapas topográficos y modelos de viento, mejoran las capacidades predictivas en la propagación y movimiento de incendios forestales con lo cual se pueden tomar medidas preventivas de forma pro activa. También permiten diseñar estructuras tomando en consideración materiales de construcción y escenarios donde se expongan a los diferentes mecanismos de propagación de incendios, a fin evitar la ignición por completo o retardar lo más posible el tiempo que le tome al material encenderse.

1.2.3. Historia de los modelos de Ignición en solidos

Existen diversos modelos enfocados en explicar y pronosticar distintos fenómenos ocurridos en incendios WUI o forestales, si bien los modelos pueden ser catalogados en analíticos y numéricos, debido al amplio rango de información que abarcan y para no perder la línea lógica del estudio, en esta investigación se hará un enfoque en los modelos de ignición analíticos, específicamente para materiales solidos. El problema de la ignición de combustibles solidos expuestos a flujos de radiación ha recibido la atención de la comunidad científica dedicada a la seguridad contra incendios por al menos 75 años, debido a su rol en la iniciación de incendios y en los procesos de propagación de los mismos. El trabajo de Bamford, Crank y Malan [Bamford et al. \(1946\)](#) abrió el camino para el desarrollo de teorías que desacoplaron los procesos de las fases sólida y gaseosa, lo que promovió el desarrollo de soluciones analíticas con expresiones simples para ser utilizados en cálculos de lápiz y papel. El incremento en los estándares de seguridad frente a incendios en la construcción de edificios y la amenaza de una guerra nuclear impulsaron una profundización del trabajo en éste tópico en Estados Unidos e Inglaterra, por diversos investigadores [Lawson y Simms \(1952\)](#); [Sauer \(1956\)](#); [Thomas et al. \(1959\)](#); [Simms \(1963\)](#); [Martin \(1965\)](#); [Weatherford y Sheppard \(1965\)](#). Lawson y Simms [Lawson y Simms \(1952\)](#) fueron los primeros en considerar teóricamente el calentamiento por conductividad, al interior de un sólido inerte expuesto a flujos de radiación externo, utilizando la ecuación de difusión de calor. Un supuesto principal en todos los trabajos que incluyen este acercamiento, es que la ignición con llama se obtiene cuando el sólido alcanza una temperatura crítica denotada como temperatura de ignición, T_{ig} . La solución a este problema clásico de calor por conducción, que fue profundizado y extendido para varios contextos por [Carslaw y Jaeger \(1959\)](#), obtuvo una buena concordancia con resultados experimentales, en especial para flujos radiativos incidentes $\dot{q}_{inc}''$ de altas magnitudes, lo que provoca tiempos de ignición bajos; Esto pavimentó el camino para la interpretación física de datos experimentales. Este acercamiento corresponde a la teoría de ignición térmica de un material inerte.

Desde el análisis de la literatura desde 1950 hasta 1970, se distinguen dos metodologías experimentales distintivas en términos del problema de ignición térmica. La primera considera el uso de paneles radiantes o llamas controladas que producen un flujo de calor continuo sobre una muestra [Bamford et al. \(1946\)](#); [Lawson y Simms \(1952\)](#), el cual aplica al problema de incendios estructurales y forestales. La segunda metodología expone a las muestras a pulsos de radiación de magnitudes mucho mayores a las de caso previo, característico de explosiones nucleares [Sauer \(1956\)](#); [Martin \(1965\)](#). El desarrollo histórico de la ciencia de incendios, incitó a los miembros de la comunidad de la combustión a enfocarse en el problema de incendios estructurales y forestales, ayudados por el desarrollo de nuevos aparatos experimentales a fines de la década de 1970, cuyos principios de operación y sus objetivos experimentales fueron guiados por el desarrollo teórico de los problemas de ignición y propagación de la llama [Quintiere \(1981\)](#). La adecuada correlación de los resultados de las pruebas con los nuevos

aparatos experimentales permitió al analista obtener propiedades aparentes del material aplicables a varios problemas de seguridad contra incendios como, por ejemplo, temperaturas de ignición, calores de reacción y propiedades termo físicas. Una característica común en todos los trabajos nombrados fue la suposición de que la radiación se trataba solo como una condición de borde o límite, por lo que se consideraba al combustible sólido como ópticamente opaco, es decir, la radiación no penetra en el medio y solo se absorbe superficialmente. Esta suposición puede funcionar para materiales como la madera, pero deja de ser apropiado cuando se trabaja con algunos materiales de construcción como, por ejemplo, el Polymethyl methacrylate (PMMA) y otros materiales que no solo absorben la radiación incidente en la superficie, sino que tienen una absorción interna de radiación.

Simms reconoció este problema de forma temprana en (Simms, 1963), pero despreció algunos efectos físicos como la divergencia del término de flujo radiativo ($\nabla \dot{q}_r''$) en la ecuación de energía. El tratamiento adecuado de este problema comenzó recientemente en la década del 2010 (Simeoni et al., 2012; Jiang et al., 2009), y el primer tratamiento formal para incluir la divergencia radiativa en la ecuación de transferencia radiativa (RTE), por sus siglas en inglés, fue desarrollado en la última década (Mindykowski et al., 2011; Hernández et al., 2019). Los flujos de calor provenientes de incendios dependen fuertemente del tiempo, sin embargo, la teoría de ignición térmica en su forma clásica desprecia esta dependencia con la variación temporal. Recientemente la teoría ha sido expandida por diferentes grupos, para incluir la evolución temporal del flujo incidente de calor, sin embargo aún no se ha llegado a un consenso en como tratar este problema considerando diferentes expresiones para el flujo dependiente del tiempo, que incluyen funciones crecientes, decrecientes, periódicas o cíclicas del tiempo (Reszka et al., 2012; Ji et al., 2006; Lamorlette, 2014; Zhai et al., 2019; Zhang et al., 2019; Gong et al., 2020; Bilbao et al., 2002; Vermesi et al., 2016, 2017). Lo que no se ha hecho hasta ahora por parte de la comunidad es crear una solución analítica generalizada de forma cerrada, tratando formalmente la ecuación de transferencia radiativa con penetración de radiación en el sólido e incluyendo la dependencia del tiempo en el flujo radiativo incidente.

1.3. Alcance

El propósito de este estudio es ampliar el trabajo previo realizado por los autores sobre la teoría de la ignición y proponer una formulación analítica general y simple para los tiempos de retardo de la ignición de combustibles sólidos expuestos a diferentes comportamientos del flujo térmico, desde el caso constante hasta escenarios más complejos como funciones exponenciales y polinómicas del tiempo, considerando la divergencia de la radiación térmica, que representan diferentes situaciones relacionadas con los incendios estructurales y forestales. El fin de esta formulación general simplificada es proporcionar una herramienta ingenieril capaz de representar una amplia gama de diferentes situaciones

relacionadas con incendios estructurales y forestales.

En este estudio se desarrolla un modelo con dos versiones, una exacta (semi-analítica) y otra aproximada (analítica), para calcular el tiempo de ignición de una muestra de un sólido expuesta a un flujo de calor radiativo variable en el tiempo. Se busca una correlación entre la magnitud cambiante del flujo de calor y el tiempo de retraso en la ignición, estableciendo además una temperatura de ignición crítica para el caso de flujo constante. Este estudio se presenta como una mejora a los modelos actuales, utilizados para la predicción de tiempos de ignición de materiales comunes en incendios forestales y de interfaz urbano-silvestre. El modelo desarrollado en este estudio no toma en cuenta los procesos químicos de degradación y pirólisis del material para lograr la ignición, el enfoque es netamente físico, abarcando principalmente la fase sólida durante el proceso de calentamiento e ignición.

En este estudio el flujo radiativo variará en el tiempo, de acuerdo a diferentes funciones ajustadas a las variaciones normalmente observados en frentes de llama. Esto permitirá imitar la ganancia térmica de un material provocado por un incendio o frente de llama. Se utilizará el caso de flujo radiativo constante a modo de validar el modelo con estudios actuales que utilizan este supuesto. Las funciones ajustadas en este trabajo son el aumento lineal, exponencial y polinomial.

El modelo será validado y comparado con modelos similares en la literatura nombrada anteriormente, desarrollados para el mismo problema físico de ignición de sólidos. Para ello se utilizarán parámetros estandarizados de un material, particularmente se utilizará el Polymethyl methacrylate (PMMA) como material de estudio, debido a su extenso uso en modelos similares y debido a que sus propiedades físicas son ampliamente conocidas, facilitando la obtención de parámetros de entrada del modelo. Con la finalidad de comprobar la generalidad del modelo propuesto, los modelos de referencia de la literatura considerarán individualmente distintos ratios de variaciones temporales del flujo radiativo, así como también, distintas consideraciones respecto a la absorción interna de la radiación y su divergencia.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Establecer un modelo analítico general y simple tanto exacto como aproximado, que determine el tiempo de ignición en combustibles sólidos expuestos a una serie de flujos de radiación incidente variables en el tiempo e incorporando los efectos de la penetración y absorción interna de la radiación en el material.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Generar una base teórica adecuada a partir de investigaciones de similares características.
2. Caracterizar, en base a estudios previos, las posibles variaciones en el tiempo del flujo de calor proveniente desde un frente de llama.
3. Desarrollar un modelo teórico de ignición de sólidos, incluyendo efectos radiativos como la penetración y divergencia, así como también las variaciones temporales, caracterizadas anteriormente.
4. Encontrar una solución algebraica y/o numérica para el modelo desarrollado, encontrando una solución exacta y otra aproximada de la variación de la temperatura del medio en el tiempo.
5. Establecer una correlación entre el retardo en el tiempo de ignición y la radiación incidente.
6. Programar el modelo con alguna herramienta adecuada, que permita computar una solución de forma expedita y confiable, para distintos parámetros de ingreso.
7. Buscar en la literatura modelos de referencia de características similares, que sean aplicados en la predicción del tiempo de ignición de sólidos.
8. Programar los modelos de referencia con la misma herramienta usada anteriormente, de una forma estándar que permita la comparación de resultados entre modelos.
9. Validar los resultados obtenidos por el modelo al compararlo con los distintos modelos de referencia, bajo la misma base, utilizando los mismos parámetros de entrada y condiciones.
10. Predecir las propiedades efectivas del PMMA con el modelo y compararlas con las propiedades físicas estándar en la literatura.



2 | Marco Teórico

2.1. Termodinámica y Transferencia de calor

Para definir la transferencia de calor, primero se debe definir *Temperatura* y *Calor*, Temperatura es una magnitud física que mide la energía interna, cinética de las partículas de un sistema. Mientras que el calor es la forma de la energía que se puede transferir de un sistema a otro como resultado de la diferencia en la temperatura. La *Transferencia de calor* corresponde a la ciencia que busca determinar las razones o velocidades en que ocurre esa transferencia. A diferencia de la termodinámica, que se interesa en la cantidad de transferencia de calor a medida que un sistema pasa por un proceso, de un estado de equilibrio a otro, y no indica en cuánto tiempo transcurrirá. La transferencia de calor hace uso del análisis termodinámico, que sencillamente nos dice cuánto calor debe transferirse para que se realice un cambio de estado específico con el fin de satisfacer el principio de conservación de la energía. En este estudio destacan dos leyes de la termodinámica. En la primera ley (principio de conservación de la energía) se requiere que la razón de la transferencia de energía hacia un sistema sea igual a la razón de incremento de la energía de ese sistema. Esto permite plantear un balance energético general de la siguiente manera,

$$\underbrace{Q_{\text{ent}} - Q_{\text{sal}}}_{\text{Transferencia neta de calor}} + \underbrace{E_{\text{gen}}}_{\text{Generación de calor}} = \underbrace{\Delta E_{\text{térmica, sistema}}}_{\text{Cambio de la energía térmica del sistema}} \quad (2.1)$$

En la segunda ley se requiere que el calor se transfiera en la dirección de la temperatura decreciente, desde mayor a menor temperatura. El requisito básico para la transferencia de calor es la presencia de una diferencia de temperatura. No puede haber transferencia neta de calor entre dos medios que están a la misma temperatura. La diferencia de temperatura es la fuerza impulsora para la transferencia de calor, precisamente como la diferencia de tensión es la fuerza impulsora para el flujo de corriente eléctrica y la diferencia de presión es la fuerza impulsora para el flujo de fluidos. La velocidad de la transferencia de calor en cierta dirección depende de la magnitud del gradiente de temperatura. A mayor gradiente de temperatura, mayor es la razón de la transferencia de calor [Cengel; Afshin J. Ghajar \(2011\)](#). El calor se puede transferir a través de tres diferentes mecanismos: conducción, convección y radiación.

Antes de poder definir completamente los mecanismos de transferencia de calor, es necesario

conocer algunos conceptos básicos relacionados a la termodinámica y a la transferencia de calor, que refieren a propiedades físicas de materiales, como por ejemplo, la densidad, que representa la cantidad de masa que alberga un determinado volumen de un material, se representa como,

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (kg/m^3) \quad (2.2)$$

Se reconoce también, que los diferentes materiales almacenan calor en forma distinta y se ha definido la propiedad de calor específico c_p ($J/kg \ K$) como una medida de la capacidad de un material para almacenar energía térmica. Es la cantidad de energía requerida para provocar un aumento de $1 \ K$ en la temperatura de $1 \ kg$ de material.

2.1.1. Conducción

La conducción es la transferencia de energía de las partículas más energéticas de una sustancia hacia las adyacentes menos energéticas, como resultado de interacciones entre esas partículas. La conducción puede tener lugar en los sólidos, líquidos o gases. En los gases y líquidos la conducción se debe a las colisiones y a la difusión de las moléculas durante su movimiento aleatorio. En los sólidos se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una retícula y al transporte de energía por parte de los electrones libres. Çengel; Afshin J. Ghajar (2011) La rapidez o razón de la conducción de calor a través de un medio depende de la configuración geométrica de éste, su espesor y el material de que esté hecho, así como de la diferencia de temperatura a través de él. Los resultados experimentales permiten expresar que la razón de conducción de calor en una determinada dirección es proporcional, pero de sentido opuesto, a la diferencia de temperaturas a través del medio, y es conocida como la ley de Fourier,

$$\dot{Q}_{cond} = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (W) \quad (2.3)$$

en donde:

- k : es la constante de proporcionalidad que corresponde a la conductividad térmica del material ($W/m \ K$), la cual representa la capacidad del material para conducir el calor. Un valor elevado indica que el material es un buen conductor del calor y un valor bajo indica que es un aislante.
- A : representa el área de la sección transversal que es normal a la dirección de la transferencia de calor.
- $\frac{\partial T}{\partial x}$: corresponde al gradiente de temperatura perpendicular al área transversal.

Cabe destacar que la conductividad térmica es una propiedad de material que depende de la temperatura ya que se relaciona con el movimiento de electrones libres, sin embargo, esta variación proporcional según la temperatura es diferente para cada material, pudiendo reconocerse materiales

conductores y aislantes. Cuando un material es aislante, esta variación con la temperatura se puede despreciar o se puede tomar un valor promedio en un rango de temperaturas, sin incurrir en un error considerable. En los casos en que el material es propenso a variar su conductividad térmica con la temperatura por simpleza tiene a considerarse un promedio dentro de un rango de temperaturas.

Otra propiedad de los materiales que aparece en el análisis de la conducción del calor en régimen transitorio es la difusividad térmica, la cual representa cuán rápido se difunde el calor por un material y se define como,

$$\alpha = \frac{\text{Calor conducido}}{\text{Calor almacenado}} = \frac{k}{\rho c_p} \quad (m^2/s) \quad (2.4)$$

Se puede notar que la conductividad térmica k representa lo bien que un material conduce el calor mientras que la capacidad calorífica ρc_p representa cuánta energía almacena un material por unidad de volumen. Por lo tanto, la difusividad térmica de un material se puede concebir como la razón entre el calor conducido a través del material y el calor almacenado por unidad de volumen

2.1.2. Convección

La convección es el mecanismo de transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido adyacente, líquido o gas en movimiento, combinando los efectos de difusión (por diferencias de presión) y advección (por el movimiento total de un fluido) [Çengel; Afshin J. Ghajar \(2011\)](#). La transferencia de calor por convección aumenta mientras mayor sea el movimiento del fluido y en ausencia de cualquier movimiento del fluido, la transferencia de calor se considera que es realizada por *conducción pura*.

La convección puede producirse de dos maneras, cuando el movimiento del fluido es forzado por medios externos como un ventilador, bomba o corriente de aire, ésta recibe el nombre de convección forzada, por lo contrario si el movimiento del fluido es producido debido al empuje inducido por las diferencias de densidad, esto como resultado de la diferencia de temperaturas, recibe el nombre de convección natural.

A pesar de la complejidad de la convección, se observa que la rapidez de la transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa en forma conveniente por la ley de Newton del enfriamiento,

$$\dot{Q}_{conv} = h \cdot A_s \cdot (T_s - T_{\infty}), \quad (W) \quad (2.5)$$

en donde:

- h : es el coeficiente de transferencia de calor por convección en W/m^2K .
- A_s : corresponde al área superficial expuesta a la convección.

- T_s : corresponde a la temperatura superficial del sólido expuesto a la convección.
- T_∞ : es la temperatura del fluido suficientemente alejado de la superficie.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h , no es una propiedad del fluido, este es un parámetro que se determina de forma experimental y cuyo valor tiene dependencia de todas aquellas variables que influyen sobre la convección, como la configuración geométrica de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido (natural o forzado), las propiedades de éste y la velocidad masiva del mismo.

2.1.3. Radiación

La radiación es la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas (o fotones) como resultado de los cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas. A diferencia de la conducción y la convección, la transferencia de calor por radiación no requiere la presencia de un medio intervector. De hecho, la transferencia de calor por radiación es la más rápida (a la velocidad de la luz) y no sufre atenuación en un vacío. Ésta es la manera en la que la energía del Sol llega a la Tierra. Çengel; Afshin J. Ghajar (2011) En los estudios de transferencia de calor es de interés la radiación térmica, que es la forma de radiación emitida por los cuerpos debido a su temperatura. Todos los cuerpos a una temperatura arriba del cero absoluto emiten radiación térmica.

La radiación es un fenómeno volumétrico, sin embargo suele considerarse como un fenómeno superficial para sólidos opacos a la radiación térmica, como los metales, la madera y las rocas, ya que las radiaciones emitidas por las regiones interiores de un material de ese tipo nunca pueden llegar a la superficie, y la radiación incidente sobre esos cuerpos suele absorberse en unas cuantas micras hacia adentro de dichos sólidos.

La razón máxima de radiación que se puede emitir desde una superficie A_s a una temperatura $T_s(K)$ es expresada por la Ley de Stefan-Boltzmann como,

$$\dot{Q}_{rad, max} = \sigma \cdot A_s \cdot T_s^4, \quad (W) \quad (2.6)$$

donde σ , corresponde a la constante de Stefan-Boltzmann y es igual a $5,67 \times 10^{-8} (W/m^2 K^4)$. Esta radiación solo es emitida por una superficie idealizada a la cual se le denomina cuerpo negro, todas las superficies reales emiten una cantidad menor de radiación que un cuerpo negro a la misma temperatura y se expresa como,

$$\dot{Q}_r = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A_s \cdot T_s^4, \quad (W) \quad (2.7)$$

donde ε es la emisividad de la superficie real, cuyo valor esta en el intervalo $0 \leq \varepsilon < 1$. Otra importante propiedad relativa a la radiación de una superficie es su absorptividad a_b , la cual es la fracción de la energía de radiación incidente sobre una superficie que es absorbida por ésta.

$$\dot{Q}_{absorbida} = a_b \cdot \dot{Q}_{incidente} \quad (W) \quad (2.8)$$

Como la emisividad, su valor está en el intervalo $0 \leq a_b < 1$. Un cuerpo negro absorbe toda la radiación incidente sobre él. Es decir, un cuerpo negro es un absorbente perfecto ($\alpha = 1$) del mismo modo que es un emisor perfecto ($\varepsilon = 1$). La diferencia entre los flujos de radiación emitida y absorbida por una superficie es la tasa neta de transferencia de calor por radiación y depende de las propiedades radiativas de las superficies, la orientación geométrica entre ellas y la eventual participación del medio entre ellas. Si la razón de absorción de la radiación es mayor que la de emisión, se dice que la superficie está ganando energía por radiación. De lo contrario, se dice que la superficie está perdiendo energía por radiación.

2.2. Aproximación Térmicamente Delgado (Thermally Thin) y Grueso (Thermally Thick)

Cuando un material sólido es expuesto a un flujo de calor, y los distintos mecanismos de transferencia de calor están actuando, este puede comportarse como un material *thermally thin* o *thermally thick*, dependiendo de las propiedades del material, las dimensiones y la magnitud del flujo de calor incidente. Un sólido se puede definir como *thermally thick* si existe un gradiente térmico significativo dentro del volumen del sólido durante el proceso de transferencia de calor. Por el contrario, en un sólido *thermally thin*, el gradiente de temperatura al interior del sólido es despreciable y por lo tanto, su temperatura puede ser considerada como una constante en el espacio [Torero \(2016\)](#).

Para un material específico es posible aplicar un criterio basado en el número de Biot (Bi) para definir la aproximación adecuada, el número de Biot se define como $B_i = d \cdot h_g / k$, donde d es la distancia característica de la muestra, que para las geometrías de este estudio cuenta como el espesor de la muestra, h_g es el coeficiente global de transferencia de calor y k es la constante de conductividad térmica. Si $B_i < 0,1$ entonces el gradiente de temperatura al interior del estrato es despreciable, por lo que se puede aproximar como *thermally thin*, por el contrario si $B_i > 0,1$, el gradiente de temperatura al interior del estrato debe considerarse y por tanto se comporta como *thermally thick*. Una visualización gráfica de este efecto se presenta en la Figura 2.1.

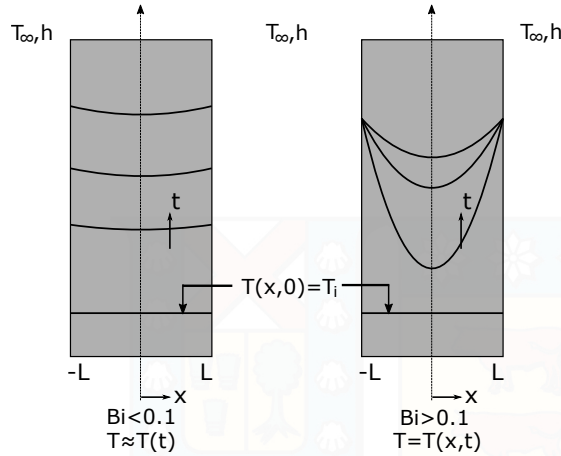


Figura 2.1: Distribución transitoria de temperaturas para distintos números de Biot en placas planas enfriadas simétricamente por convección. Elaboración propia.

2.3. Transferencia radiativa en medio participativo

En muchas aplicaciones de ingeniería la interacción de la radiación térmica con un material radiativamente participativo debe considerarse, particularmente cuando la radiación participa con el medio del material donde penetra, ocurren tres efectos, Absorción, emisión y dispersión [Modest \(2013\)](#). Para explicar estos conceptos conviene trabajar con el término *intensidad radiativa* I , la cual por definición es el flujo de energía radiativa por unidad de ángulo sólido y unidad de área normal a los rayos.

2.3.1. Absorción

Efecto descrito anteriormente en la sección 2.1.3, a diferencia que esta absorción ocurre en todo el volumen del material, es decir, en todo el medio. esta energía absorbida se convierte en energía interna, lo que a su vez provoca un aumento en la temperatura del medio. Se ha observado que la cantidad absoluta de absorción es directamente proporcional a la magnitud o intensidad de la energía incidente, I , así como la distancia que recorre el rayo a través del medio, ds . la expresión que indica la variación de la intensidad radiativa en el medio es la siguiente,

$$(dI)_{\text{abs}} = -\kappa I ds \quad (2.9)$$

Aquí κ representa el coeficiente de absorción lineal, parámetro que depende del medio, este valor es el inverso del camino promedio que recorre un fotón antes de absorberse. El signo negativo se explica ya que la intensidad radiativa decrece a medida que se avanza por el medio. Al integrar este diferencial en

todo el camino geométrico s , se obtiene,

$$I(s) = I(0) \exp \left(- \int_0^s \kappa ds \right) = I(0) e^{-\tau} \quad (2.10)$$

$$\tau = \int_0^s \kappa ds \quad (2.11)$$

Donde τ es el espesor óptico del material, a través del cual la radiación penetra. $I(0)$ representa la intensidad que entra al medio en $s = 0$. Finalmente la expresión que indica absortividad del medio es,

$$a_b = 1 - e^{-\tau} \quad (2.12)$$

2.3.2. Dispersión

Este efecto ocurre cuando la radiación incidente es removida de su dirección de propagación por las partículas del medio, es decir, parte de la radiación incidente es redirigida en otras direcciones distintas a la de estudio. Su efecto se expresa de forma similar a la absorción, pero con un coeficiente de dispersión σ_d ,

$$(dI)_{\text{disp}} = -\sigma_d I ds \quad (2.13)$$

Si consideramos una dirección de estudio $\hat{s}$, la dispersión puede redirigir un fotón o parte del flujo con intensidad I a cualquier otra dirección $\hat{s}_i$. Así mismo, otros fotones que vienen en una dirección cualquiera $\hat{s}_i$ pueden ser redirigido a la dirección de estudio $\hat{s}$ gracias a otra partícula del medio, por lo tanto, al tratar de considerar el efecto de todas las direcciones, la dispersión se vuelve muy compleja de representar. En la Figura 2.2 se esquematizan los efectos de atenuación de la intensidad radiativa por efectos de absorción y dispersión. Es posible combinar ambos efectos en un coeficiente de extinción $\beta = \kappa + \sigma_d$, lo que permite definir el espesor óptico nuevamente considerando ambos factores.

$$\tau = \int_0^s \beta ds \quad (2.14)$$

2.3.3. Emisión

Así como el rayo de luz viajando por el medio pierde energía por absorción y dispersión, también puede ganar energía por el efecto de emisión del medio. La tasa de emisión será proporcional a la magnitud del volumen. Por lo tanto, la intensidad emitida (que es la tasa de energía emitida por unidad de área) a lo largo de cualquier ruta debe ser proporcional a la longitud de la ruta, y debe ser

proporcional a la contenido energético local en el medio, esto es,

$$(dI)_{\text{emi}} = \kappa I_b ds \quad (2.15)$$

Donde I_b es la intensidad radiativa de un cuerpo negro. Cabe destacar que la intensidad radiativa en cualquiera de sus formas puede ser descrita respecto a la temperatura del elemento y la constante de Stefan-Boltzmann se la siguiente manera,

$$I = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (2.16)$$

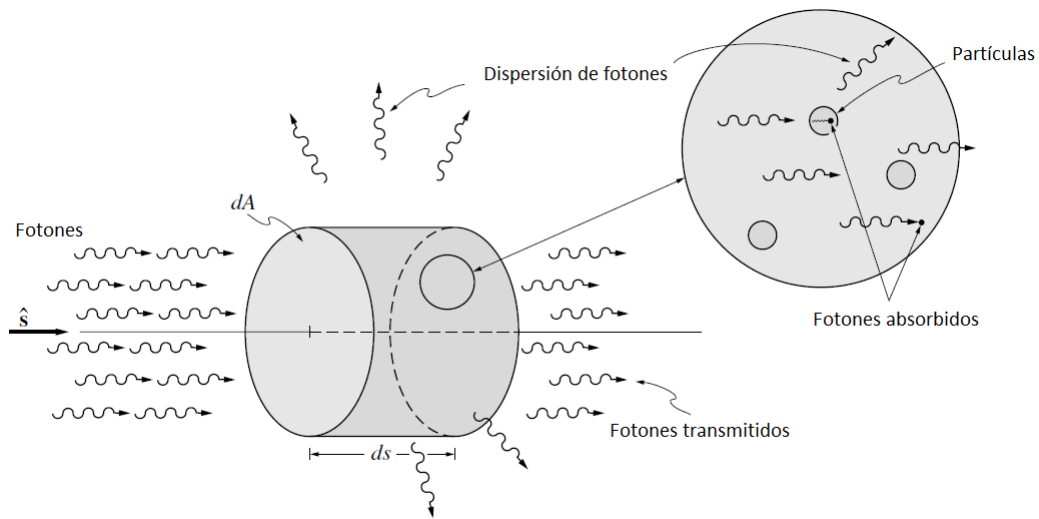


Figura 2.2: Atenuación de la intensidad radiativa producto de los efectos de absorción y dispersión

2.3.4. Ecuación de transferencia de calor radiativa

Sumando los efectos de absorción, emisión y dispersión en un balance de energía da la ecuación de transferencia radiativa completa, o intensidad neta, para un medio participativo, esta es,

$$\frac{dI}{d\tau} = -I + (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{s}_i) \Phi(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \quad (2.17)$$

Donde τ sigue siendo el espesor óptico, utilizado como una longitud adimensional; ω se denomina como *albedo de dispersión* y tiene la forma $\omega = \sigma_d/\beta$; Φ es una función de dispersión en caso de que este efecto no sea isotrópico (igual en todas las direcciones); finalmente Ω representa el ángulo sólido, integrado en todo ángulo para captar el efecto completo desde cada dirección $\hat{s}_i$ a la dirección de estudio $\hat{s}$ [Modest \(2013\)](#)

Esta ecuación de transferencia radiativa se debe incluir de alguna forma al balance energético general, para lograr aquello se aprovecha el efecto de la divergencia de la radiación al interior de un medio participativo, la cual será explicada a continuación.

2.4. Divergencia del flujo radiativo

Si bien la transferencia de calor está interesada en el flujo de calor radiativo, este interés generalmente sólo es para los flujos en las condiciones de borde. Por otro lado, al considerar un medio de un material necesitamos saber cuánta energía radiativa neta se deposita (o se extrae) de cada elemento infinitesimal del volumen. La divergencia del flujo radiativo permite obtener esta información [Modest \(2013\)](#). Por lo tanto, hacer un balance de energía radiativa en un volumen infinitesimal $dV = dxdydz$ como se aprecia en la Figura 2.3, se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \text{energía radiativa} \\ \text{almacenada en } dV \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{energía radiativa} \\ \text{emitida por } dV \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{energía radiativa} \\ \text{absorbida por } dV \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{flujo entrante en } x - \text{flujo saliente en } x + dx \\ + \text{flujo entrante en } y - \text{flujo saliente en } y + dy \\ + \text{flujo entrante en } z - \text{flujo saliente en } z + dz \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

El lado derecho de la ecuación puede escribirse matemáticamente como,

$$\left. \begin{array}{l} q(x)dydz - q(x+dx)dydz \\ + q(y)dx dz - q(y+dy)dx dz \\ + q(z)dx dy - q(z+dz)dx dy \end{array} \right\} = - \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} \right) dxdydz = -\nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (2.19)$$

La divergencia del flujo radiativo de forma general para un medio gris (no hay variación de propiedades según la longitud de onda de la radiación) puede ser calculada de forma simple con la siguiente expresión,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \kappa \left(4\sigma T^4 - \int_{4\pi} I d\Omega \right) = \kappa (4\sigma T^4 - G) \quad (2.20)$$

Donde G es la radiación incidente local, y considera una cierta densidad de energía radiativa contenida en un volumen, proveniente de todas direcciones. Ω denota un ángulo sólido. Cabe destacar que en muchas aplicaciones matemáticas, calcular la divergencia es un reto ya que, tanto la temperatura como la radiación incidente local son naturalmente incógnitas, por lo tanto, se utilizan metodologías

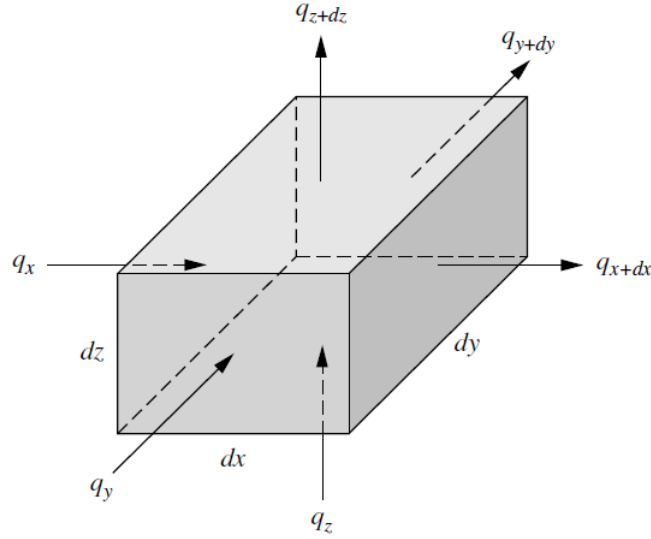


Figura 2.3: Volumen de control para la derivación de la divergencia del flujo radiativo.

y aproximaciones especiales para poder aplicar la divergencia del flujo radiativo a una ecuación de energía útil.

2.5. Aproximación Schuster–Schwarzschild

También conocido como el método de dos flujos, este es un método utilizado para encontrar la divergencia del flujo radiativo aplicado al caso unidimensional de un medio participativo, contenido entre dos placas planas, grises e isotérmicas [Modest \(2013\)](#). Esta aproximación asume que la intensidad del flujo radiativo es isotrópica (que es igual en todas las direcciones), pero diferente en dos hemisferios, superior e inferior, tomando la siguiente forma,

$$I(\tau, \mu) = \begin{cases} I^-(\tau), & -1 < \mu < 0 \\ I^+(\tau), & 0 < \mu < +1 \end{cases} \quad (2.21)$$

donde μ representa la variable auxiliar que permite identificar los hemisferios, mientras que τ es el espesor óptico del material, como fue mostrado anteriormente. Tomando la Ecuación 2.17 aplicado a dos placas paralelas unidimensionales y con $\Phi = 1$ ya que se considera una dispersión isotrópica, se tiene,

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = (1 - \omega)I_b - I + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^{+1} Id\mu, \quad -1 < \mu < +1 \quad (2.22)$$

Al aplicar la separación de la intensidad por hemisferios, se obtiene un sistema con dos ecuaciones diferenciales,

$$\frac{1}{2} \frac{dI^+}{d\tau} = (1 - \omega)I_b - I^+ + \frac{\omega}{2} (I^- + I^+) \quad (2.23)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^-}{d\tau} = (1 - \omega)I_b - I^- + \frac{\omega}{2} (I^- + I^+) \quad (2.24)$$

Este sistema está sujeto a las siguientes condiciones de borde, donde J_1 y J_2 son las radiosidades de ambas placas en los límites del medio

$$\tau = 0 : \quad I^+ = J_1/\pi \quad (2.25)$$

$$\tau = \tau_L : \quad I^- = J_2/\pi \quad (2.26)$$

Además para este caso de estudio la intensidad radiativa permite definir el flujo de calor por unidad de área q y el flujo incidente local G de la siguiente forma,

$$q = 2\pi \int_{-1}^1 I \mu d\mu = \pi(I^+ - I^-) \quad (2.27)$$

$$G = 2\pi \int_{-1}^1 I d\mu = 2\pi(I^+ + I^-) \quad (2.28)$$

Teniendo estas expresiones I^+ y I^- son fácilmente eliminables de las ecuaciones 2.23 y 2.24 y de sus condiciones de borde, con lo cual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\frac{dq}{d\tau} = (1 - \omega)(4\pi I_b - G) \quad (2.29)$$

$$\frac{dG}{d\tau} = -4q \quad (2.30)$$

$$\tau = 0 : \quad G + 2q = 4J_1 \quad (2.31)$$

$$\tau = \tau_L : \quad G - 2q = 4J_2 \quad (2.32)$$

Con el cual se puede obtener diferente información según lo requiera el problema, se puede obtener el valor del flujo de calor por unidad de área q , el flujo incidente local G , de la divergencia del flujo $\nabla \cdot \mathbf{q}$, equivalente a $dq/d\tau$. Toda esta información puede estar en función de la temperatura, lo que permite su apropiada inclusión en la ecuación de energía general.

2.6. Teoría de ignición de sólidos

2.6.1. Descripción

La ignición se define como el proceso que conlleva al inicio de una reacción de combustión entre un material combustible y un oxidante, típicamente aire, lo que genera un proceso exotérmico de liberación de calor. Para que ocurra una reacción de combustión, la temperatura de la mezcla debe ser mayor que la temperatura de ignición, de modo que la energía liberada por la reacción de combustión sea mayor que las pérdidas de la reacción. Por lo tanto, la ignición se produciría subiendo la temperatura del combustible con una fuente de calor externo como por ejemplo, chispas, superficie caliente, una llama controlada o una fuente radiativa [Manzello \(2020\)](#). La variación de la temperatura de la muestra no depende solo de propiedades del material combustible, también depende de las circunstancias del medio y el tiempo de exposición de la muestra.

Cuando un material sólido, inicialmente a temperatura ambiente, está sujeto a una fuente externa de energía, la temperatura de la superficie expuesta comienza a aumentar. Este momento se define como el inicio del proceso de ignición, $t = 0$, en donde se inician una serie de fenómenos físicos y químicos a medida que la energía llega a la superficie del material [Torero \(2016\)](#).

Para simplificar, todos los procesos involucrados pueden ser divididos en dos grupos, los asociados con el fase sólida y aquellas con fase gaseosa. El tratamiento en fase sólida conducirá a una descripción de la producción de combustible en forma de gas $\dot{m}''_{fuel}$, el análisis de la fase gaseosa se centrará en cómo el conjunto de el combustible gaseoso y el oxidante dan lugar a una llama.

2.6.2. Fase sólida

La temperatura del sólido, inicialmente a temperatura ambiente (T_0), aumenta a medida que el flujo de calor alcanza la superficie de el material. Las temperaturas más altas se alcanzarán cerca de la superficie, pero la transferencia de calor en la profundidad del medio resultará en un aumento de la temperatura de una parte significativa del sólido. Por lo tanto, la temperatura variará en profundidad y con el tiempo, por lo que la temperatura debe representarse como una función de ambas variables, $T(x, t)$. El modelo desarrollado en el presente estudio describe principalmente esta parte del proceso de ignición, se explica la variación en la temperatura del sólido hasta alcanzar un punto crítico o temperatura de ignición.

2.6.3. Proceso de pirólisis

El proceso por el cual el sólido se transforma en combustible en fase gaseosa se llama pirólisis y generalmente implica la descomposición de las moléculas en moléculas diferentes, la mayoría de las veces más pequeñas. La pirólisis tiende a ser un proceso endotérmico generalmente controlado por muchas reacciones químicas (algunas veces cientos) que son altamente dependientes de la temperatura. La mayoría de las tasas de reacción de pirólisis tienden a ser descritas por funciones tipo Arrhenius de la temperatura [Torero \(2016\)](#), esto es,

$$\dot{m}_{fuel}''' = AY_{O_2}^m Y_{fuel}^n e^{-E_x/(RT)}, \quad (2.33)$$

donde R es la constante universal de los gases, E y A son la energía de activación y la constante de la reacción química, respectivamente. Y_{O_2} e Y_{fuel} representan la fracción de masa del oxígeno y combustible sólido que participan en la degradación, mientras m y n son las constantes exponenciales, respectivamente. La tasa de reacción $\dot{m}_{fuel}''$ tiene unidades $(kg/s\ m^3)$.

Como se indicó en los alcances del estudio, el proceso químico de pirólisis, no será el centro de atención, es un proceso extenso y tiene su propia área de estudio. Solo se presenta la información básica para generar una base de contexto para el lector, y que pueda comprender todos los supuestos realizados, por lo tanto, no se darán mas detalles.

2.6.4. Fase gaseosa e ignición

Después del inicio de la pirólisis, el gas comienza a emerger de la superficie del combustible, inicialmente en muy pequeñas cantidades, pero a medida que aumenta $T(x, t)$, el flujo de masa de combustible también incrementará. El combustible emergente encontrará el oxidante del ambiente y eventualmente producirá una mezcla inflamable que puede lograr la ignición principalmente de dos formas.

2.6.4.1. Ignición espontánea

Una vez alcanzada la mezcla propicia, esta debe alcanzar la temperatura necesaria a la cual la reacción de combustión pueda ocurrir. En el caso de la combustión espontánea o también llamada auto-ignición, no existe un punto caliente que actúe como un piloto para la reacción, por lo que la mezcla debe absorber/generar la suficiente cantidad de energía hasta alcanzar la temperatura de ignición, $T_{ig,sp}$. Un ejemplo de materiales susceptibles a la ignición espontánea son el Heno y la paja quienes por fermentación bacteriana y su alta capacidad aislante, permiten el aumento de temperatura. Dado que no existe un piloto que permita la ignición, deben entonces cumplirse dos condiciones para que

exista la combustión, en primer lugar debe formarse una mezcla inflamable y en segundo lugar esta debe alcanzar la temperatura necesaria para que la ignición ocurra, es por esta razón que se identifica un tiempo de inducción y un tiempo de pirólisis. El tiempo de pirólisis corresponde al tiempo requerido para lograr una mezcla inflamable, mientras que el tiempo de inducción es el tiempo para que la mezcla alcance una temperatura a la cual pueda ocurrir la ignición. Dada la configuración específica, el tiempo de pirólisis disminuye con la velocidad del flujo (transferencia de calor mejorada en la superficie del combustible) mientras que el tiempo de inducción aumenta [Torero \(2016\)](#).

La cantidad exacta de energía necesaria para que la mezcla alcance la ignición puede asociarse al número de Damköhler. Este número corresponde a la razón entre el tiempo de residencia y el tiempo necesario para que la reacción química ocurra. El tiempo necesario para que la reacción química ocurra se expresa como el inverso de la velocidad de reacción, esta velocidad tiene directa relación con la temperatura, a mayor temperatura mayor velocidad de reacción y por tanto un menor tiempo para que ocurra la reacción química. El tiempo de residencia es una medida de la tensión (o las tasas de disipación) o el tiempo que los reactivos permanecen juntos en una ubicación específica, por lo tanto, está directamente relacionado con el campo de velocidad. Cuanto más rápido es el flujo o los gradientes de velocidad, más corto es el tiempo de residencia. Si los tiempos químicos son más cortos que los tiempos de residencia, la reacción tiene tiempo suficiente para continuar y puede existir una llama [Torero \(2016\)](#).

2.6.4.2. Ignición pilotada

En gran parte de los casos reales, la ignición tendrá lugar gracias a la existencia de una región que haya alcanzado mayores temperaturas. La presencia de un piloto (e.g. llama externa, chispa, arco eléctrico) permite simplificar de gran manera el proceso de gasificación ya que es posible asumir que la ignición tiene lugar cuando la mezcla inflamable alcanza el límite inferior de inflamabilidad (LFL) en el punto donde se encuentre el piloto. Una vez que haya ocurrida la ignición la flama se propagará hacia las regiones donde exista una mezcla inflamable consumiendo los reactantes, para que la llama sea sostenida debe existir una propicia tasa de pirólisis. El calor liberado por la llama incrementará la formación de gases de pirólisis, los cuales determinarán si la llama es sostenida, en caso de no alcanzar un nivel adecuado la llama se extinguirá, continuando el proceso de pirólisis, la cual eventualmente podrá generar nuevamente una mezcla inflamable y en consecuencia la ignición, esto generará una serie de destellos, fenómeno conocido como *flash point*. Si la aparición de la llama es sostenida se denominará *fire point*.

Cabe destacar que a temperatura ambiente, los materiales sólidos que no son susceptibles a la ignición espontánea, mostrarán muy poca evidencia de reacciones químicas mientras aumentan su temperatura, por lo que pueden considerarse inertes durante gran parte del proceso, entonces es una

práctica común asumir que la temperatura de ignición es aproximadamente la misma que la temperatura de pirólisis $T_{py,0}$, donde el proceso rápido de pirólisis se inicia y da pie a la ignición.

2.6.5. Consideraciones de la Ignición

2.6.5.1. Flujo crítico de ignición

El flujo de calor crítico para un material sólido es el flujo de calor externo mínimo que provocará la generación de gases de pirólisis suficientes en la superficie del combustible para permitir la ignición del material. Los flujos de calor críticos se pueden evaluar tanto en condiciones de ignición pilotada e ignición espontánea. Como es de suponer los flujos de calor críticos para igniciones pilotadas tienden a ser más bajos que para igniciones espontáneas. Muy poca información se encuentra disponible sobre la ignición no pilotada, principalmente para madera, donde el flujo crítico suele ser dos a tres veces mayor que al usar un piloto [Mowrer \(2004\)](#).

2.6.5.2. Temperatura de ignición y tiempo de ignición

Si se considera el sólido como un material inerte hasta la ignición y la fase gaseosa se puede resumir en un coeficiente de transferencia total de calor h_T , se puede suponer que la ignición tendrá lugar al momento de iniciar el proceso de pirólisis, pudiendo caracterizar el proceso de ignición mediante la obtención de una temperatura característica de la superficie, comúnmente conocida como T_{ig} . Por otro lado al exponer la muestra a un flujo externo de calor, el tiempo que tarda en lograr la ignición desde el momento del inicio de la exposición, es denominado como tiempo de ignición (t_{ig}). Con estos dos parámetros es posible caracterizar todo el proceso de ignición. Para poder establecer una condición crítica de ignición se desarrolla el siguiente análisis. Si se supone el tiempo de ignición infinito, no existirá un gradiente de temperatura al interior del sólido, por lo que las pérdidas de calor serán equivalentes al calor incidente. Este flujo de calor se denomina como flujo crítico de ignición ($\dot{q}''_{inc,cri}$) y representa el flujo mínimo de calor necesario para alcanzar la temperatura de ignición [Torero \(2016\)](#).

Es importante tener en cuenta que tanto el flujo crítico de ignición como la temperatura de ignición, no son propiedades inherentes al material, sino una combinación de este y las condiciones ambientales específicas en las cuales se realizan los experimentos para obtener estos datos. Debido a esto para un mismo material se reportan distintos flujos críticos de ignición; temperaturas de ignición; y tiempos de ignición.

En el modelo desarrollado, se considera que el material sólido recibe un flujo incidente de un piloto, que corresponde a un frente de llama de un incendio a una distancia adecuada que se acerca conforme avanza hacia el objeto o cuerpo del estudio.

2.7. Material: PMMA

El polimetil metacrilato (PMMA), también conocido como vidrio acrílico o acrílico, es un material termoplástico transparente y rígido ampliamente utilizado como reemplazo inastillable del vidrio. Destaca principalmente su alta resistencia a la luz UV y a la intemperie, y por su excelente capacidad de transmisión de la luz. cabe destacar que su peso es aproximadamente la mitad que la del vidrio y tiene una resistencia al impacto diez veces mayor.

Este material se popularizó durante la segunda guerra mundial, se usó extensivamente en varias aplicaciones tecnológicas de guerra como aviones y torretas. Luego de la guerra y gracias a su excelente resistencia al impacto y a los rayos UV, su uso se extendió a otras aplicaciones comerciales y urbanos, como tejados transparentes, diseño de fechadas, marquesinas, paneles, perfiles de ventanas y puertas, publicidad, automóviles; debido a su adecuado aislamiento térmico se utilizó también en la construcción de invernaderos. En la actualidad su uso se a extendido a varias otras áreas distintas, como la electrónica, la medicina y los muebles. El PMMA también se utiliza para construir acuarios y centros marinos [SpecialChem \(2018\)](#).

Además se su extenso uso en varias industria modernas, el PMMA ha sido ampliamente utilizado en la literatura, tanto en publicaciones como libros, al desarrollar modelos de transferencia de calor similares. Sus propiedades físicas son ampliamente conocidas, lo cual facilita la obtención de información. Las razones anteriores hacen idóneo a este material para ser utilizado como caso de estudio y permiten que el modelo desarrollado pueda ser ampliamente comparado con otros modelos existentes en la literatura, bajo una misma base, partiendo por el material estudiado.

Cabe destacar que si bien se utiliza el PMMA como material de estudio, el modelo no se limita específicamente a dicho material, puede ser aplicado a cualquier material que cumpla con los supuestos y consideraciones realizadas en este trabajo.

2.8. Sólidos porosos

Los siguientes conceptos hacen referencia a materiales sólidos, pero que se denominan *porosos*, es decir, cuentan con poros o bolsas de aire al interior de su estructura (como una esponja por ejemplo), lo cual puede formarse al considerar como un solido único a un conjunto amplio de objetos sólidos pequeños y similares entre si mismos que se encuentran posicionados de forma aleatoria dentro de un volumen de control. Esto es justamente lo que ocurre con la biomasa o material combustible encontrada en la interfaz urbano-silvestre.

2.8.1. Densidad de masa

Este concepto hace referencia a la masa individual de la muestra de combustible utilizada por unidad de volumen cuando esta contiene 0 % de humedad [Keane \(2015\)](#). Esta se calcula como:

$$\rho_{fuel} = \frac{m_{fuel}}{v_{fuel}} \quad (2.34)$$

El volumen de un único objeto dentro de este conjunto (también llamado partícula) se puede obtener asumiendo una geometría representativa que permita obtener una aproximación del volumen, lo cual va a inducir una fuente de error no despreciable al cálculo. Un segundo método consiste en sumergir la partícula en algún líquido y observar la variación de volumen que exista en él, para ello se debe utilizar un líquido adecuado para la medición. En ambos casos solo basta con medir la masa de la partícula para luego utilizar la ecuación 2.34 y con ella calcular la densidad del combustible.

2.8.2. Densidad aparente

La densidad aparente de una muestra combustible, ρ_b , representa la masa global del material que compone el combustible por unidad de volumen del espacio en el que la masa está contenida. La densidad aparente, a diferencia de la densidad de masa, incluye las bolsas de aire o poros entre las partículas del combustible [Keane \(2015\)](#). Esta se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\rho_b = \frac{m_{fuel}}{v_{control}} \quad (2.35)$$

En esta ecuación se desprecia la masa de aire presente en el volumen de control ($v_{control}$). Comúnmente se utiliza para representar la distribución espacial del material combustible. Por ejemplo, este concepto se puede aplicar a las copas de los árboles para modelar incendios de copa, o para modelar incendios de superficie de una vegetación mediana o de baja altura.

2.8.3. Packing ratio y porosidad

El packing ratio (β), es un índice utilizado para caracterizar la compactación de un estrato sólido poroso [Keane \(2015\)](#), el cual se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\beta = \frac{\rho_b}{\rho_{fuel}} \quad (2.36)$$

Cuando el packing ratio es bajo, implica que existe una gran cantidad de espacios con aire al interior del combustible, es decir, es más poroso.

Otro indicador utilizado para medir el nivel de compactación del estrato es la porosidad (ϵ), esta se define como la razón del volumen de aire (o vacío) respecto al total de volumen del estrato [Keane \(2015\)](#):

$$\epsilon = \frac{v_{aire}}{v_{control}} = 1 - \frac{\rho_b}{\rho_{fuel}} \quad (2.37)$$

Un tercer parámetro que permite caracterizar la distribución de la biomasa es la fracción en volumen que ocupa el material combustible (α_{fuel}), respecto del volumen total del estrato, este se define como:

$$\alpha_{fuel} = \frac{v_{fuel}}{v_{control}} \quad (2.38)$$

Si se considera la masa de aire despreciable al interior del estrato, m_{aire} , se tiene que $\alpha_{fuel} = \beta$, y entonces $\epsilon = 1 - \alpha_{fuel}$. Notar que debido a que el volumen del combustible no puede ser mayor al del volumen de control que lo contiene, esta propiedad solo puede tomar valores entre 0 y 1.

2.9. Fundamentos matemáticos

A continuación se explican los elementos matemáticos fundamentales utilizados en este trabajo, a fin de poder explicar en detalle todos los cálculos y consideraciones efectuados en el modelo que se explicará más adelante.

2.9.1. Aproximación en series de Taylor

Una serie de Taylor es una expansión en serie de una función sobre un punto. Una expansión en serie es una representación de una función particular como una suma de potencias en una de sus variables, o por una suma de potencias de otra función (generalmente elemental) $f(x)$. Una serie de Taylor unidimensional es una expansión de una función real $f(x)$ alrededor de un punto $x = a$ está dada por,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \quad (2.39)$$

Si $a = 0$, la expansión se conoce como serie de Maclaurin. Estas series se utilizan para aproximar funciones complejas con expresiones simplificadas, por lo general la serie se trunca o corta en un punto, considerando una cantidad limitada de términos en la sumatoria, lo cual siempre genera un error en la aproximación [Weisstein \(2021d\)](#).

2.9.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Es una ecuación con una función en una variable independiente desconocida, que contiene no solo la función desconocida en sí, sino también sus derivadas de varios órdenes. Las ecuaciones diferenciales ordinarias tienen aplicaciones importantes y son una herramienta poderosa en el estudio de muchos problemas en las ciencias naturales y en la tecnología; se emplean ampliamente en mecánica, astronomía, física y en muchos problemas de química y biología. La razón de esto es el hecho de que las leyes que gobiernan ciertos fenómenos pueden escribirse como ecuaciones diferenciales ordinarias, de modo que las ecuaciones en sí mismas son una expresión cuantitativa de estas leyes. Por ejemplo, las leyes de la mecánica de Newton permiten reducir la descripción del movimiento de puntos de masa o cuerpos sólidos a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias [Mishchenko \(2020\)](#).

2.9.3. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformada integral utilizada para resolver problemas físicos. La transformada de Laplace es particularmente útil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales como las que surgirán en el análisis del problema de este estudio [Weisstein \(2021b\)](#). La transformada de Laplace (unilateral) $\mathcal{L}$ se define por,

$$\mathcal{L}_t[f(t)](s) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (2.40)$$

A continuación se proporciona una la Tabla 2.1 con varias transformadas de Laplace útiles. Se puede

$f(t)$	$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$	Condición
1	$\frac{1}{s}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{Z} \geq 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
$f'(t)$	$s \cdot \mathcal{L}_t[f(t)] - f(0)$	f diferenciable en $[0, \infty)$

Tabla 2.1: Tranformadas de Laplace utilizadas en este estudio

aplicar la transformación inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ para volver a las variables originales siguiendo la misma tabla de transformaciones. Además es necesario conocer el teorema de convolución de Laplace,

el cual es,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t[f(t) * g(t)] &= \mathcal{L}_t[f(t)]\mathcal{L}_t[g(t)] \\ \mathcal{L}_t^{-1}[FG] &= \mathcal{L}_t^{-1}[F] * \mathcal{L}_t^{-1}[G] = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\end{aligned}\quad (2.41)$$

2.9.4. Ecuación de Chini

Es un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria no lineal, que en general, no tiene solución por cuadraturas ni analítica, solo cuenta con una solución analítica con una forma implícita que lo hace inconveniente como expresión general para ser utilizada por el ingeniero común [Hernández et al. \(2019\)](#). Esta EDO tiene la siguiente forma,

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t)(y(t))^n + g(t)y(t) + h(t) \quad (2.42)$$

Este tipo de ecuación generaliza otras EDO más reconocidas como la ecuación de Ricatti ($n = 2$) y la de Abel ($n = 3$) [Kamke \(1977\)](#). El caso de $n = 1$ forma simplemente una ecuación diferencial ordinaria lineal fácilmente resoluble.

La solución analítica implícita tiene la siguiente forma,

$$\sum_{\eta: a_3\eta^4 + a_2\eta + a_1 = 0} \frac{\log(\bar{T}(t) - \eta)}{4a_3\eta^3 + a_1} = \frac{t}{\rho c_p} + A \quad (2.43)$$

Donde a_1 , a_2 y a_3 toman valores según la EDO que se quiere resolver. El valor de A se obtiene con la condición inicial del problema.

2.9.5. Función error

Se define erf como la abreviación matemática que se le da a la "función de error" que se encuentra al integrar la distribución normal (que es una forma normalizada de la función gaussiana) [Weisstein \(2021a\)](#). Es una función completa definida por,

$$\text{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (2.44)$$

Satisface la siguiente identidad,

$$\text{erf}(z) = 1 - \text{erfc}(z) \quad (2.45)$$

Donde $\text{erfc}(z)$ representa la función error complementaria. Este tipo de integrales no tienen solución analítica exacta, por lo que suele ser representado a través de series, o por funciones asintóticas. Definido

como series de Maclaurin queda,

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - \frac{1}{42}z^7 + \frac{1}{216}z^9 + \dots \right)\end{aligned}\quad (2.46)$$

Esta función resulta ser bastante utilizada en los modelos predictivos de tiempo de ignición en la configuración de placa plana en la literatura.

2.10. Métodos numéricos

Un método numérico es un algoritmo que intenta resolver una operación matemática compleja en un computador. Existen varias razones para usar estos algoritmos, por ejemplo; el problema es muy complejo, y no se puede encontrar una solución analítica en la práctica; el tamaño de la solución lo hace impracticable para resolver a mano. Se debe tener en cuenta algunas consideraciones para aplicar métodos numéricos a un problema matemático, una de ellas es que se debe traducir el problema a operaciones elementales (aritméticas) para que el computador pueda leerlo. La otra consideración es que se debe mantener el error *estable*, estos errores provienen principalmente de dos fuentes, una es el computador en sí, y su capacidad de representar números, que siempre tendrá un límite; la segunda fuente es el método usado, ya que de todas formas es una aproximación al problema real.

A continuación se presentan los métodos numéricos utilizados en este trabajo, para obtener los resultados de la versión semi analítica del modelo desarrollado y para realizar las distintas validaciones.

2.10.1. Método de Newton

El método describe un proceso iterativo que converge a la solución de una función $f(x) = 0$, esto se llama también encontrar los ceros de una ecuación. Este algoritmo es el más popular y básico para encontrar soluciones de una ecuación debido a su bajo costo computacional y su rápida velocidad de convergencia [Endre Süli \(2003\)](#). Se define como,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

Su interpretación geométrica se puede apreciar en la Figura 2.4 El nuevo valor en cada iteración depende del valor viejo, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $((x_n, f(x_n)))$ es la recta con la ecuación $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$; esta recta se encuentra con el eje x en el punto $(x_{n+1}, 0)$, acercándose a la

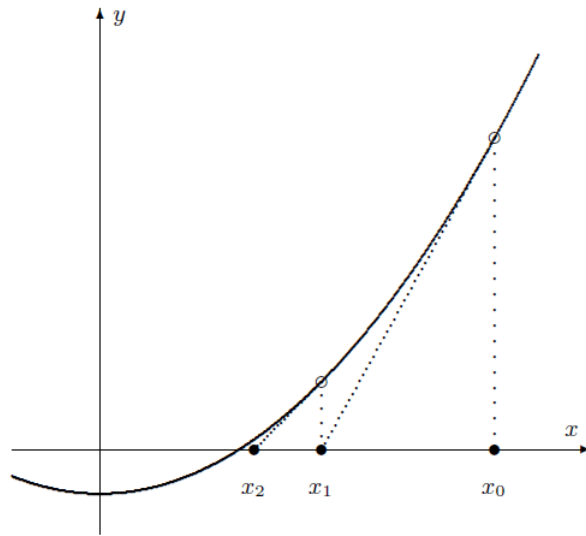


Figura 2.4: Método de newton

solución en cada iteración.

2.10.2. Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos iterativos de alta precisión utilizados en la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial. Hay muchas variantes de este método, pero el que ha sido ampliamente utilizado es el siguiente (RK4) [Hamming \(1987\)](#), dado por,

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y(t)) \\ y(t_n) &= y_n \end{aligned} \tag{2.48}$$

Se computa lo siguiente,

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Donde h es el paso por iteración, es decir, el incremento Δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1} . Este proceso puede ser descrito en términos geométricos. En el punto $((t_n, y_n))$ se calcula la pendiente (k_1/h) y usándola se avanza medio paso hacia adelante, examinando la nueva pendiente ahí. Usando

esta pendiente (k_2/h) , partiendo nuevamente desde el punto $((t_n, y_n))$, se avanza medio paso y se mide la pendiente. con la última pendiente (k_3/h) y partiendo desde $((t_n, y_n))$ se avanza un paso completo hacia adelante donde se obtiene una ultima pendiente (k_4/h) . Posteriormente las 4 pendientes son promediadas, usando distintos pesos $1/6$, $2/6$, $2/6$ y $1/6$ respectivamente. Finalmente se usa esta pendiente promediada para realizar el paso real desde $((t_n, y_n))$ hacia $((t_{n+1}, y_{n+1}))$.

Este método tiene un término de error proporcional a h^5 . Hay variantes del método respecto a los puntos donde se toman las muestras (pendientes), así como también los pesos que se le otorgan a cada una. También existen métodos de menor orden, en los cuales se utilizan menos pendientes por paso.

2.10.3. Método de mínimos cuadrados

Es un procedimiento matemático para encontrar la curva que mejor se ajusta a un conjunto de puntos dado, minimizando la suma de los cuadrados de los *residuos* de los puntos de la curva. los puntos denominados *outliers* pueden tener un efecto desproporcionado sobre el ajuste, una propiedad que puede ser deseable o no según el problema en cuestión.

La técnica de ajuste de mínimos cuadrados lineales es la forma más simple y más comúnmente aplicada de regresión lineal y proporciona una solución al problema de encontrar la línea recta que se ajuste de mejor manera a través de un conjunto de puntos [Weisstein \(2021c\)](#).

El ajuste por mínimos cuadrados procede de encontrar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales R^2 de un conjunto de n puntos de datos, y el residual resultante se minimiza para encontrar la mejor línea de ajuste.

$$R^2 \equiv \sum [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 \quad (2.50)$$

La condición para que R^2 sea un mínimo es que,

$$\frac{\partial R^2}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.51)$$

Para el caso de un ajuste lineal se tiene que $f(a, b) = a + bx$, entonces,

$$\begin{aligned} R^2(a, b) &\equiv \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \\ \frac{\partial(R^2)}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)] = 0 \\ \frac{\partial(R^2)}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)] x_i = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Resolviendo para (a, b) se tiene,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\bar{y} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Estos se pueden reescribir de una forma más simple definiendo las sumas de cuadrados,

$$\begin{aligned} SS_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\bar{x}^2 \\ SS_{yy} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - n\bar{y}^2 \\ SS_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - n\bar{x}\bar{y} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Los cuales finalmente se utilizan para obtener las varianzas (σ_x^2, σ_y^2) y covarianza $(COV(x, y))$,

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{SS_{xx}}{n} \\ \sigma_y^2 &= \frac{SS_{yy}}{n} \\ COV(x, y) &= \frac{SS_{xy}}{n}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Por lo tanto (a, b) pueden escribirse como,

$$b = \frac{COV(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} \quad (2.56)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (2.57)$$

La calidad general del ajuste se parametriza luego en términos de una cantidad conocida como coeficiente de correlación, definido por,

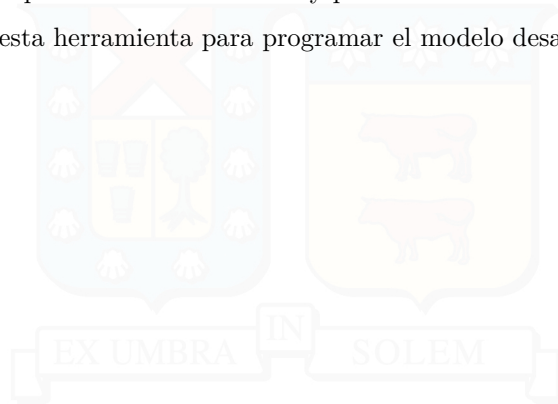
$$r^2 = \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \quad (2.58)$$

que da la proporción de ss_{yy} que es explicada por la regresión.

2.11. Python

Para aplicar el modelo desarrollado, éste se programó y para ello se utilizó Python, el cual es un lenguaje de programación que permite trabajar rápidamente e integrar sistemas de manera más efectiva. El lenguaje de programación Python tiene una amplia gama de construcciones sintácticas,

funciones de librerías estándar e interactivas, características del entorno de desarrollo. Debido a su extensa y variada cantidad de librerías se pueden solucionar un sinnúmero de problemas de distintas áreas, Interactuar con diversas plataformas, automatizar tareas, manipular datos, procesar imágenes, resolver operaciones matemáticas algebraicas y numéricas, entre otros [Sweigart \(2015\)](#). Debido a su popularidad, gran capacidad para resolver problemas matemáticos y por una comunidad gigantesca de usuarios y foros de soporte, se escogió esta herramienta para programar el modelo desarrollado.





3 | Desarrollo

3.1. Modelo analítico

En este apartado se desarrolla el modelo a partir de la ecuación de balance energético introduciendo los supuestos considerados. Luego, la ecuación de transferencia radiativa (RTE) se resuelve analíticamente en el medio participativo para ser incorporado adecuadamente en la ecuación energética. Finalmente se proponen soluciones analíticas para diferentes formas funcionales del flujo de calor variable en el tiempo que se ajustan al problema físico modelado en este estudio: Constante, Lineal, Exponencial y Polinomial.

Nomenclature

G	Radiación incidente Local (W m^{-2})	z	Coordenada (m)
I	Intensidad Radiativa (W m^{-2})	Símbolos Griegos	
I_b	Intensidad radiativa de cuerpo negro (W m^{-2})	α	Difusividad térmica ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
T	Temperatura (K)	δ	Camino libre de la radiación (m)
Π_i	Coefficientes polinomiales agrupados	κ	Coefficiente de absorción (m^{-1})
$\dot{q}''$	Heat flux (W m^{-2})	ρ	Densidad del material (kg m^{-3})
$\bar{T}$	Temperatura espacialmente promediada (K)	σ	Constante de Stefan-Boltzmann ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$)
a_b	Absortividad del material	σ_k	Ratio superficie-volumen (m^{-1})
b	Ratio de variación exponencial ($\text{W m}^{-2} \text{s}^{-1}$)	τ	Tiempo adimensional
c_p	Calor específico del material ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)	θ	Diferencia de temperatura (K)
d_i	coeficiente de flujo de calor polinomial de grado i ($\text{W m}^{-2} \text{s}^{i-1}$)	θ_r	Temperatura de referencia (K)
h_T	Coefficiente de transferencia de calor combinado en el medio ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)	ε	Emisividad del material
h_c	Coefficiente de transferencia de calor convectivo, superficial ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)	Subíndices	
k	Conductividad térmica ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	0	initial
r	Pendiente del flujo de calor creciente ($\text{W m}^{-2} \text{s}^{-1}$)	∞	ambiente
t	Tiempo (s)	$crit$	crítico
		ig	ignición
		inc	incidente
		net	neto
		R	radiativo

3.2. Ecuación de energía

La configuración esquematizada en la Figura 3.1 representa el contexto físico y la realidad del fenómeno que se intenta modelar en este estudio, esto es, dos placas planas paralelas donde una se mantiene en una posición fija (material combustible), mientras que la segunda se acerca a la primera de forma paralela (frente de llama), provocando que el flujo de calor radiativo incidente aumente en la placa fija. Notar que no interesa la distancia que recorra la segunda placa sino que solo interesa la forma con la cuál el flujo varía con el paso del tiempo, producto de la proximidad del fuego.

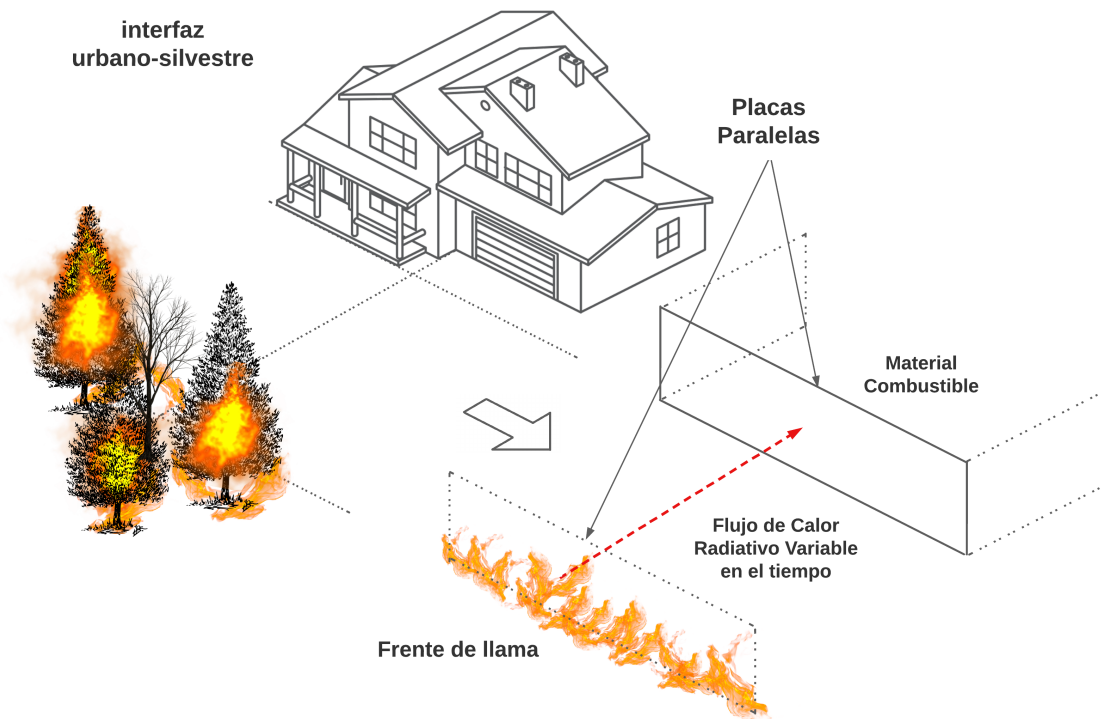


Figura 3.1: Representación simplificada del contexto físico del problema a resolver.

A modo de simplificar el planteamiento del problema y generar un nexo entre estudios similares, la caracterización del fenómeno de calentamiento se esquematiza en la Figura 3.2. El objetivo es replicar los típicos aparatos calorimétricos a escala de banco empleados para probar diferentes tipos de materiales (Tewarson, 2002). Así, para el desarrollo del modelo matemático se consideran los siguientes supuestos:

- I) La transferencia de calor por conducción y radiación al interior del sólido es unidimensional en la dirección z .
- II) El enfoque de la solución se basa en la temperatura promedio espacial al interior del medio $\bar{T}$, sobre el camino libre promedio de la radiación δ , basado en el método integral (Hahn y Özisik,

2012).

- III) El medio permanece inerte durante todo el proceso de calentamiento hasta que se logra la ignición (Reszka et al., 2012; Mindykowski et al., 2011; Lamorlette, 2014). Ésta suposición se ve apoyada por la observación de que la pirólisis del combustible es un proceso de alta energía de activación que se modela comúnmente por una ley de Arrhenius, y por lo tanto la descomposición del combustible muestra una tasa de reacción insignificante hasta que la temperatura de la superficie se acerca a la temperatura de ignición.
- IV) La ignición ocurre cuando la temperatura promedio del medio alcanza una temperatura de ignición $\bar{T}_{ig}$, que se estima a partir de datos experimentales Torero (2015).
- v) La divergencia del flujo de calor radiativo está modelada por la aproximación de Schuster-Schwarzschild (Modest, 2013), para radiación isotrópica y un medio no dispersante.

La ecuación general de conservación de energía para el medio participativo es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = k \nabla^2 T - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'', \quad (3.1)$$

Donde $h = \int_{T_{\infty}}^T c_p dT$ es la entalpía sensible y $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$ es la divergencia del flujo de calor radiativo por unidad de área. T se establece como una temperatura espacial promedio:

$$\bar{T} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{\delta} T dz dy dx}{\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{\delta} dz dy dx}. \quad (3.2)$$

Luego, considerando el supuesto 1) el operador $(1/\delta) \int_0^{\delta} dz$ se aplica en ambos lados de Ecuación 3.1 conduciendo a propiedades promediadas espacialmente para el medio de la siguiente manera:

$$(\rho c_p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \left[\left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\delta} - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} \right] - \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \nabla_z \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'', \quad (3.3)$$

donde $\nabla_z \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$ es la divergencia en la dirección z del vector de flujo de calor radiativo por unidad de área $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$. Con este procedimiento, la ecuación de la energía es mucho más fácil de resolver analíticamente, ya que la dependencia espacial se agrupa en una única temperatura promedio $\bar{T}$, sin dejar de tener en cuenta las contribuciones de la conducción y la radiación dentro del material. Al establecer las propiedades del medio promediadas espacialmente, se utiliza el espesor de penetración radiativo sobre el conductivo, de acuerdo con la aplicación de la divergencia del flujo de calor radiativo.

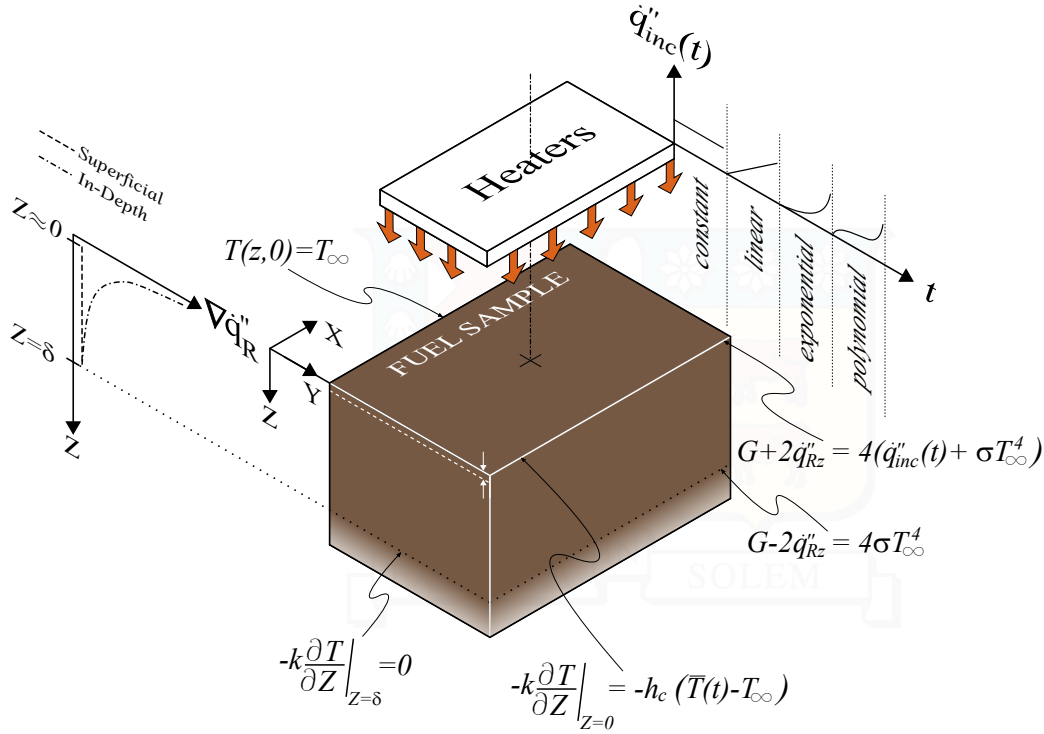


Figura 3.2: Representación de los fenómenos físicos, llevado a escala experimental, para un sólido inerte unidimensional expuesto a un flujo de calor incidente variable en el tiempo, con pérdidas convectivas y radiativas en la superficie.

3.3. Divergencia del flujo de calor radiativo

La divergencia del término radiativo en Ecuación 3.3 se trata mediante la aproximación de Schuster-Schwarzschild para dos placas paralelas (Modest, 2013), basada en el supuesto v).

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I^+}{\partial z} + I^+ = (1 - \omega) I_b(T) + \frac{\omega}{2} (I^- + I^+); \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial I^-}{\partial z} + I^- = (1 - \omega) I_b(T) + \frac{\omega}{2} (I^- + I^+), \quad (3.5)$$

donde ω es el albedo de dispersión simple y I^+ , I^- son la intensidad de la radiación en los hemisferios superior e inferior, respectivamente. El RTE se resuelve en un sistema de ecuaciones que se define como se explica en la sección 2.5, generando las siguientes ecuaciones y condiciones de borde (cf.

Figura 3.2),

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -4\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''}{\partial z} = 4\pi I_b(T) - G; \quad (3.7)$$

$$z = 0 : \quad G + 2\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' = 4(\dot{q}_{inc}''(t) + \sigma T_{\infty}^4); \quad (3.8)$$

$$z = \delta : \quad G - 2\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' = 4\sigma T_{\infty}^4, \quad (3.9)$$

Donde $\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''/\partial z = \nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$ y $G = G(z)$ es la radiación incidente local en la dirección z . Diferenciando Ecuación 3.7 con respecto a z y combinarlo con Ecuación 3.6, conduce a:

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''}{\partial z^2} = -\frac{\partial G}{\partial z} = -4\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''. \quad (3.10)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' = C_1 e^{2\kappa z} + C_2 e^{-2\kappa z}. \quad (3.11)$$

De las condiciones de contorno presentes en la Ecuación 3.8 y Ecuación 3.9, con $G = 4\pi I_b - \partial q_{R_z}/\partial z$ los valores de las constantes C_1 y C_2 se encuentran,

$$C_1 = \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) e^{-2\kappa \delta}, \quad (3.12)$$

$$C_2 = -\sigma (T^4 - T_{\infty}^4) + \dot{q}_{inc}''(t). \quad (3.13)$$

Entonces, la solución particular para la divergencia del flujo de calor radiativo se expresa como:

$$\nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' = 2\sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \left(e^{-2\kappa(\delta-z)} + e^{-2\kappa z} \right) - 2\dot{q}_{inc}''(t) e^{-2\kappa z}. \quad (3.14)$$

Aplicando $(1/\delta) \int_0^{\delta} dz$ a ambos lados de la Ecuación 3.14 bajo el supuesto 1), la divergencia del flujo de calor radiativo se puede expresar en términos de las propiedades promediadas en el espacio de Ecuación 3.3,

$$\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' dz = -\frac{a_b}{\delta} \dot{q}_{inc}''(t) + \frac{2a_b}{\delta} \sigma (\bar{T}^4 - T_{\infty}^4), \quad (3.15)$$

Donde $a_b = (1 - e^{-2\kappa \delta})$ es la absorptividad del medio.

3.4. Modelo promediado espacialmente

Para resolver el balance energético de Ecuación 3.3, se establecen las siguientes condiciones iniciales y de borde en términos de variables promediadas en el espacio:

$$t = 0 : \quad \bar{T}(0) = T_{\infty}; \quad (3.16)$$

$$z = 0 : \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -h_c (\bar{T}(t) - T_{\infty}). \quad (3.17)$$

Se considera una condición de borde adiabática en la superficie inferior ($z = \delta$). Se considera que cualquier sección del combustible que esté fuera del rango del espesor de penetración de radiación δ tiene una temperatura ambiente T_{∞} .

Se debe notar que solo se consideran las pérdidas convectivas sobre la superficie superior ($z = 0$) porque se considera que la radiación incidente y las pérdidas radiativas se absorben en todo el volumen del medio, por lo que estos efectos se incluyen en la Ecuación 3.8. Aplicando las condiciones mencionadas al término conductivo de la Ecuación 3.3 y usando la divergencia del flujo de calor radiativo presentado en la Ecuación 3.15, se puede obtener una ecuación general para la temperatura promedio:

$$(\rho c_p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{\delta} (-h_c (\bar{T} - T_{\infty})) + \frac{a_b}{\delta} \dot{q}_{inc}''(t) - \frac{2a_b}{\delta} \sigma (\bar{T}^4 - T_{\infty}^4). \quad (3.18)$$

Ecuación 3.18 tiene la forma de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal conocida como ecuación de Chini ([Chini, 1924](#)). Su solución analítica solo se puede obtener de forma implícita, por lo que una solución exacta solo se puede obtener numéricamente. A continuación, como un camino alternativo se presentará una solución aproximada de esta EDO tal y como se desarrolló en ([Rivera et al., 2020](#)).

3.5. Modelo aproximado

La aproximación de Taylor se aplica para el término no lineal $\bar{T}^4$ alrededor de la temperatura ambiente T_{∞} , para hacer que Ecuación 3.18 sea una EDO lineal. Luego, agrupando términos en coeficientes $b_1 = a_b/\delta$ y $b_2 = (8a_b\sigma T_{\infty}^3 + h_c)/\delta$ produce,

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = b_1 \dot{q}_{inc}''(t) - b_2 (\bar{T} - T_{\infty}). \quad (3.19)$$

Notar que la ecuación de energía en esta forma se puede resolver fácilmente para cualquier función del flujo de calor incidente. Si bien se determinan las soluciones, el enfoque seguido en este trabajo desarrolla

también las correlaciones para datos obtenidos experimentalmente, que conducen a la obtención de propiedades efectivas del material estudiado.

3.6. Soluciones para flujos de calor incidente variables en el tiempo

El procedimiento matemático propuesto en este trabajo no se limita a un flujo incidente de calor constante o una función específica variable en el tiempo. El problema se puede resolver para cualquier función $\dot{q}_{inc}''(t)$, ya que solo es necesario resolver la ecuación diferencial de primer orden a partir de las ecuaciones 3.18 y 3.19 para los enfoques exacto y aproximado respectivamente. Por lo tanto, se desarrollarán varios casos como los enumerados anteriormente. Debe notarse que las diferentes configuraciones físicas del problema significan que la función temporal que representa la variación en el flujo radiativo incidente deberá tomar otras formas en consecuencia, como se ve en (Kelley, 1975). Las soluciones de la Ecuación 3.19 se obtuvieron mediante transformadas de Laplace, lo cual no impide que otros métodos de resolución puedan ser utilizados.

3.6.1. Caso constante ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0''$)

Para un flujo de calor incidente constante, reemplazando el flujo de calor radiativo incidente en la Ecuación 3.19, ésta se convierte en,

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = b_1 \dot{q}_0'' - b_2 (\bar{T} - T_\infty). \quad (3.20)$$

Utilizando las transformaciones de Laplace mostradas en la Tabla 2.1, se pueden reconocer los siguientes cambios,

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{L}_t [\bar{T}] &= \bar{T}^* & \blacksquare \mathcal{L}_t [t] &= \frac{1}{s^2} \\ \blacksquare \mathcal{L}_t \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right] &= s\bar{T}^* - T_\infty & \blacksquare \mathcal{L}_t [b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''] &= \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{s} \end{aligned}$$

Aplicando estos cambios a la Ecuación 3.20, se obtiene la ecuación diferencial en el espacio Laplaciano quedando como sigue,

$$\rho c_p (s\bar{T}^* - T_\infty) = -b_2 \bar{T}^* + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{s} \quad (3.21)$$

Despejando la temperatura promedio en el espacio Laplaciano se logra,

$$\bar{T}^* = \frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} + \frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.22)$$

Luego se debe aplicar la transformada inversa de Laplace, utilizando lo señalado en la Tabla 2.1 y el teorema de la convolución señalado en la Ecuación 2.41, siguiendo este proceso paso a paso a continuación,

$$\mathcal{L}_t^{-1} [\bar{T}^*] = \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \right] + \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s} \right] \quad (3.23)$$

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p}\right)} d\mu \quad (3.24)$$

resolviendo las integrales definidas se tiene,

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)}}{\frac{b_2}{\rho c_p}} \right) \quad (3.25)$$

Desarrollando y expandiendo todos los términos se consigue,

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \left(T_\infty + \frac{b_1 \dot{q}_0''}{b_2} \right) \left(1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} \right) \quad (3.26)$$

Finalmente al simplificar términos y volviendo a los parámetros originales,

$$\bar{T}(t) = T_\infty + \frac{a_b \dot{q}_0''}{h_T} \left(1 - e^{-\frac{h_T}{\delta \rho c_p} t} \right), \quad (3.27)$$

donde $h_T = (8a_b \sigma T_\infty^3 + h_c)$ es un coeficiente de transferencia de calor combinado en el medio. Notar que en Mindykowski et al. Desarrollaron un problema físico similar. (Mindykowski et al., 2011), para un flujo de calor constante en un lecho de combustible poroso. En ese trabajo, si la fracción de volumen del combustible sólido se establece en la unidad, el medio no tiene porosidad y se obtiene la misma solución que en este estudio.

3.6.2. Caso lineal ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0'' + rt$)

El flujo de calor de crecimiento lineal es el caso más simple de variación en el tiempo. El flujo de calor inicial es $\dot{q}_0''$ y la rampa impuesta es r . Reemplazando la función lineal del flujo de calor radiativo incidente en la Ecuación 3.19 se obtiene lo siguiente,

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = b_1(\dot{q}_0'' + rt) - b_2(\bar{T} - T_\infty). \quad (3.28)$$

Utilizando las transformaciones de Laplace mostradas en la Tabla 2.1, se pueden reconocer los mismos cambios que para el caso constante presentado en la sección anterior 3.6.1. Aplicando estos cambios a la Ecuación 3.28, se obtiene la ecuación diferencial en el espacio Laplaciano queda como sigue,

$$\rho c_p(s\bar{T}^* - T_\infty) = -b_2\bar{T}^* + \frac{b_1 r}{s^2} + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{s} \quad (3.29)$$

Despejando la temperatura promedio en el espacio Laplaciano se logra,

$$\bar{T}^* = \frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} + \frac{\left(\frac{b_1 r}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.30)$$

Luego se debe aplicar la transformada inversa de Laplace, utilizando lo señalado en la Tabla 2.1 y el teorema de la convolución señalado en la Ecuación 2.41, siguiendo este proceso paso a paso a continuación,

$$\mathcal{L}_t^{-1}[\bar{T}^*] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)}\right] + \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{\left(\frac{b_1 r}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s^2}\right] + \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s}\right] \quad (3.31)$$

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_1 r}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p}\right)} \cdot (t - \mu) d\mu + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p}\right)} d\mu \quad (3.32)$$

resolviendo las integrales definidas se tiene,

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_1 r}{\rho c_p} \left(\frac{\frac{b_2 t}{\rho c_p} + e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} - 1}{\left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)^2} \right) + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)}}{\frac{b_2}{\rho c_p}} \right) \quad (3.33)$$

Desarrollando y expandiendo todos los términos se consigue,

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_1 r t}{b_2} + \frac{b_1 r \rho c_p}{(b_2)^2} e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} - \frac{b_1 r \rho c_p}{(b_2)^2} + \left(T_{\infty} + \frac{b_1 \dot{q}_0''}{b_2}\right) \left(1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)}\right) \quad (3.34)$$

Finalmente al simplificar términos y recordando que los coeficientes son $b_1 = a_b/\delta$ y $b_2 = h_T/\delta$, se obtiene la solución para la temperatura promedio en el medio variable en el tiempo para un flujo incidente con un incremento lineal en el tiempo,

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b}{h_T} \left(r t + \left(\dot{q}_0'' - \frac{\delta r \rho c_p}{h_T} \right) \left(1 - e^{-\frac{h_T}{\delta \rho c_p} t} \right) \right). \quad (3.35)$$

3.6.3. Caso exponencial ($\dot{q}_{inc}''(t) = \dot{q}_0'' e^{bt}$)

El caso exponencial se presenta con los parámetros b (s^{-1}) como la razón de variación exponencial y $\dot{q}_0''$ como el flujo de calor radiativo inicial en $t = 0$. Reemplazando el flujo de calor radiativo incidente con crecimiento exponencial en la Ecuación 3.19, ésta se convierte en,

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = b_1 \dot{q}_0'' e^{bt} - b_2 (\bar{T} - T_{\infty}). \quad (3.36)$$

Utilizando las transformaciones de Laplace mostradas en la Tabla 2.1, se pueden reconocer transformaciones distintas a la de los casos anteriores, las cuales son,

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{L}_t [\bar{T}] &= \bar{T}^* & \blacksquare \mathcal{L}_t [e^{bt}] &= \frac{1}{s-b} \\ \blacksquare \mathcal{L}_t \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right] &= s \bar{T}^* - T_{\infty} & \blacksquare \mathcal{L}_t [b_2 T_{\infty}] &= \frac{b_2 T_{\infty}}{s} \end{aligned}$$

Aplicando estos cambios a la Ecuación 3.36, se obtiene la ecuación diferencial en el espacio Laplaciano queda como sigue,

$$\rho c_p (s \bar{T}^* - T_{\infty}) = -b_2 \bar{T}^* + \frac{b_1 \dot{q}_0''}{s-b} + \frac{b_2 T_{\infty}}{s} \quad (3.37)$$

Despejando la temperatura promedio en el espacio Laplaciano se logra,

$$\bar{T}^* = \frac{T_{\infty}}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} + \frac{\left(\frac{b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s-b} + \frac{\left(\frac{b_2 T_{\infty}}{\rho c_p}\right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p}\right)} \cdot \frac{1}{s} \quad (3.38)$$

Luego se debe aplicar la transformada inversa de Laplace, utilizando lo señalado en la Tabla 2.1

y el teorema de la convolución señalado en la Ecuación 2.41, siguiendo este proceso paso a paso a continuación,

$$\mathcal{L}_t^{-1} [\bar{T}^*] = \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \right] + \left[\frac{\left(\frac{b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s - b} \right] + \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{b_2 T_\infty}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s} \right] \quad (3.39)$$

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)} + \frac{b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p} \right)} e^{b(t-\mu)} d\mu + \frac{b_2 T_\infty}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p} \right)} d\mu \quad (3.40)$$

resolviendo las integrales definidas se tiene,

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)} + \frac{b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \left(\frac{e^{bt} - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)}}{\frac{b_2}{\rho c_p} + b} \right) + \frac{b_2 T_\infty}{\rho c_p} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)}}{\frac{b_2}{\rho c_p}} \right) \quad (3.41)$$

Desarrollando y expandiendo todos los términos se consigue,

$$\bar{T}(t) = T_\infty e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)} - \frac{b_1 \dot{q}_0'' e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)}}{b_2 + b \rho c_p} + \frac{b_1 \dot{q}_0'' e^{bt}}{b_2 + b \rho c_p} + T_\infty \left(1 - e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p} \right)} \right) \quad (3.42)$$

Finalmente al simplificar términos y volviendo a los parámetros originales con $b_1 = a_b/\delta$ y $b_2 = h_T/\delta$, se logra la siguiente solución,

$$\bar{T}(t) = T_\infty + \frac{a_b \dot{q}_0''}{(h_T + b \delta \rho c_p)} \left(e^{bt} - e^{-\frac{h_T}{\delta \rho c_p} t} \right). \quad (3.43)$$

Se debe notar que si el coeficiente b es $b = 0$ en el caso exponencial, la solución es equivalente al caso constante en la sección 3.6.1.

3.6.4. Caso polinomial ($\dot{q}_{inc}''(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2 + \dots + d_{N+1} t^N$)

El flujo de calor de crecimiento polinomial es el caso más complejo de variación en el tiempo, ya que en teoría la función podría tener una gran cantidad de términos que dificultan la obtención de una expresión manejable de forma manual, sin embargo, es sensato darle algún orden de magnitud al polinomio que se quiera representar. En este estudio se entregará la solución para un polinomio cualquiera de grado N , para no encasillar el modelo en un caso específico desde su inicio. Si bien en los casos anteriores el flujo de calor inicial es $\dot{q}_0''$, en este caso será nombrado como d_1 para poder ordenar

de mejor forma el polinomio. Los coeficiente polinomiales que acompañarán las distintas potencias del tiempo se reconocen como $d_2, d_3, \dots, d_{N+1}$, pudiendo tener valores positivos o negativos. Reemplazando la función polinomial del flujo de calor radiativo incidente en la Ecuación 3.19 se obtiene lo siguiente,

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -b_2 (\bar{T} - T_\infty) + b_1 (d_1 + d_2 t + d_3 t^2 + \dots + d_{N+1} t^N) \quad (3.44)$$

Utilizando las transformaciones de Laplace mostradas en la Tabla 2.1, se pueden reconocer los mismos cambios que para el caso constante presentado en la sección anterior 3.6.1, pero se agregan algunos nuevos, estos son,

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathcal{L}_t [\bar{T}] &= \bar{T}^* & \blacksquare \mathcal{L}_t [t] &= \frac{1}{s^2} \\ \blacksquare \mathcal{L}_t \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right] &= s\bar{T}^* - T_\infty & \blacksquare \mathcal{L}_t [t^2] &= \frac{2}{s^3} \dots \\ \blacksquare \mathcal{L}_t [b_2 T_\infty + b_1 d_1] &= \frac{b_2 T_\infty + b_1 d_1}{s} & \blacksquare \mathcal{L}_t [t^3] &= \frac{N!}{s^{N+1}} \end{aligned}$$

Aplicando estos cambios a la Ecuación 3.44, se obtiene la ecuación diferencial en el espacio Laplaciano queda como sigue,

$$\rho c_p (s\bar{T}^* - T_\infty) = -b_2 \bar{T}^* + \frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{s} + \frac{b_1 d_2}{s^2} + \frac{2b_1 d_3}{s^3} + \frac{6b_1 d_4}{s^4} + \dots + \frac{N! b_1 d_{N+1}}{s^{N+1}} \quad (3.45)$$

Despejando la temperatura promedio en el espacio Laplaciano se logra,

$$\bar{T}^* = \frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} + \frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\left(\frac{b_1 d_2}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{\left(\frac{2b_1 d_3}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{\left(\frac{N! b_1 d_{N+1}}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^{N+1}} \quad (3.46)$$

Luego se debe aplicar la transformada inversa de Laplace, utilizando lo señalado en la Tabla 2.1 y el teorema de la convolución señalado en la Ecuación 2.41, siguiendo este proceso paso a paso a continuación,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{-1} [\bar{T}^*] &= \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{T_\infty}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \right] + \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{b_2 T_\infty + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{b_1 d_2}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] \\ &+ \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{2b_1 d_3}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^3} \right] + \dots + \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\left(\frac{N! b_1 d_{N+1}}{\rho c_p} \right)}{s + \left(\frac{b_2}{\rho c_p} \right)} \cdot \frac{1}{s^{N+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\bar{T}(t) = T_{\infty} e^{-\left(\frac{b_2 t}{\rho c_p}\right)} + \frac{b_2 T_{\infty} + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2 \mu}{\rho c_p}\right)} d\mu + \frac{b_1 d_2}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2(t-\mu)}{\rho c_p}\right)} \cdot \mu d\mu \\ + \frac{b_1 d_3}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2(t-\mu)}{\rho c_p}\right)} \cdot \mu^2 d\mu + \dots + \frac{b_1 d_{N+1}}{\rho c_p} \int_0^t e^{-\left(\frac{b_2(t-\mu)}{\rho c_p}\right)} \cdot \mu^N d\mu\end{aligned}\quad (3.48)$$

resolviendo las integrales definidas se tiene,

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} e^{-(at)} + \frac{b_2 T_{\infty} + b_1 \dot{q}_0''}{\rho c_p} \left(\frac{1 - e^{-(at)}}{a} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{b_1 d_{i+1}}{\rho c_p} \left(\frac{(-1)^{i+1} i! e^{-at} + \sum_{n=0}^i \frac{(-1)^n i!}{(i!-n)} (at)^{i-n}}{a^{i+1}} \right)\quad (3.49)$$

Con $a = b_2/\rho c_p$. Desarrollar y expandir el término para un polinomio de grado N resulta engorroso y extenso, por lo tanto, a modo de ejemplificación en este estudio se expandirá considerando un polinomio de grado 5, con el fin de que el lector pueda apreciar la lógica detrás del paso final para obtener una expresión de la temperatura para un polinomio de grado N .

$$\begin{aligned}\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{b_1}{\rho c_p} \left[\left(\frac{d_1}{a} - \frac{d_2}{a^2} + \frac{2d_3}{a^3} - \frac{6d_4}{a^4} + \frac{24d_5}{a^5} - \frac{120d_6}{a^6} \right) \cdot (1 - e^{-at}) \right. \\ \left(\frac{d_2}{a} - \frac{2d_3}{a^2} + \frac{6d_4}{a^3} - \frac{24d_5}{a^4} + \frac{120d_6}{a^5} \right) \cdot t + \left(\frac{d_3}{a} - \frac{3d_4}{a^2} + \frac{12d_5}{a^3} - \frac{60d_6}{a^4} \right) \cdot t^2 \\ \left. \left(\frac{d_4}{a} - \frac{4d_5}{a^2} + \frac{20d_6}{a^3} \right) \cdot t^3 + \left(\frac{d_5}{a} - \frac{5d_6}{a^2} \right) \cdot t^4 + \left(\frac{d_6}{a} \right) \cdot t^5 \right]\end{aligned}\quad (3.50)$$

Donde se observa un patrón en las potencias del tiempo y en la estructura de cada coeficiente que lo acompaña. Finalmente al simplificar términos y recordando que los coeficientes son $b_1 = a_b/\delta$ y $b_2 = h_T/\delta$, se obtiene la solución para un polinomio de orden N , ésta se puede expresar como,

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b}{\delta \rho c_p} \left[\Pi_0 \left(1 - e^{-\frac{h_T}{\delta \rho c_p} t} \right) + \Pi_1 \cdot t + \Pi_2 \cdot t^2 + \Pi_3 \cdot t^3 + \Pi_4 \cdot t^4 + \Pi_5 \cdot t^5 + \dots \right]\quad (3.51)$$

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b}{\delta \rho c_p} \left(-\Pi_0 e^{-\frac{h_T}{\delta \rho c_p} t} + \sum_{i=0}^N \Pi_i t^i \right)\quad (3.52)$$

En la expresión anterior, los términos Π_i con $i = 0, 1, 2, \dots, N$ son los coeficientes polinomiales agrupados en forma de sumatorios definidas, que pueden extenderse a polinomios de cualquier orden:

$$\Pi_i = \frac{d_{i+1}}{a} + \sum_{n=2}^{N+1-i} \frac{(-1)^{n-1} d_{i+n} (n+i-1)!}{a^n i!},\quad (3.53)$$

con $a = h_T/\delta \rho c_p$. Es importante tener en cuenta que hacer $d_1 = \dot{q}_0''$, $d_2 = r$ y $d_3 = d_4 = \dots = d_{N+1} = 0$,

Ecuación 3.52 genera la solución para un flujo incidente lineal desarrollado en la sección 3.6.2. Esto es significativo porque muestra la consistencia del modelo para todos los casos derivados.

Se debe recordar que en un sumatorio, cuando el valor máximo representado en la parte superior del símbolo, es menor que el índice inicial con el cual parte la suma, se considera que el sumatorio en su totalidad es igual a cero.

3.7. Tiempo de retardo de ignición

Es necesaria una forma de correlacionar los datos de ignición experimentales. Para lograr esto, se debe estimar un valor para la temperatura de ignición. Debido al desarrollo del modelo, la forma más conveniente de lograr este objetivo es utilizar el criterio de flujo de calor crítico tratado por varios autores (Delichatsios et al., 1991; Janssens, 1991; Rivera et al., 2020; Mindykowski et al., 2019; Spearpoint y Quintiere, 2001). La definición de una temperatura de ignición permite el uso de correlaciones de forma t vs. $\dot{q}''$. La estimación del tiempo de ignición requiere la definición de una temperatura de ignición arbitraria, que suele definirse como una temperatura superficial crítica. Sin embargo, dado que la ecuación de calor se ha definido para una temperatura promedio en el volumen del medio, se definirá una temperatura promediada espacialmente para la ignición. Con el flujo de calor crítico como el flujo de calor constante más bajo en el que la temperatura alcanza a T_{ig} después de una exposición infinitamente larga. Si bien se puede obtener un método de solución numérica a partir de la ecuación 3.18 estableciendo el lado izquierdo de la ecuación como cero, también es posible obtener una solución analítica aproximada considerando que, de manera general, si la temperatura de pirólisis del material es superior a 300 °C, las pérdidas radiativas representan $\sim 80\%$ de las pérdidas para una configuración horizontal (Delichatsios et al., 1991), por lo que es posible despreciar las pérdidas por convección en la Ecuación 3.18 produciendo,

$$\bar{T}_{ig} = \left(\frac{\dot{q}_{cri}''}{2\sigma} + T_{\infty}^4 \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.54)$$

A continuación se presentan las correlaciones para el tiempo de retardo de encendido para cada caso estudiado. Todas las soluciones se resumen en Tabla 3.1.

3.7.1. Caso constante

Con la temperatura de ignición de la Ecuación 3.54, el tiempo de retardo de ignición se puede obtener directamente con la Ecuación 3.27 siendo,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{h_T}{\delta\rho c_p} \frac{1}{\ln(a_b\dot{q}_0'') - \ln(a_b\dot{q}_0'' - \bar{\theta}_{ig}h_T)}. \quad (3.55)$$

Otra opción es seguir el desarrollo estándar para tiempos de encendido cortos (Quintiere, 2006), tomando Ecuación 3.27 y expandiendo el término exponencial con una serie de Taylor de primer orden alrededor de $t = 0$. Esto produce una solución para la diferencia de temperatura $\bar{\theta}(t) = \bar{T}(t) - T_\infty$,

$$\bar{\theta}(t) \approx \frac{a_b \dot{q}_0'' t}{\delta \rho c_p}. \quad (3.56)$$

Esta solución es una función lineal de t y, por lo tanto, puede correlacionarse siguiendo la forma estándar para materiales térmicamente delgados (Mikkola y Wichman, 1989). Consulte Tabla 3.1 para conocer todas estas soluciones. En el encendido, $\bar{\theta}_{ig} = \bar{T}_{ig} - T_\infty$, y la inversa del retardo del tiempo de encendido se puede expresar como:

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{a_b \dot{q}_0''}{\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}}. \quad (3.57)$$

3.7.2. Caso lineal

En Ecuación 3.35, se puede usar una serie de Taylor de segundo orden alrededor de $t = 0$ en el término exponencial para aproximar la temperatura de la siguiente manera:

$$\bar{\theta}(t) \approx \frac{a_b}{2\delta \rho c_p} \left(\dot{q}_0''(t)t + \dot{q}_{inc}''t - \frac{h_T}{\delta \rho c_p} \dot{q}_0''t^2 \right). \quad (3.58)$$

Una temperatura de referencia transitoria $\theta_r(t) = (\dot{q}_0''/\delta \rho c_p) \cdot t$ se define en un enfoque similar al de Reszka et al. (Reszka et al., 2012). Esta temperatura de referencia se define en términos del flujo de calor inicial impuesto sobre el medio. Insertando $\theta_r(t)$ y reordenando Ecuación 3.58,

$$\bar{\theta}(t) = \frac{a_b}{2\delta \rho c_p} (\dot{q}_0'' + \dot{q}_{net}''(t)) t \quad (3.59)$$

en donde el término $\dot{q}_{net}''(t) = \dot{q}_{inc}''(t) - \theta_r(t)h_T$ puede interpretarse como un flujo de calor neto sobre el medio. Notar nuevamente la relación lineal con t . Luego,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{a_b}{2\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}} (\dot{q}_0'' + \dot{q}_{net}''(t_{ig})). \quad (3.60)$$

3.7.3. Caso exponencial

Como en el caso constante, el tiempo de encendido se puede obtener analíticamente de Ecuación 3.43 asumiendo que $\dot{q}_0'' e^{bt} = \dot{q}_{inc}''(t)$, dando,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{h_T}{\delta \rho c_p} \frac{1}{\ln(a_b \dot{q}_0'') - \ln(a_b \dot{q}_{inc}''(t_{ig}) - \bar{\theta}_{ig}(h_T + b\delta \rho c_p))} \quad (3.61)$$

este resultado se acerca a la solución del caso constante, en Ecuación 3.55 cuando b es cero. Sin embargo, no se puede resolver analíticamente, para ello se debe despreciar el segundo término exponencial de la 3.43, ya que es un valor pequeño comparado con el primer término, al despejar el tiempo de ignición bajo este escenario, obtenemos,

$$\frac{1}{t_{ig}} = b \frac{1}{\ln(\bar{\theta}_{ig} (h_T + b\delta\rho c_p)) - \ln(a_b \dot{q}_0'')}. \quad (3.62)$$

Nuevamente, otra opción, de una manera más estándar, es tomar una serie de Taylor de segundo orden alrededor de $t = 0$ sobre el segundo término exponencial en la Ecuación 3.43 para reescribir la temperatura promedio como,

$$\bar{\theta}(t) = \frac{a_b}{(h_T + b\delta\rho c_p)} \left(\dot{q}_{inc}''(t) - \dot{q}_0'' + \theta_r(t) h_T \left(1 - \frac{h_T}{2\delta\rho c_p} t \right) \right). \quad (3.63)$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la Ecuación 3.59. La inversa del tiempo de retardo de encendido es,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{a_b}{2\delta\rho c_p} \cdot \left(\frac{h_T^2 \theta_r(t_{ig})}{a_b(\dot{q}_{inc}''(t_{ig}) - \dot{q}_0'' + h_T \theta_r(t_{ig})) - \bar{\theta}_{ig}(h_T + b\delta\rho c_p)} \right). \quad (3.64)$$

3.7.4. Caso polinomial

La forma de la solución del caso del polinomio hace que sea difícil aislar analíticamente el tiempo de retardo de ignición debido a las diferentes potencias de t_{ig} en el polinomio. Por lo tanto, la relación para el tiempo de retardo de ignición solo se obtendrá para $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_3 t^2$. La temperatura promediada espacialmente sobre el medio es:

$$\bar{\theta} = \frac{a_b}{\delta\rho c_p} \left(\left(\frac{d_1}{a} + \frac{2d_3}{a^3} \right) (1 - e^{-at}) - \frac{2d_3}{a^2} t + \frac{d_3}{a} t^2 \right). \quad (3.65)$$

Al aplicar una expansión de la serie de Taylor de tercer orden al término exponencial y simplificar, se obtiene,

$$\bar{\theta} = \frac{a_b}{\delta\rho c_p} \left(\frac{2d_1}{3} t + \frac{\dot{q}_{inc}''(t)}{3} - \frac{d_1}{2\delta\rho c_p} h_T t^2 + \frac{d_1}{2(\delta\rho c_p)^2} h_T^2 t^3 \right). \quad (3.66)$$

Entonces, se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{1}{t_{ig}} = \frac{a_b}{\delta\rho c_p \bar{\theta}_{ig}} \left(\frac{2d_1}{3} + \frac{\dot{q}_{inc}''(t_{ig})}{3} - \frac{\theta_r(t_{ig}) h_T}{2} + \frac{(\theta_r(t_{ig}) h_T)^2}{6d_1} \right). \quad (3.67)$$

Hay que tener en cuenta que aunque se utilice la función $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_3 t^2$ para obtener un resultado analítico, también se pueden utilizar polinomios de otros órdenes para obtener una expresión del tiempo de ignición de forma semi-analítica, calculando el tiempo en el que la temperatura alcanza

el valor definido para la ignición. Notar que en todos los casos de la sucesión: constante, lineal y polinomial (potencia cuadrática de t_{ig}), el orden de la aproximación de la serie de Taylor aumenta en uno. Utilizando potencias superiores de t_{ig} , se obtiene una mayor precisión en la aproximación de Taylor, sin que sea imposible obtener una expresión analítica para el tiempo de retardo de ignición.

3.8. Creación de código

Se escribió un código en Python 3.9.5 para automatizar la obtención de resultados del modelo con el fin de poder comparar resultados numéricos exactos y analíticos aproximados para distintos tipos de flujos de calor incidente y para diferentes penetraciones de la radiación en el material. El código permite:

1. Calcular la temperatura del material en el tiempo, para todo el proceso de calentamiento, utilizando las ecuaciones de la sección 3.6.
2. Calcular la temperatura crítica de ignición usando la Ecuación 3.54 para la versión analítica aproximada y la Ecuación 3.18 para la versión numérica, donde el lado izquierdo se hace cero considerando que la variación de temperatura para un tiempo suficientemente largo se hace despreciable cuando se llega al punto de ignición.
3. Obtener el tiempo de retardo de ignición y su inverso desde las ecuaciones de la Sección 3.7.
4. Obtener relaciones del tipo $t_{ig}^{-1/n}$ vs $\dot{q}_{inc}''$ para cada caso estudiado, incluyendo también versiones adimensionales.
5. Calcular las propiedades efectivas del material.
6. Comparar resultados con los modelos de referencia en cada caso.

El código para las soluciones exactas (semi-analíticas) utiliza los métodos numéricos descritos anteriormente en el marco teórico, particularmente en la Sección 2.10. Utilizando el método de Runge-Kutta (RK4) para resolver la ecuación de Chini (EDO presente en la Ecuación 3.18). Para resolver numéricamente el tiempo de retardo en la ignición, se interceptan la función de temperatura obtenida desde la ecuación de Chini y la recta de temperatura de ignición, utilizando el método de Newton. Finalmente para obtener las propiedades efectivas del material, se usa el método de los mínimos cuadrados para ajustar la recta a los datos experimentales o referenciales siguiendo las relaciones del tipo $t_{ig}^{-1/n}$ vs $\dot{q}_{inc}''$.

Los códigos para cada tipo de flujo de radiación incidente variable en el tiempo (constante, lineal, exponencial y polinomial, se presentan en los anexos A.1, A.2, A.3 y A.4 respectivamente. Los códigos

Tabla 3.1: Resumen de soluciones a los diferentes casos aplicados al modelo. * Tenga en cuenta que el flujo polinomial en el inverso del tiempo de retardo de ignición se desarrolló solo para $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_3 t^2$.

Heat flux	Spatially-averaged temperature ($\bar{\theta}(t)$)	Inverse of ignition delay time ($1/t_{ig}$)
Constant $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0''$	$\frac{a_b \dot{q}_0''}{h_T} \left(1 - e^{-\frac{h_T t}{\delta \rho c_p}} \right)$	$\frac{a_b \dot{q}_0''}{\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}}$
Linear $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0'' + r t$	$\frac{a_b}{h_T} \left[\left(\dot{q}_0'' - \frac{\delta r \rho c_p}{h_T} \right) \left(1 - e^{-\frac{h_T t}{\delta \rho c_p}} \right) + r t \right]$	$\frac{a_b}{2 \delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}} (\dot{q}_0'' + \dot{q}_{net}'') (t_{ig})$
Exponential $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0'' e^{b t}$	$\frac{a_b \dot{q}_0''}{(h_T + b \delta \rho c_p)} \left(e^{b t} - e^{-\frac{h_T t}{\delta \rho c_p}} \right)$	$\frac{a_b}{2 \delta \rho c_p} \left(\frac{a_b (\dot{q}_{inc}''(t_{ig}) - \dot{q}_0'')}{h_T^2 \theta_r(t_{ig})} - \frac{\theta_r(t_{ig})}{h_T} - \bar{\theta}_{ig} (h_T + b \delta \rho c_p) \right)$
Polynomial $\dot{q}_{inc}'' = \sum_{i=0}^N d_{i+1} t^i$	$\frac{a_b}{\delta \rho c_p} \left(-\Pi_0 e^{-\frac{h_T t}{\delta \rho c_p}} + \sum_{i=0}^N \Pi_i t^i \right)$	$\frac{a_b}{\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}} \left(\frac{2 d_1}{3} + \frac{\dot{q}_{inc}''(t_{ig})}{3} - \frac{\theta_r(t_{ig})}{2} h_T + \frac{(\theta_r(t_{ig}) h_T)^2}{6 d_1} \right) *$
	$\Pi_i = \frac{d_{i+1}}{a} + \sum_{n=2}^{N+1-i} \frac{(-1)^{n-1} d_{i+n}}{a^n i!} (n+i-1)!$	

presentan la misma lógica de proceso, variando levemente, principalmente en los datos que se ingresan y en los modelos de referencia con los cuales se compara cada caso.





4 | Resultados

4.1. Prueba del modelo

Usando las expresiones disponibles en la literatura y los datos experimentales para PMMA, se probarán las soluciones presentadas anteriormente. Las propiedades utilizadas para este propósito se resumen en Tabla 4.1.

La temperatura de ignición para PMMA se estimó usando la Ecuación 3.54, obteniendo $\bar{T}_{ig} = 639$ K. Para probar la validez del supuesto de pérdidas por convección despreciables, la temperatura de ignición también se calculó directamente a partir de Ecuación 3.18, lo que arrojó un valor de 611 K. Estas pequeñas diferencias ayudan a justificar la suposición hecha en la sección 3.7. Adicionalmente, las temperaturas de ignición están en línea con lo reportado generalmente para PMMA, en el rango entre 602 K y 701 K (Gong et al., 2020; Jiang et al., 2009; Lautenberger y Fernandez-Pello, 2005), a pesar de que el valor utilizado en este trabajo corresponde a un promedio espacial.

Obsérvese que en la Sección 3.6 algunas de las expresiones para el tiempo de retardo de la ignición están implícitas, por lo que no pueden utilizarse directamente para estimar el tiempo de ignición de forma analítica. Sin embargo, para cada flujo de calor variable en el tiempo, esto puede resolverse adoptando simples suposiciones que se explicarán en detalle a continuación.

4.1.1. Caso constante

Los resultados predichos para $\delta = 9,8$ mm se presentan en Figura 4.1. En primer lugar, la evolución de la temperatura para diferentes flujos de calor incidente se presenta en Figura 4.1a. Las temperaturas dadas por la solución exacta de la Ecuación 3.18, también se presentan en esa figura. Las soluciones analíticas aproximadas son más precisas a altos flujos de calor incidente, y por el contrario, el error aumenta al acercarse al flujo de calor incidente crítico. Esto se debe a la linealización del término no lineal que proviene de la divergencia del flujo radiativo de Ecuación 3.18 que asume que $\bar{T}$ siempre está cerca de la temperatura ambiente T_∞ , lo cual es realmente válido para altos flujos de calor incidente. A partir de Figura 4.1a se puede predecir el tiempo de retardo de ignición, notando el momento en que el material alcanza la temperatura de ignición. Se obtienen dos tiempos de retardo de encendido por cada flujo de calor incidente probado, uno para cada una de las temperaturas calculadas, es decir, uno para el caso exacto (611 K) y uno para el caso aproximado (639 K).

Tabla 4.1: Propiedades del material de PMMA y constantes utilizadas en este modelo.

Parámetro	Valores	Referencia.
Densidad, ρ (kg/m ³)	1190	(Jiang et al., 2009)
Calor específico, c_p (J/(kgK))	1680	(Li y Stoliarov, 2013)
Coefficiente convectivo de transferencia de calor., h_c (W/(m ² K))	10	(Jiang et al., 2009)
Conductividad térmica, k (W/(m K))	0.336	(Li y Stoliarov, 2013)
Flujo de calor crítico, $\dot{q}_{cri}''$ (W/m ²)	18000	(Hernández et al., 2019)
Coefficiente de absorción, κ (-)	960.5	(Jiang et al., 2009)
Temperatura ambiente e inicial, T_∞ (K)	300	-

Los resultados del tiempo de retardo en la ignición desde la Ecuación 3.55 se presentan en Figura 4.1b y Figura 4.1c para una amplia gama de flujos de calor constante incidente, donde las soluciones exactas y aproximadas se comparan modelos aproximados similares presentados en (Quintiere, 2006; Mindykowski et al., 2011; Delichatsios, 2000). Todos los parámetros del modelo corresponden a los del material PMMA y son los que se presentan en la Tabla 4.1. Como se esperaba, la solución analítica aproximada (Ec. 3.55) produce los resultados más cercanos en lugar de la solución exacta, ya que los modelos de referencia también son soluciones analíticas aproximadas. El inverso del tiempo de retardo de ignición presenta un comportamiento lineal en todos los modelos. También se puede notar que para flujos de calor constantes de alta incidencia la diferencia entre modelos se reduce en gran medida, siendo consistente con la tendencia observada en los resultados de temperatura. Tenga en cuenta que el flujo de calor crítico para la ignición que se muestra en la Fig. 4.1b se obtuvo desde Hernández et al. (2019).

Para obtener una relación lineal y simple entre el tiempo de ignición y el flujo de calor radiativo, se aplica un procedimiento de escalado. Al normalizar el retardo de ignición a partir del tiempo Ecuación 3.57 y usar condiciones críticas de ignición, se introducen las siguientes variables y parámetros normalizados:

$$\Theta = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_{ig}}; \quad \tau = \frac{\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}}{a_b \dot{q}_{cri}''}; \quad \varphi(t) = \frac{\dot{q}_{inc}''}{\dot{q}_{cri}''}. \quad (4.1)$$

La solución adimensional se puede escribir como $\Theta = \varphi \cdot t/\tau$. cuando nos acercamos al punto de ignición, se convierte en $1 = \varphi \cdot t_{ig}/\tau$, así se forma una relación lineal entre φ y τ/t_{ig} (Figura 4.1d). Una relación equivalente fue utilizada por Mindykowski (Mindykowski et al., 2011) para correlacionar datos experimentales, extraer propiedades efectivas y obtener un camino rápido para predecir el retardo en el tiempo de ignición como sigue:

$$\frac{\tau}{t_{ig}} = \frac{\dot{q}_{inc}''}{\dot{q}_{cri}''}. \quad (4.2)$$

Para validar la generalidad del modelo presentado, se probó también contra modelos de re-

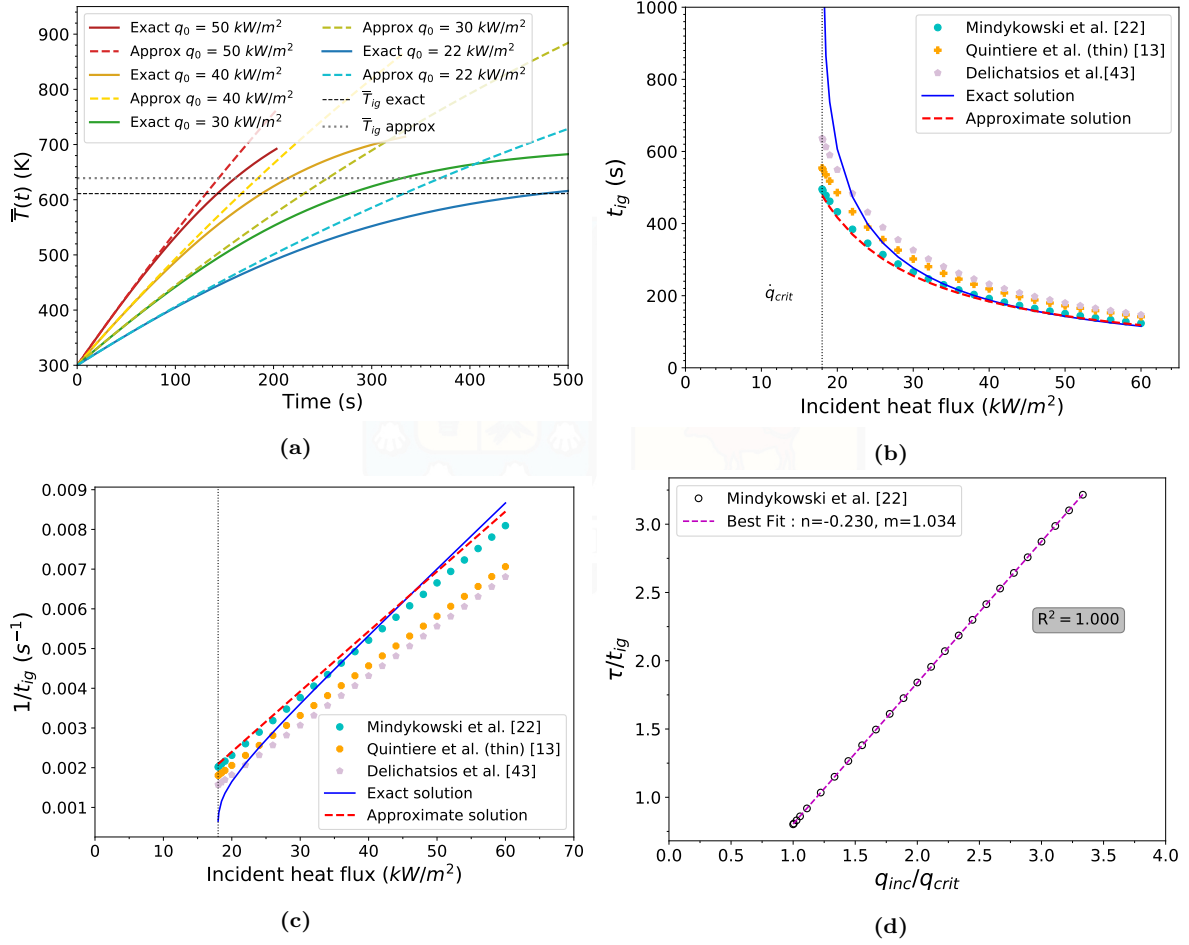


Figura 4.1: Resultados para el caso constante: (a) Evolución temporal de la temperatura media, comparación entre soluciones analíticas exactas y aproximadas. (b) Predicciones del tiempo de retardo de ignición para diferentes modelos disponibles en la literatura y las soluciones analíticas aproximadas y exactas desarrolladas en este documento. (c) Inverso del tiempo de retardo de la ignición frente al flujo de calor incidente. (d) Tiempo de retardo de ignición normalizado vs. flujo de calor incidente normalizado. Esta escala se utiliza para recuperar las propiedades del material.

ferencia que fueron desarrollados para combustibles sólidos térmicamente espesos, que representan diferentes enfoques para resolver el problema de ignición, incluyendo la solución de ignición clásica y los métodos integrales. (Quintiere, 2006; Atreya y Abu-Zaid, 1992; Delichatsios et al., 1991; Tewarson, 2002; Spearpoint y Quintiere, 2001), usando las expresiones para flujos de calor incidentes altos (por ejemplo $t_{ig}^{1/n} = f(\dot{q}_{inc}''')$).

Para lograr esto, el modelo presentado en este artículo se resuelve considerando un pequeño espesor de penetración de radiación (δ) en la superficie del medio, de manera que la temperatura promediada espacialmente se vuelve equivalente a la temperatura superficial en un modelo térmicamente grueso (thermally thick) y así las temperaturas predichas son comparables con los modelos de la literatura mencionada. Los resultados de esta comparación se presentan en Figura 4.2. La distancia de penetración δ se calcula a partir de una estimación del camino libre medio de radiación, el procedimiento se detalla

en la sección 4.2 a más adelante. Se grafica tanto la solución exacta de la ecuación de Chini como la solución aproximada (Ec. 3.55) usando la distancia de penetración calculada. Ambas soluciones producen predicciones del retardo en el tiempo de ignición que son consistentemente más bajas que el resto de las soluciones para todo el rango de flujo de calor. La fuente de estas discrepancias es el hecho de que todos los modelos anteriores no fueron construidos considerando la penetración de la radiación al interior del medio, ni la utilización de una temperatura promedio en el medio.

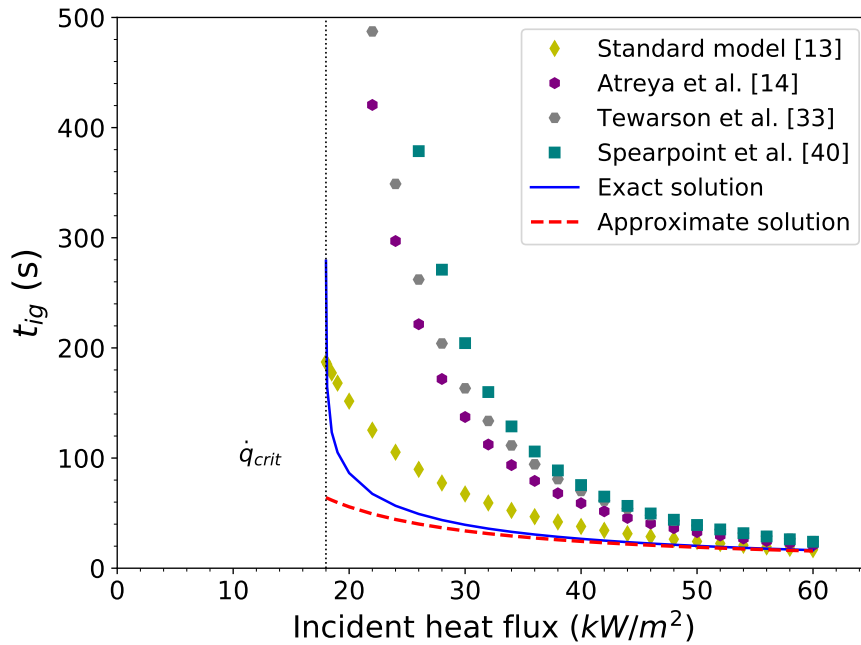


Figura 4.2: Retardo en el tiempo de ignición para diferentes flujos de calor constantes incidentes probados, comparación entre modelos de referencia, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick.

4.1.2. Caso lineal

La temperatura promediada espacialmente para una losa de combustible expuesta a un flujo de calor lineal incremental se puede predecir usando la Ecuación 3.35. Esta solución analítica aproximada se compara y valida con la solución numérica exacta para la ecuación de Chini presentada en Ecuación 3.18 cuando se aplica un flujo de calor de crecimiento lineal, que se muestra en Figura 4.3a.

Como en el caso anterior, el retardo en el tiempo de ignición se obtiene cruzando las dos predicciones de temperatura con la temperatura de ignición obtenida de Ecuación 3.54. Se encuentra una buena concordancia entre ambas soluciones cuando se imponen rampas altas, lo que se traduce en retardo de tiempos de ignición cortos. Las diferencias aumentan a medida que aumenta el tiempo de exposición, en rampas más bajas. Esto se debe a las dos aproximaciones realizadas en la Sección 3.5 y en la Sección 3.7, siendo la primera el procedimiento de linealización del término no lineal en la

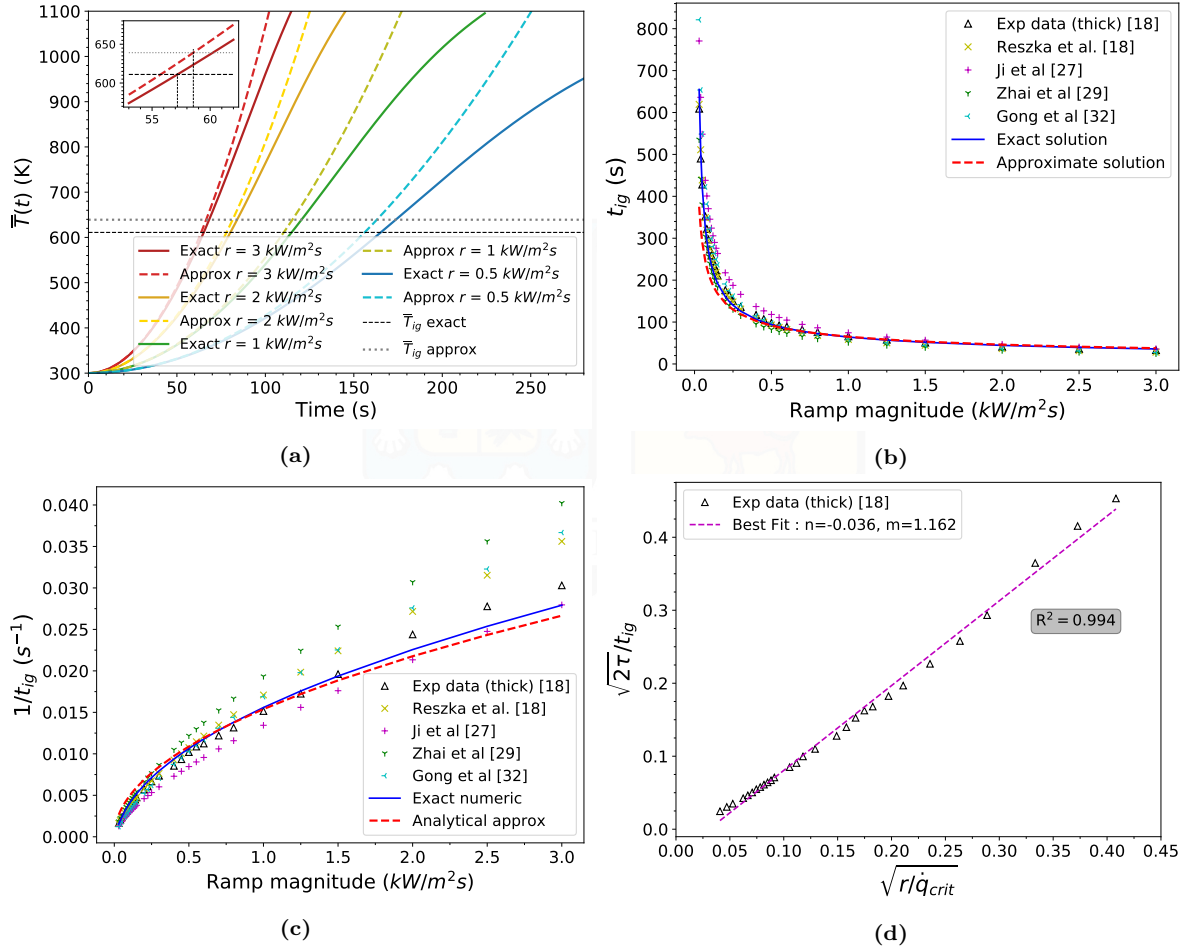


Figura 4.3: Resultados para el caso lineal: (a) Evolución de la temperatura media en profundidad, comparación entre soluciones analíticas exactas y aproximadas. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick. (c) Inverso del retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thick. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.

divergencia del flujo radiativo, que se realizó para flujos de calor incidentes elevados, y que supone efectivamente que $\bar{T} \sim T_{\infty}$. La segunda es la aproximación en serie de Taylor realizada en torno a $t = 0$ para obtener la solución aproximada (Ecuación 3.60), que es válida para flujos de calor elevados.

A diferencia del caso constante, el número de modelos de referencia analíticos para los flujos de calor variables en el tiempo es menor para el caso thermally thick e incluso menor para el caso térmicamente delgado (thermally thin). Debido a esto, la comparación con los modelos de referencia thermally thick se presenta como resultado principal en Figura 4.3, mientras que el caso thermally thin para $\delta = 9,8$ mm se presenta por separado en Figura 4.4 ya que solo hay un modelo numérico con un rango limitado de magnitudes para la rampa de aumento lineal (Zhang et al., 2019).

Los datos experimentales utilizados en este caso son los de Reszka et al. (Reszka et al., 2012),

quien aplicó pruebas de encendido piloto con flujos de calor constantes y linealmente crecientes en una muestra de PMMA térmicamente espesa en un Aparato de Propagación de Fuego (FPA por sus siglas en inglés) (ASTM, 2003). La muestra constaba de 2 bloques de dimensiones 100 x 100 x 4,9 mm pegados uno encima del otro, siguiendo una configuración horizontal como se muestra en Figura 3.2. Las pendientes de las rampas estudiadas variaron de $r = 0.03$ a $3.0 \text{ kW/m}^2 \text{ s}$. Obsérvese que la situación más sencilla que puede considerarse en este caso corresponde a $\dot{q}_0'' = 0$, por ejemplo, representando un frente de llama que se aproxima a un objetivo desde una larga distancia y que impondrá inicialmente un flujo de calor despreciable en el medio. Tomar este valor permite obtener explícitamente el tiempo de retardo de la ignición a partir de la Ecuación 3.60.

Figura 4.3b presenta los retardo en el tiempo de ignición para una amplia variedad de rampas probadas. Tanto la solución exacta (ecuación de Chini) como la aproximada (ecuación 3.60) predicen tiempos de retardo de ignición más cortos que los resultados experimentales. Tenga en cuenta que para comparar el modelo en este trabajo con las expresiones disponibles en la literatura, la temperatura del medio se promedió solo dentro de la región de penetración de radiación δ cerca de la superficie de la muestra, como se describió anteriormente para el flujo de calor constante. (consulte la sección 4.2 para más detalles).

Cuando se grafica el inverso del retardo en el tiempo de ignición en Figura 4.3c como una función de la pendiente de la rampa r de Ecuación 3.60, está claro que no se logra un comportamiento lineal, la razón es el término cuadrático del tiempo de retardo de la ignición dado por la forma del flujo de calor incidente que varía con el tiempo. Luego, al establecer $\dot{q}_0'' = 0$, Ecuación 3.58 se convierte en,

$$\bar{\theta} = \frac{a_b}{2\delta\rho c_p} \cdot \dot{q}_{inc}''(t) \cdot t. \quad (4.3)$$

Luego, usando la normalización de los parámetros de Ecuación 4.1, la solución adimensional resultante de Eq. 4.3 se convierte en $\Theta = \varphi(t) \cdot t/2\tau$. Al acercarse al punto de ignición, la expresión se convierte en $1 = \varphi(t_{ig}) \cdot t_{ig}/2\tau$, por lo que se forma una relación lineal entre $\varphi(t_{ig})$ y $2\tau/t_{ig}$. Esta relación se ha utilizado en trabajos anteriores (Hernández et al., 2019) para correlacionar datos experimentales y obtener una forma rápida de predecir los tiempos de retardo de encendido. Teniendo en cuenta este objetivo conviene aislar el tiempo de encendido, obteniendo,

$$\frac{\sqrt{2\tau}}{t_{ig}} = \sqrt{\frac{r}{\dot{q}_{cri}''}}. \quad (4.4)$$

En Figura 4.3d se probó esta relación lineal con los datos experimentales que muestran una buena concordancia general en cada rampa impuesta. Tenga en cuenta que al aislar el tiempo de retardo de encendido se pierde la naturaleza adimensional de la relación, ya que ambos términos tienen una dimensión $\text{s}^{-1/2}$.

La comparación de casos thermally thin se muestra en Figura 4.4, donde el modelo numérico de referencia y los datos experimentales correspondientes es el de Zhang et al. (Zhang et al., 2019) para un combustible sólido de PMMA de 6 mm, con un rango de magnitudes de rampa que van desde 0.05 a 0.15 kW/m² s. Para comparar el modelo con el de Zhang, se aumentó la temperatura de ignición a 695,53 K y los parámetros se emparejaron con los utilizados en su estudio. La versión exacta del modelo para el caso lineal logra replicar la naturaleza del fenómeno y su tendencia, sin embargo, estima tiempos de retardo de encendido ligeramente más altos en comparación con estos datos de referencia. Es lógico que el modelo aproximado pierda precisión ya que se generó para tiempos de bajo retardo de encendido, mientras que se presentan datos para un rango de bajos incrementos de flujo radiativo, generando tiempos de encendido altos.

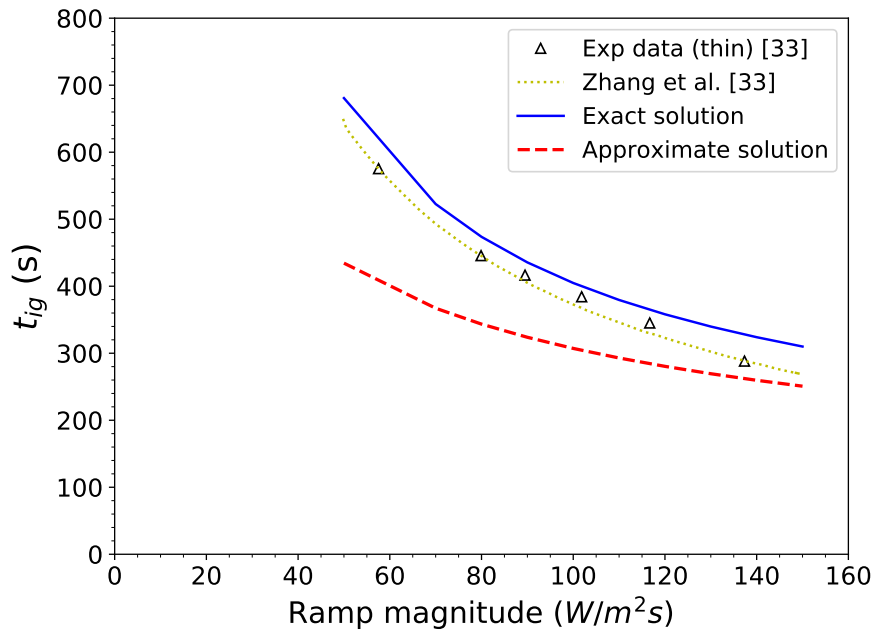


Figura 4.4: Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor ensayadas, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas, para el caso thermally thin.

4.1.3. Caso exponencial

Figura 4.5a compara las soluciones analíticas exactas y aproximadas de la temperatura promediada espacialmente para una losa sólida expuesta a un flujo de calor exponencial incidente dado por las ecuaciones 3.18 y 3.43 respectivamente, utilizando diferentes valores del coeficiente exponencial b . Como en el caso lineal, el modelo muestra una mejor concordancia cuando el exponente del término exponencial es mayor, lo que provoca tiempos de retardo de encendido más cortos, lo que hace que la aproximación de linealización tenga mayor validez. Los resultados de los perfiles de temperatura exactos y aproximados para el caso exponencial presentan una mejor concordancia que los casos anteriores,

observándose la diferencia entre los resultados en los valores más bajos del coeficiente de variación exponencial. Esto se explica porque la tasa de crecimiento del flujo de calor en forma exponencial es mucho mayor que en los casos anteriores y, por lo tanto, la ignición se logra con mayor rapidez. Las mayores discrepancias se observan en grandes tiempos de exposición, por lo tanto, más allá de la ignición y más allá del alcance del modelo.

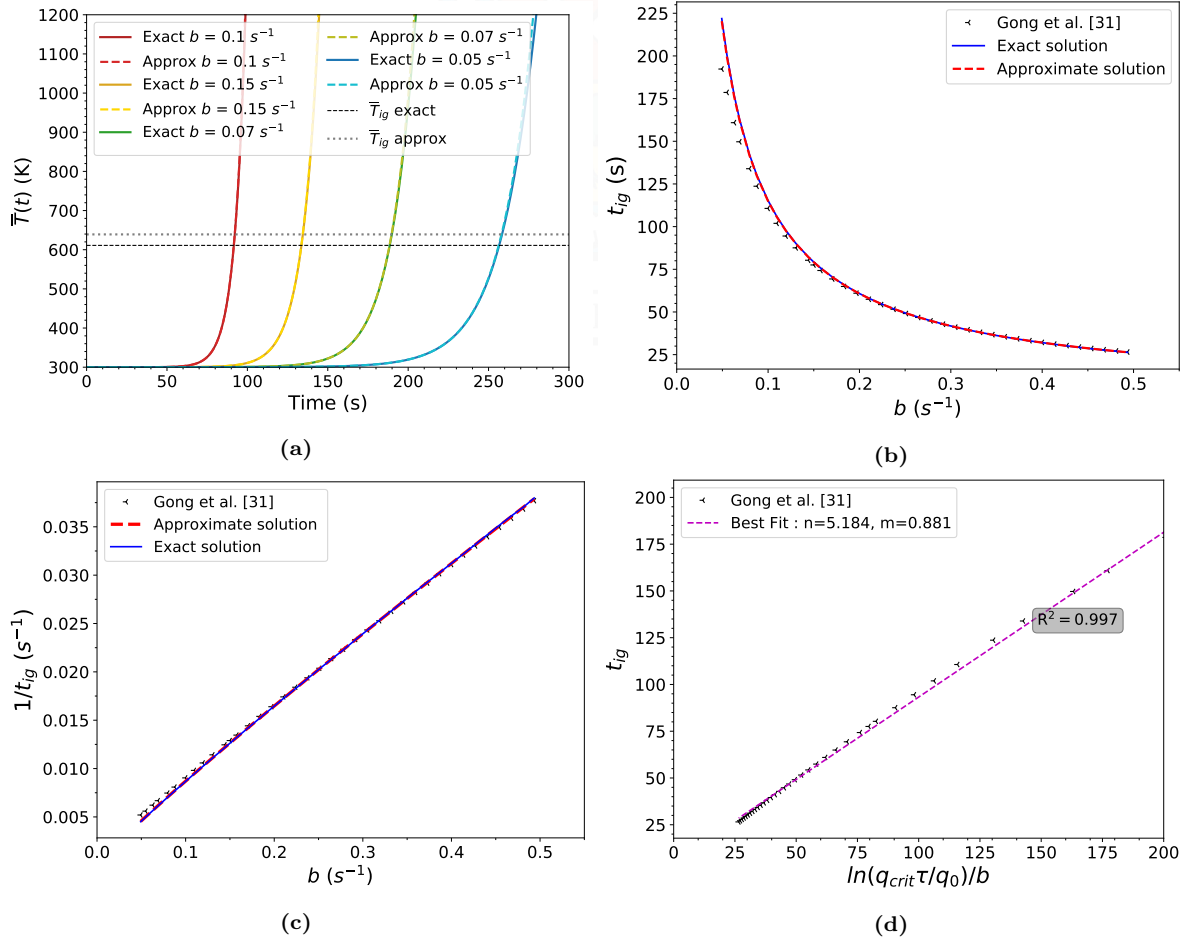


Figura 4.5: Resultados para el caso exponencial: (a) Evolución de la temperatura promedio en profundidad, comparación entre soluciones analíticas numéricas y aproximadas, dados diferentes incrementos exponenciales. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes relaciones de incremento exponencial, comparación entre la solución numérica de Gong y este documento soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (c) Inverso retardo en el tiempo de ignición para diferentes relaciones de incremento exponencial, comparación entre la solución numérica de Gong, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.

Las figuras 4.5b y 4.5c presentan una comparación de las predicciones del tiempo de retardo de ignición basadas en temperaturas (solución exacta y ecuación 3.43) con el modelo propuesto por Gong que incluye la absorción superficial de radiación (Gong et al., 2020). Se sigue el mismo procedimiento que en los casos anteriores para obtener una estimación de la temperatura superficial (sección 4.2), estimando un valor óptimo de la media de la trayectoria libre de la radiación. Los resultados se presentan para un amplio rango de b (s^{-1}) y, como se explicó anteriormente, se encuentra una mejor concordancia

con el modelo de Gong en valores más altos de b , o para tiempos de retardo de ignición más cortos, tanto para las soluciones analíticas exactas como aproximadas. Observe la relación lineal entre la inversa del tiempo de retardo de encendido y b en ambas soluciones.

Se nota fácilmente en la ecuación 3.43 que en este caso no se debe imponer un flujo de calor inicial $\dot{q}_0'' = 0$, ya que eliminaría los términos exponenciales por completo. En cambio, se puede imponer un valor pequeño, luego una forma equivalente de Ecuación 4.3 para la solución exponencial es,

$$\bar{\theta} = \frac{a_b}{(h_T + b\delta\rho c_p)} \left(\dot{q}_{inc}''(t) - \dot{q}_0'' e^{-\frac{h_T}{\delta\rho c_p}t} \right). \quad (4.5)$$

El segundo término exponencial tiene un exponente negativo, por lo tanto, para valores pequeños de $\dot{q}_0''$ ese término es insignificante. Siguiendo el mismo procedimiento de normalización aplicado anteriormente, se puede hacer un cambio de variables,

$$\Theta = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_{ig}}; \quad \tau = \frac{(h_T + b\delta\rho c_p)}{a_b} \frac{\bar{\theta}_{ig}}{\dot{q}_{cri}''}; \quad \varphi(t) = \frac{\dot{q}_{inc}''(t)}{\dot{q}_{cri}''}. \quad (4.6)$$

Expresando Ecuación 4.5 en forma adimensional y acercándose a la temperatura de ignición, se encuentra una relación lineal entre t_{ig} y $\ln(\dot{q}_{cri}''\tau/\dot{q}_0'')/b$, que se puede ver en Figura 4.5d,

$$t_{ig} \approx \frac{\ln(\dot{q}_{cri}''\tau/\dot{q}_0'')}{b}. \quad (4.7)$$

4.1.4. Caso polinomial

La temperatura promediada espacialmente en el medio para la losa de combustible expuesta a un flujo de calor polinomial de segundo orden, $\dot{q}_{inc}''(t) = d_1 + d_3t^2$, se puede estimar usando Ecuación 3.65. En Figura 4.6a se muestra una comparación entre la solución exacta y aproximada de la temperatura promediada espacialmente en profundidad para diferentes rampas. El retardo en el tiempo de ignición se puede predecir a partir de la intersección de las predicciones de temperatura con la temperatura de ignición calculada utilizando Ecuación 3.67.

Nótese que, como en el caso exponencial, los modelos propuestos por Zhai y Lamorlette ([Lamorlette, 2014](#); [Zhai et al., 2019](#)) se comparan con las predicciones de este trabajo en la Figura 4.6b. Los resultados presentados en esa figura predicen el retardo en el tiempo de ignición de una losa de PMMA expuesta a un flujo de calor incidente cuadrático, por lo que el medio tuvo que ser tratado como un combustible térmicamente espeso para realizar la comparación, siguiendo la técnica explicada anteriormente de reducción de radiación significa camino libre δ y calculando una temperatura promedio cerca de la superficie (Sección 4.2). Para una amplia gama de magnitudes de rampas cuadráticas d_3 presentadas en Figura 4.6b, se encuentra una mejor concordancia para tiempos de retardo de encendido

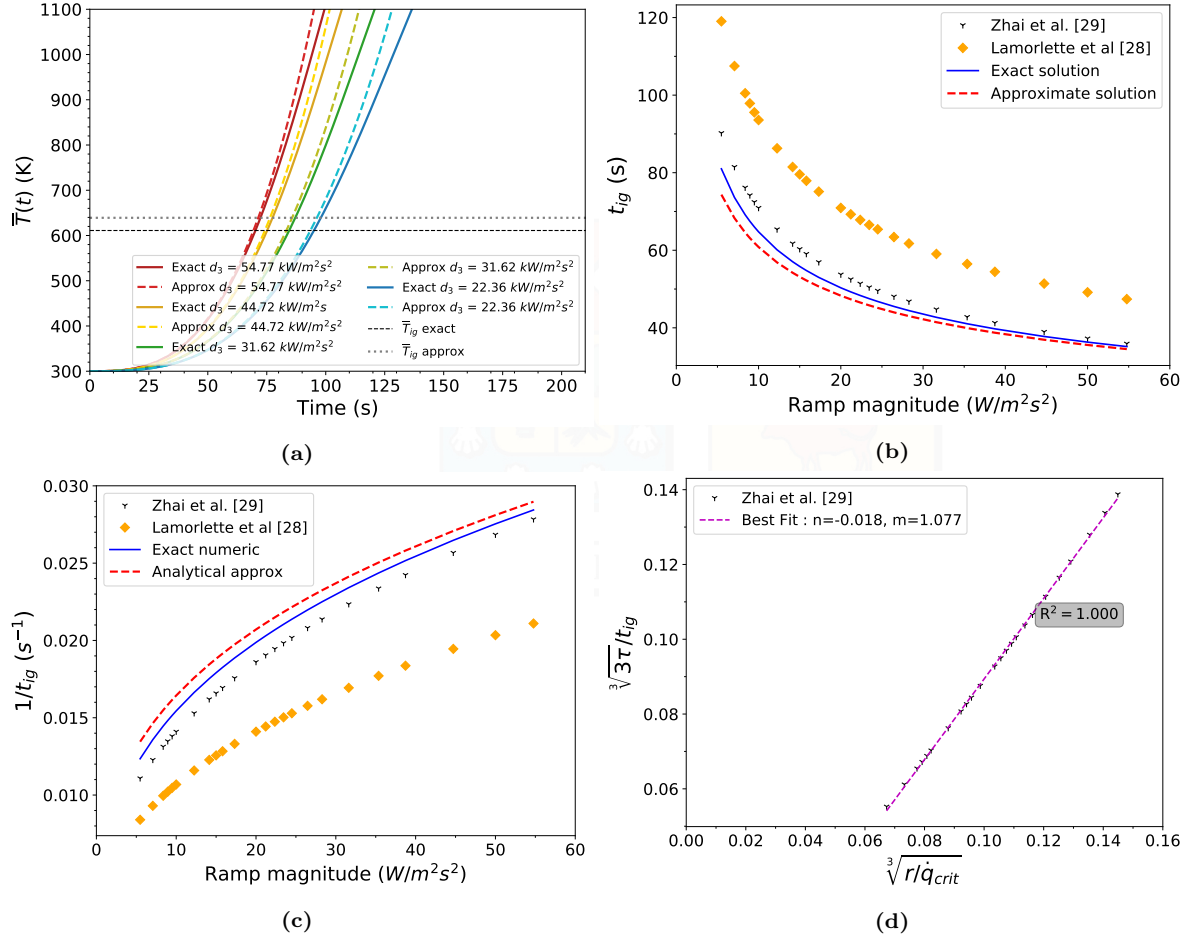


Figura 4.6: Resultados para el caso polinomial: (a) Evolución de la temperatura promedio, comparación entre soluciones analíticas numéricas exactas y aproximadas, dadas diferentes rampas de flujo cuadráticas. (b) Retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor cuadráticas probadas, comparación entre el modelo de Zhai, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (c) Inverso del retardo en el tiempo de ignición para diferentes pendientes de rampas de flujo de calor cuadráticas probadas, comparación entre el modelo de Zhai, soluciones analíticas aproximadas y analíticas exactas. (d) Relación lineal entre el retardo en el tiempo de ignición normalizado y el flujo de calor incidente normalizado.

cortos y, como en el caso lineal, se encuentra que el modelo tiende a subestimar los tiempos de ignición con respecto a los otros modelos de la literatura.

Cuando se grafica el inverso del tiempo de retardo de encendido en Figura 4.6c como una función de la pendiente de la rampa cuadrática de Ecuación 3.67, está claro que no se logra un comportamiento lineal. La razón de esto es el término cúbico del retardo en el tiempo de la ignición dado por la forma del flujo de calor incidente que varía con el tiempo.

Para el flujo de calor incidente polinomial, el escenario en el que $d_1 = \dot{q}_0'' = 0$ es la situación más simple del problema. En este caso, también se puede realizar un procedimiento de escalado. Tomando

Ecuación 3.66 y haciendo de $d_1 = 0$,

$$\bar{\theta} = \frac{a_b}{\delta \rho c_p} \left[\frac{\dot{q}_{inc}''(t) t}{3} \right]. \quad (4.8)$$

Usando el procedimiento de normalización de Ecuación 4.1, aquí se puede usar el mismo cambio de variables que en el caso lineal y constante. Introduciendo las variables adimensionales y los parámetros en Ecuación 4.8 y aproximándose al punto de ignición, se forma una relación lineal entre $\varphi(t_{ig})$ y $3\tau/t_{ig}$, y es se muestra en Figura 4.6d. Recordando que en este escenario $\dot{q}_{inc}''(t) = d_3 t^2$ y aislando t_{ig} entonces se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\sqrt[3]{3\tau}}{t_{ig}} = \sqrt[3]{\frac{d_3}{\dot{q}_{cri}''}}. \quad (4.9)$$

4.1.5. Escalado generalizado de los resultados

En los resultados adimensionales, se puede observar una similitud o tendencia entre los casos constante, lineal y polinomial (potencia cuadrada), ya que todos tienen los mismos parámetros adimensionales y raíces de diferentes órdenes que coinciden con el orden de $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_{N+1}t^N$. Esto se puede escribir de forma general:

$$\frac{\sqrt[(N+1)]{(N+1)\tau}}{t_{ig}} = \sqrt[(N+1)]{\frac{d_{(N+1)}}{\dot{q}_{cri}''}}. \quad (4.10)$$

Todas las expresiones normalizadas para t_{ig} encontradas para cada caso se resumen en Tabla 4.2 para que el lector pueda acceder a ellas más rápidamente. Con estas expresiones es fácil predecir un tiempo de retardo de ignición basado en el flujo incidente, pero también sirven para obtener propiedades efectivas del material combustible a partir de datos experimentales de ignición.

Tabla 4.2: Resumen de expresiones normalizadas para predecir t_{ig} para los diferentes casos aplicados al modelo.

Tipo de flujo	Constante $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0''$	Lineal $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0'' + rt$	Exponencial $\dot{q}_{inc}'' = \dot{q}_0'' e^{bt}$	Polinomial $\dot{q}_{inc}'' = d_1 + d_3 t^2$
Expresión normalizada	$\frac{\tau}{t_{ig}} = \frac{\dot{q}_{inc}''}{\dot{q}_{cri}''}$	$\frac{\sqrt{2\tau}}{t_{ig}} = \sqrt{\frac{r}{\dot{q}_{cri}''}}$	$t_{ig} = \frac{\ln(\dot{q}_{cri}'' \tau / \dot{q}_0'')}{b}$	$\frac{\sqrt[3]{3\tau}}{t_{ig}} = \sqrt[3]{\frac{d_3}{\dot{q}_{cri}''}}$

4.2. De materiales semitransparentes a opacos

El modelo propuesto en este estudio permite calcular el calentamiento de materiales de cualquier espesor óptico, en condiciones de flujo de calor radiativo incidente variable en el tiempo. Dado que en los casos evaluados existen comparaciones con estudios de la literatura que contemplan sólidos opacos (es decir, medios sin penetración de la radiación incidente) expuestos a flujos de calor incidente que varían en el tiempo, el modelo generado debe adaptarse para permitir una comparación adecuada. Para ello, basta con reducir el espesor de penetración de radiación del medio δ . Aunque δ no puede ser cero, ya que está en el denominador en varias fracciones de los modelos presentados anteriormente, puede ser pequeño o tender a cero ($\delta \rightarrow 0$). De esta manera, se puede modelar un medio donde la radiación se absorbe en un espesor de penetración muy pequeño, asimilando un efecto superficial, con la temperatura promedio representando la temperatura de la superficie.

La Figura 4.7 muestra el retardo en el tiempo de ignición para cada caso de flujo de calor variable en el tiempo analizado en este artículo, pero también para una amplia gama de espesores de penetración de radiación, desde $\delta = 9,8 - 0,1$ mm. Las gráficas comparan las soluciones con los datos experimentales de las referencias citadas en la Sección 4.1, con el fin de determinar el espesor de penetración óptimo δ^* que se utilizará en los modelos propuestos para comparar sus resultados con cada modelo de referencia. Para determinar δ^* , se calcula el error relativo entre el tiempo de retardo de encendido calculado para el flujo de calor más alto y su valor correspondiente de los modelos en la literatura. La razón para elegir los flujos de calor más altos radica en el hecho de que todas las expresiones se obtuvieron para el límite $t \rightarrow 0$, y como se señaló en la sección anterior, los resultados muestran que los mejores ajustes y predicciones se logran para altos flujos de calor. Para todos los casos en la Fig. 4.7, los valores de δ^* , se encuentran dentro del rango 1 - 3 mm, siendo cercanos a cero como se esperaba.

Teniendo en cuenta todos los espesores óptimos obtenidos para cada modelo de referencia, se seleccionó uno en cada caso (constante, lineal, exponencial y polinomial) para poder generar las gráficas que se incluyeron en la Sección 4.1. Para el caso constante, se seleccionó el modelo estándar (Quintiere, 2006) y, por lo tanto, el espesor de penetración utilizado tanto en el modelo exacto como en el aproximado fue de 1,42 mm (Figura 4.2). Para el caso lineal, la referencia seleccionada fueron los datos experimentales de Reszka (Reszka et al., 2012), con $\delta^* = 2,42$ mm, reflejados en Figura 4.3b y Figura 4.3c. En el caso exponencial, el espesor de penetración de la radiación tomó el valor de 1,33 mm siguiendo el resultado de la única referencia disponible (Gong et al., 2020), cf. Figuras 4.5b y 4.5c. Finalmente, en la variación del flujo de calor incidente polinomial, se seleccionó el modelo de Zhai (Zhai et al., 2019) con $\delta^* = 1,019$ mm, como se muestra en Figura 4.6b y Figura 4.6c.

Con respecto al espesor de penetración δ , es importante mencionar que cada forma funcional

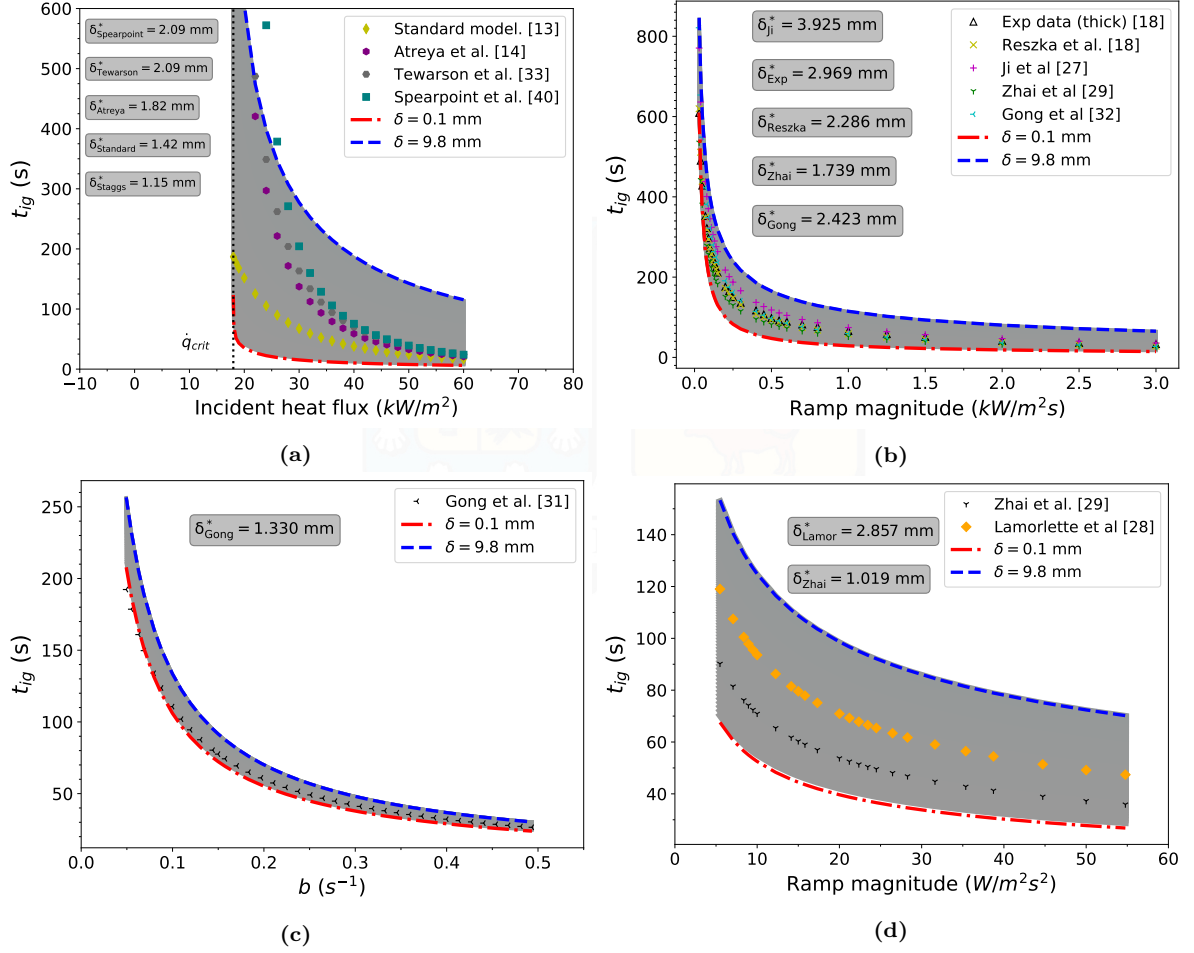


Figura 4.7: Comparación entre modelos analíticos aproximados de autores anteriores y los aquí desarrollados, para todos los casos considerados en este estudio.

del flujo de calor dependiente del tiempo, afecta al retardo en el tiempo de ignición en diferentes proporciones. Esta magnitud disminuye a medida que aumenta el grado del polinomio para los casos constante, lineal y cuadrático, pero en el caso exponencial presenta una baja sensibilidad a la penetración en el medio como se ve en Figura 4.7c, por lo tanto, si el fenómeno temporal se ajusta a una función exponencial creciente, la precisión del modelo aumentará, incluso cuando la obtención del valor del espesor de penetración no sea precisa. Puede ser útil obtener una aproximación para el espesor de penetración óptimo δ^* , por lo tanto, se presenta una expresión y metodología adicional en la Sección 4.2.1, que permite determinarlo mediante el uso de datos experimentales y las propiedades efectivas estándar, ajustando el modelo a un caso thermally thick.

4.2.1. Propiedades efectivas

El cálculo de las propiedades efectivas también es un indicador de la precisión del modelo, usando las expresiones encontradas en la Sección 4.1 para la constante (Ecuación 4.2), lineal (Ecuación 4.4) y casos polinomiales (Ecuación 4.9). La siguiente relación se puede establecer resolviendo para cada potencia respectiva n en $1/t_{ig}^n$,

$$\frac{1}{t_{ig}^n} = \frac{1}{n\tau} \cdot \frac{d_n}{\dot{q}_{cri}''}. \quad (4.11)$$

Se obtiene una relación lineal normalizada, donde la pendiente m toma la forma de $1/(n\tau)$. Por lo tanto, al realizar un ajuste lineal a los datos experimentales y recordar que τ depende de las propiedades físicas ρ y c_p , como en Ecuación 4.6, que deben predecirse de manera efectiva, se puede encontrar la siguiente relación:

$$\rho c_p = \frac{a_b \dot{q}_{crit}''}{n \delta \bar{\theta}_{ig} m}. \quad (4.12)$$

Se desarrolla un método especial para encontrar las propiedades efectivas para el caso exponencial ya que τ depende del coeficiente exponencial b , por lo que la aplicación del método anterior haría que las propiedades efectivas no fueran constantes. Reagrupando los términos de la Ecuación 3.43 (Ecuación de temperatura), se obtiene una función lineal de b (de la forma $\exp(b t_{ig}) = c + mb$), de la cual la pendiente m contiene el término ρc_p , esto es,

$$e^{b t_{ig}} \approx \frac{h_T \bar{\theta}_{ig}}{\dot{q}_0'' a_b} + \frac{\delta \rho c_p \bar{\theta}_{ig}}{\dot{q}_0'' a_b} b; \quad (4.13)$$

luego, a partir de la pendiente m , las propiedades efectivas se pueden determinar como,

$$\rho c_p = \frac{m \dot{q}_0'' a_b}{\delta \bar{\theta}_{ig}}. \quad (4.14)$$

Las propiedades efectivas estimadas obtenidas de las relaciones anteriores se muestran en Tabla 4.3, comparándolas con el valor estándar de las propiedades efectivas. Las propiedades efectivas recuperadas aplicando los modelos de las referencias citadas en este trabajo se incluyen en la comparación y se grafican en Figura 4.8.

Otro aspecto que se puede deducir de la formulación de expresiones para obtener propiedades efectivas es la capacidad de proponer una aproximación experimental para el espesor de penetración de radiación óptimo (δ^*) que permite la aplicación del modelo para los casos térmicamente gruesos. Al tener una relación lineal de la que solo interesa la pendiente, se necesitan pocos puntos experimentales para obtener la pendiente m y posteriormente aplicar las expresiones de la Ecuación 4.12 y Ecuación 4.14, usando las propiedades efectivas estándar del material, y con δ como la variable desconocida, para los

Tabla 4.3: Comparación de propiedades efectivas y error obtenido con el modelo analítico exacto (entre paréntesis), modelo analítico aproximado y resultados experimentales. El valor estándar de las propiedades efectivas es $\rho c_p = 1,999,2 \text{ kJ} / \text{m}^3 \text{ K}$. Obtenido para un espesor de penetración óptimo δ^*

Propiedades efectivas kJ/m ³ K	Casos			
	Constante	Lineal	Exponencial	Polinomial
Solución exacta	1,812.77 (9.3 %)	2,072.79 (3.7 %)	2,063.80 (3.2 %)	2,125.89 (6.3 %)
Solución aproximada	1,987.49 (0.6 %)	1,919.88 (4.0 %)	2,126.38 (6.4 %)	2,001.29 (0.1 %)
Experimental	-	1,776.71 (11.1 %)	-	-

casos constantes, lineales y polinomiales esto produce,

$$\delta^* = \frac{a_b \dot{q}_{crit}''}{n \rho c_p \bar{\theta}_{ig} m}; \quad (4.15)$$

y para el caso exponencial,

$$\delta^* = \frac{m \dot{q}_0'' a_b}{\rho c_p \bar{\theta}_{ig}}. \quad (4.16)$$

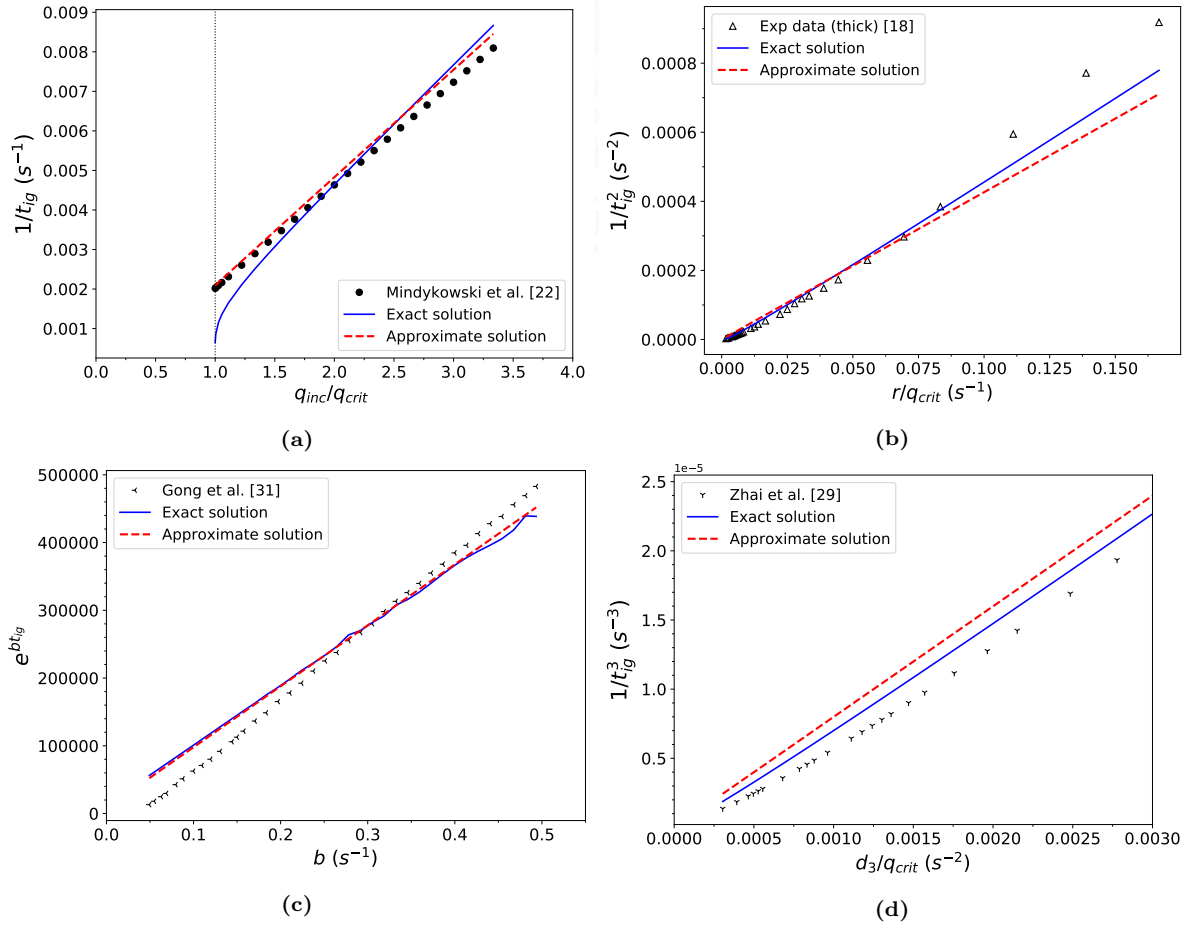


Figura 4.8: Potencias inversas de retardo de ignición para diferentes flujos de calor incidente, test de rampas o coeficientes exponenciales, comparación entre soluciones experimentales, analíticas aproximadas y analíticas exactas para todos los casos.

5 | Extensión del modelo

Si bien el foco del estudio se centra en la ignición de combustibles sólidos homogéneos, haciendo un símil a los materiales de construcción comunes en las edificaciones, el modelo puede ser adaptado de igual forma a la contra-parte vegetal de un incendio forestal en la interfaz urbano-silvestre. El modelo puede ser utilizado para estimar el tiempo de ignición de combustibles vegetales al incorporar el concepto de porosidad. El material forestal presente en los bosques, como por ejemplo: acículas de pino, hojas, ramas, entre muchos otros, son sólidos homogéneos por si solos, pero al estar presentes y acumulados de forma aleatoria en gran cantidad, forman una cama de material vegetal poroso que propaga fácilmente una llama. este material vegetal poroso puede ser considerado como un objeto sólido único para efectos del modelo, al incorporar los conceptos indicados en la sección 2.8 del marco teórico.

Al considerar un medio poroso, este se encuentra compuesto de dos fases, una sólida (vegetal combustible) y una gaseosa (aire). Bajo el supuesto de que el estrato vegetal es un medio equivalente continuo y que las fases sólida (s) y gaseosa (g) se encuentran en equilibrio térmico a temperatura $T(z, t)$ se plantea entonces la ecuación general de energía, para una placa plana unidimensional en el eje z , obteniendo lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s h_s + \alpha_g \rho_g h_g) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{eq} \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha_g \rho_g u_g h_g - \dot{q}_r'' \right) \quad (5.1)$$

Donde k_{eq} representa el coeficiente de conducción equivalente considerando ambas fases del material poroso, lo cual se calcula como $k_{eq} = (1 - \alpha_s)k_g + \alpha_s k_s$, con la suma de las fracciones en volumen de cada fase cumpliendo que $\alpha_s + \alpha_g = 1$.

Se tiene también las entalpías sensibles de cada fase como $h_s = \int_{T_\infty}^T C_{ps} dT$ en el caso sólido y $h_g = \int_{T_\infty}^T C_{pg} dT$ para el caso gaseoso. La velocidad axial del gas al interior del medio poroso es representada por u_g . Se sabe que la entalpía asociada a la fase gaseosa, $\alpha_g \rho_g h_g$, es ~ 3 ordenes de magnitud mas bajos que la fase solida, $\alpha_s \rho_s h_s$, por lo que la primera puede ser despreciada. Finalmente al notar que el término del lado derecho $\alpha_g \rho_g u_g h_g$ es constante en el eje z y por ende se elimina al desarrollar la expresión para dar paso a lo siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s h_s) = k_{eq} \nabla^2 T - \nabla \dot{q}_R'' \quad (5.2)$$

Donde $\nabla \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$ es la divergencia del flujo de calor radiativo por unidad de área. Al igual que en el desarrollo del modelo en la sección 3.1, T se establece como una temperatura espacial promedio:

$$\bar{T} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\delta T dz dy dx}{\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\delta dz dy dx}. \quad (5.3)$$

Luego, considerando el supuesto 1) el operador $(1/\delta) \int_0^\delta dz$ se aplica en ambos lados de Ecuación 5.2 conduciendo a propiedades promediadas espacialmente para el medio de la siguiente manera:

$$(\alpha_s \rho_s c_{ps}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \left[\left(k_{eq} \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\delta} - \left(k_{eq} \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} \right] - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'', \quad (5.4)$$

donde $\nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$ es la divergencia en la dirección z del vector de flujo de calor radiativo por unidad de área $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}''$.

Aplicando el método de Schuster-Schwarzschild visto en la sección 3.3, se obtiene la divergencia del flujo de calor radiativo en términos de las propiedades promediadas en el espacio, como sigue,

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \nabla_z \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}'' dz = -\frac{a_b}{\delta} \dot{q}_{inc}''(t) + \frac{2a_b}{\delta} \sigma (\bar{T}^4 - T_\infty^4), \quad (5.5)$$

Donde $a_b = (1 - e^{-2\kappa\delta})$ es la absorptividad del medio. Luego siguiendo el procedimiento mostrado anteriormente, se establecen las siguientes condiciones iniciales y de borde en términos de variables promediadas en el espacio:

$$t = 0 : \quad \bar{T}(0) = T_\infty; \quad (5.6)$$

$$z = 0 : \quad -k_{eq} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -h_c (\bar{T}(t) - T_\infty). \quad (5.7)$$

Nuevamente se considera una condición de borde adiabática en la superficie inferior ($z = \delta$). Cualquier sección del combustible que esté fuera del rango del espesor de penetración de radiación δ se considera que tiene una temperatura ambiente T_∞ . Aplicando las condiciones mencionadas al término conductivo de la Ecuación 5.4 y usando la divergencia del flujo de calor radiativo, se puede obtener una ecuación general para la temperatura promedio incluyendo la porosidad del medio:

$$(\alpha_s \rho_s c_{ps}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{\delta} (-h_c (\bar{T} - T_\infty)) + \frac{a_b}{\delta} \dot{q}_{inc}''(t) - \frac{2a_b}{\delta} \sigma (\bar{T}^4 - T_\infty^4). \quad (5.8)$$

En base a esta expresión de la ecuación de energía se puede observar que la porosidad viene representada e influye como una constante en el modelo, por ende, las metodologías y pasos a seguir para obtener las respectivas soluciones de en cada tipo de flujo de calor se mantienen, dando pie a las siguientes soluciones:

1. Caso Constante

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b \dot{q}_0''}{h_T} \left(1 - e^{-\frac{h_T}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} t} \right), \quad (5.9)$$

2. Caso Lineal

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b}{h_T} \left(rt + \left(\dot{q}_0'' - \frac{\delta r \alpha_s \rho_s c_{ps}}{h_T} \right) \left(1 - e^{-\frac{h_T}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} t} \right) \right). \quad (5.10)$$

3. Caso Exponencial

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b \dot{q}_0''}{(h_T + b \delta \alpha_s \rho_s c_{ps})} \left(e^{bt} - e^{-\frac{h_T}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} t} \right). \quad (5.11)$$

4. Caso Polinomial

$$\bar{T}(t) = T_{\infty} + \frac{a_b}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} \left(-\Pi_0 e^{-\frac{h_T}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} t} + \sum_{i=0}^N \Pi_i t^i \right). \quad (5.12)$$

En la expresión anterior, los términos Π_i con $i = 0, 1, 2, \dots, N$ son los coeficientes polinomiales agrupados en forma de sumatorios definidas, que pueden extenderse a polinomios de cualquier orden:

$$\Pi_i = \frac{d_{i+1}}{a} + \sum_{n=2}^{N+1-i} \frac{(-1)^{n-1} d_{i+n} (n+i-1)!}{a^n i!}, \quad (5.13)$$

con

$$a = \frac{h_T}{\delta \alpha_s \rho_s c_{ps}} \quad (5.14)$$



6 | Conclusiones y Comentarios

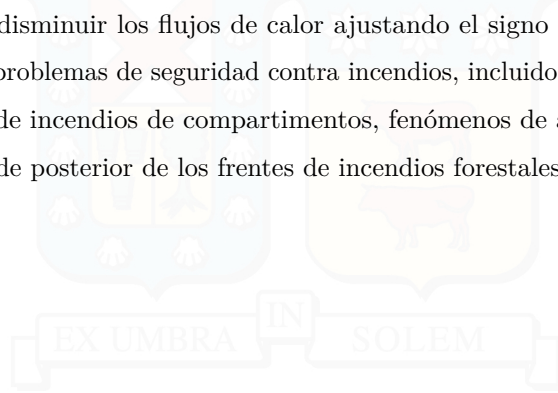
Este estudio presenta una serie de resultados novedosos para tratar el calentamiento de combustibles sólidos sometidos a flujos de calor incidentes variables en el tiempo de diferentes formas. La novedad del trabajo es la inclusión de la penetración de la radiación en la matriz sólida, dando así una representación más precisa del fenómeno físico y dando mayor generalidad a efectos que normalmente son tratados por separado. Las predicciones del modelo muestran en general un buen acuerdo con los datos experimentales y los modelos analíticos disponibles en la literatura. De los resultados obtenidos, es posible deducir que la relación lineal entre $t_{ig}^{-1/n}$ vs $\dot{q}_{inc}''$ reconocido por la interpretación actual de los datos experimentales para materiales térmicamente gruesos, puede no ser válido cuando se incluye una dependencia temporal en el flujo de calor radiativo sobre la muestra, como se insinúa en (Kelley, 1975).

Para incrementos lineales, los resultados se escalan con la relación $1/t_{ig}^2$ vs r ; para el caso polinomial de orden dos, se observa una relación lineal entre $1/t_{ig}^3$ vs d_3 . Finalmente, para un flujo de calor que crece exponencialmente, se obtiene una relación lineal para $1/t_{ig}$ vs b . Para el caso exponencial, también se distingue que este comportamiento presenta la mayor precisión al comparar las soluciones aproximadas y exactas del modelo, tanto para la temperatura como para las predicciones del tiempo de retardo de encendido.

En los modelos de ignición térmica, un parámetro fundamental es la temperatura crítica de ignición, y por tanto, la forma en que se obtiene controla la precisión del modelo. Tanto para la solución analítica exacta como para la aproximada, no existe un método único para obtenerla. En este estudio se presenta una solución aproximada (Ecuación 3.54), en la que el supuesto principal es que las pérdidas convectivas del problema son despreciables, pero también existen otras opciones para simplificar este término como una linealización por Serie de Taylor al término de temperatura en Ecuación 3.18.

El procedimiento matemático aplicado para tratar la ecuación energética como un medio espacialmente promediado, permite gestionar el término radiativo en el balance energético siguiendo todos los supuestos mencionados en los primeros apartados. Esto permite al analista trabajar con los diferentes fenómenos físicos involucrados en el calentamiento de combustibles en fase condensada de manera modular, facilitando la inclusión de otros efectos físicos comunes relevantes a los procesos de ignición como el contenido de humedad del combustible, la porosidad del combustible o diferentes condiciones ambientales, como la velocidad del viento sobre la muestra. En lo que respecta a las diferentes formas funcionales de los flujos de calor incidente que varían en el tiempo, el modelo es

capaz de ajustarse a una amplia gama de modelos presentados en la literatura. Por lo tanto, el modelo propuesto adquiere una utilidad ingenieril significativa ya que proporciona un modelo único para ser utilizado como una herramienta general y versátil para predecir el tiempo de retardo de encendido de una manera manejable para combustibles sólidos de cualquier espesor óptico. Si bien este trabajo solo presenta soluciones para flujos de calor incidentes que crecen con el tiempo, también es posible adaptar el modelo de forma sencilla para disminuir los flujos de calor ajustando el signo en cada caso. Esto podría tener aplicaciones en otros problemas de seguridad contra incendios, incluido el comportamiento de ignición en etapas posteriores de incendios de compartimentos, fenómenos de auto-extinción y la ignición de combustibles en el borde posterior de los frentes de incendios forestales.



Bibliografía

- Albini, Frank A (1983). *Potential spotting distance from wind-driven surface fires*, volume 309. US Department of Agriculture, Forest Service, Intermountain Forest and Range 1.2.2
- ASTM (2003). *E2058-03 Standard Test Method For Measurement of Synthetic Polymer Material Flammability Using a Fire Propagation Apparatus*. ASTM International, West Conshohocken. 4.1.2
- Atreya, A y Abu-Zaid, M (1992). Effect of Environmental Variables on Piloted Ignition. In *Fire Safety Science, Proceedings 3rd International Symposium* (pp. 177–186). Edinburgh, UK. 4.1.1
- Balch, Jennifer K; Bradley, Bethany A; Abatzoglou, John T; Nagy, R Chelsea; Fusco, Emily J; y Mahood, Adam L (2017). Human-started wildfires expand the fire niche across the united states. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(11), 2946–2951. 1.1
- Bamford, C; Crank, J; y Malan, D (1946). The Combustion of Wood. Part 1. *Proc. Cambridge Philosophical Society*, 42, 166–182. 1.2.3
- BBC (2020). Australia fires: A visual guide to the bushfire crisis. [https : //www.bbc.com/news/amp/world – australia – 50951043](https://www.bbc.com/news/amp/world-australia-50951043). Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- Bilbao, Rafael; Mastral, José F; Lana, José A; Ceamanos, Jesús; Aldea, Mari´a E; y Betrán, Mónica (2002). A model for the prediction of the thermal degradation and ignition of wood under constant and variable heat flux. *J. Anal. Appl. Pyrolysis*, 62, 63–82. 1.2.3
- Cal-fires (2020). 2020 incident archive. [https : //www.fire.ca.gov/incidents/2020/](https://www.fire.ca.gov/incidents/2020/). Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- Carslaw, H y Jaeger, J (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, second edición. 1.2.3
- Caton, Sara E; Hakes, Raquel SP; Gorham, Daniel J; Zhou, Aixi; y Gollner, Michael J (2017). Review of pathways for building fire spread in the wildland urban interface part i: exposure conditions. *Fire technology*, 53(2), 429–473. 1.1, 1.2.2
- Chini, Mineo (1924). Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali del primo ordine. *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 57, 506–511. 3.4
- Cohen, Jack D (2004). Relating flame radiation to home ignition using modeling and experimental crown fires. *Canadian Journal of Forest Research*, 34(8), 1616–1626. 1.2.2
- CONAF (2017). Tormenta de fuego en chile. [https : //www.conaf.cl/incendios – forestales/tormenta – de – fuego – en – chile/](https://www.conaf.cl/incendios-forestales/tormenta-de-fuego-en-chile/). Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- CONAF (2020). Estadísticas - resumen nacional ocurrencia (número) y daño (superficie afectada) por incendios forestales 1964 - 2020. [https : //www.conaf.cl/incendios – forestales/incendios – forestales – en – chile/estadisticas – historicas/](https://www.conaf.cl/incendios-forestales/incendios-forestales-en-chile/estadisticas-historicas/). Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- Defossé, Guillermo E; Loguercio, Gabriel; Oddi, Facundo J; Molina, Julio C; y Kraus, P Daniel (2011). Potential co2 emissions mitigation through forest prescribed burning: a case study in patagonia, argentina. *Forest Ecology and Management*, 261(12), 2243–2254. 1.1
- Delichatsios, MA; Panagiotou, TH; y Kiley, F (1991). The Use of Time to Ignition Data for Characterizing the Thermal Inertia and the Minimum (Critical) Heat Flux for Ignition or Pyrolysis. *Combust. Flame*, 84(3-4), 323–332. 3.7, 4.1.1

- Delichatsios, Michael A (2000). Ignition times for thermally thick and intermediate conditions in flat and cylindrical geometries. *Fire Safety Science*, 6, 233–244. 4.1.1
- Endre Süli, David F. Mayers (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. 2.10.1
- Gong, Junhui; Zhai, Chunjie; Yang, Lizhong; y Wang, Zhirong (2020). Ignition of polymers under exponential heat flux considering both surface and in-depth absorptions. *International Journal of Thermal Sciences*, 151, 106242. 1.2.3, 4.1, 4.1.3, 4.2
- Hahn, David W y Özisik, M Necati (2012). *Heat conduction*. John Wiley & Sons. II
- Hamming, Richard (1987). *Numerical methods for scientists and engineers*. Dover, 2nd ed edición. 2.10.2
- Hernández, N; Fuentes, A; Reszka, P; y Fernández-Pello, AC (2019). Piloted ignition delay times on optically thin pmma cylinders. *Proceedings of the Combustion Institute*, 37(3), 3993–4000. 1.2.3, 2.9.4, 4.1, 4.1.1, 4.1.2
- Huang, Hong; Ooka, Ryozi; Kato, Shinsuke; Otake, Hiroshi; y Hayashi, Yoshihiko (2004). Cfd simulation of thermal plume and firebrands scattering in urban fire. *Fire Science and Technology*, 23(2), 152–163. 1.2.2
- Janssens, Marc (1991). Piloted ignition of wood: a review. *Fire and Materials*, 15(4), 151–167. 3.7
- Ji, Jingwei; Cheng, Yuangping; Yang, Lizhong; Guo, Zaifu; y Fan, Weicheng (2006). An integral model for wood auto-ignition under variable heat flux. *Journal of fire sciences*, 24(5), 413–425. 1.2.3
- Jiang, Fenghui; de Ris, John L; y Khan, Mohammed M (2009). Absorption of thermal energy in pmma by in-depth radiation. *Fire Safety Journal*, 44(1), 106–112. 1.2.3, 4.1, 4.1
- Kamke, Dr. E. (1977). *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Vieweg Teubner Verlag, 10 edición. 2.9.4
- Keane, Robert E (2015). *Wildland fuel fundamentals and applications*. Springer. 2.8.1, 2.8.2, 2.8.3, 2.8.3
- Kelley, C Stuart (1975). Piloted ignition time of wood exposed to time-dependent radiation from pools of burning fuel. *Fire technology*, 11(2), 119–131. 3.6, 6
- Lamorlette, Aymeric (2014). Analytical modeling of solid material ignition under a radiant heat flux coming from a spreading fire front. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 6(4). 1.2.3, III, 4.1.4
- Lautenberger, CHRIS y Fernandez-Pello, AC (2005). Approximate analytical solutions for the transient mass loss rate and piloted ignition time of a radiatively heated solid in the high heat flux limit. *Fire Safety Science*, 8, 445–456. 4.1
- Lawson, D y Simms, D (1952). The Ignition of Wood by Radiation. *Brit. J. Appl. Phys.*, 3, 288–292. 1.2.3
- Li, Jing y Stoliarov, Stanislav I (2013). Measurement of kinetics and thermodynamics of the thermal degradation for non-charring polymers. *Combustion and Flame*, 160(7), 1287–1297. 4.1
- Manzello, Samuel L (2020). *Encyclopedia of Wildfires and Wildland-Urban Interface (WUI) Fires*. Springer. 1.1, 2.6.1
- Manzello, Samuel L; Almand, Kathleen; Guillaume, Eric; Vallerent, Stéphanie; Hameury, Stéphane; y Hakkarainen, Tuula (2018a). Forum position paper the growing global wildland urban interface (wui) fire dilemma: Priority needs for research. *Fire safety journal*, 100. 1.2.1

- Manzello, Samuel L; Blanchi, Raphaele; Gollner, Michael J; Gorham, Daniel; McAllister, Sara; Pastor, Elsa; Planas, Eulalia; Reszka, Pedro; y Suzuki, Sayaka (2018b). Summary of workshop large outdoor fires and the built environment. *Fire safety journal*, 100, 76–92. 1.1
- Manzello, Samuel L; Suzuki, Sayaka; Gollner, Michael J; y Fernandez-Pello, A Carlos (2020). Role of firebrand combustion in large outdoor fire spread. *Progress in energy and combustion science*, 76, 100801. 1.2.2
- Martin, S (1965). Diffusion-Controlled Ignition of Cellulosic Materials by Intense Radiant Energy. *Proc. Combust. Inst.*, 10, 877–896. 1.2.3
- Mikkola, Esko y Wichman, Indrek S. (1989). On the Thermal Ignition of Combustible Materials. *Fire Mater.*, 14(3), 87–96. 3.7.1
- Mindykowski, P; Fuentes, A; Consalvi, JL; y Porterie, B (2011). Piloted ignition of wildland fuels. *Fire Safety Journal*, 46(1-2), 34–40. 1.2.3, III, 3.6.1, 4.1.1, 4.1.1
- Mindykowski, Pierrick; Jørgensen, M; Svensson, Staffan; y Jomaas, Grunde (2019). A simple correlation for monitoring the ignition propensity of wet nordic spruce wood. *Fire safety journal*, 107, 186–192. 3.7
- Mishchenko, E.F. (2020). Differential equation, ordinary. encyclopedia of mathematics. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Differential_equation,_ordinary. Accedido 12/04/2021. 2.9.2
- Modest, Michael F (2013). *Radiative heat transfer*. Academic press. 2.3, 2.3.4, 2.4, 2.5, v, 3.3
- Mowrer, Frederick W (2004). Fundamentals of the fire hazards of materials. *Handbook of Building Materials for Fire Protection*. 2.6.5.1
- N. P. Cheney, CSIRO Division of Forestry (1995). Bushfires - an integral part of australia's environment. <https://www.abs.gov.au/ausstats/abs@.nsf/lookup/6c98bb75496a5ad1ca2569de00267e48>. Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- NationalGeographic (2019a). See how much of the amazon is burning, how it compares to other years. <https://www.nationalgeographic.com/environment/article/amazon-fires-cause-deforestation-graphic-map>. Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- NationalGeographic (2019b). Why the amazon doesn't really produce 20% of the world's oxygen. <https://www.nationalgeographic.com/environment/article/why-amazon-doesnt-produce-20-percent-worlds-oxygen>. Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- NFPA (2019). Largest fire losses in the united states. <https://www.nfpa.org/News-and-Research/Data-research-and-tools/US-Fire-Problem/Large-loss-fires-in-the-United-States/Largest-fire-losses-in-the-United-States>. Accedido 01/04/2021. 1.2.1
- Pechony, Olga y Shindell, Drew T (2010). Driving forces of global wildfires over the past millennium and the forthcoming century. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(45), 19167–19170. 1.1
- Quintiere, JG (1981). A Simplified Theory for Generalizing Results from a Radiant Panel Rate of Flame Spread Apparatus. *Fire Mater.*, 5, 52–60. 1.2.3
- Quintiere, James G (2006). *Fundamentals of fire phenomena*. John Wiley Chichester. 3.7.1, 4.1.1, 4.1.1, 4.2
- Reszka, P; Borowiec, P; Steinhaus, T; y Torero, JL (2012). A methodology for the estimation of ignition delay times in forest fire modelling. *Combustion and Flame*, 159(12), 3652–3657. 1.2.3, III, 3.7.2, 4.1.2, 4.2

- Reszka, Pedro y Fuentes, Andrés (2015). The great valparaiso fire and fire safety management in chile. *Fire Technology*, 51(4), 753–758. 1.2.1
- Rivera, J; Hernández, N; Consalvi, JL; Reszka, P; Contreras, J; y Fuentes, A (2020). Ignition of wildland fuels by idealized firebrands. *Fire Safety Journal*, (pp. 103036). 3.4, 3.7
- Sauer, FM (1956). *Ignition of Black Alpha-Cellulose Papers by Thermal Radiation*. Technical report, U.S. Department of Agriculture. Forest Service. Division of Fire Research. 1.2.3
- Simeoni, A.; Thomas, J.C.; Bartoli, P.; Borowieck, P.; Reszka, P.; Colella, F.; Santoni, P.A.; y Torero, J.L. (2012). Flammability Studies for Wildland and Wildland–Urban Interface Fires Applied to Pine Needles and Solid Polymers. *Fire Safety Journal*, 54, 203–217. 1.2.3
- Simms, D (1963). On the Pilot Ignition of Wood by Radiation. *Combust. Flame*, 7, 253–261. 1.2.3
- Spearpoint, Michael J y Quintiere, James G (2001). Predicting the piloted ignition of wood in the cone calorimeter using an integral model—effect of species, grain orientation and heat flux. *Fire safety journal*, 36(4), 391–415. 3.7, 4.1.1
- SpecialChem (2018). Pmma or acrylic: Guide to support your future ‘transparent’ developments. <https://omnexus.specialchem.com/selection-guide/polymethyl-methacrylate-pmma-acrylic-plastic>. Accedido 09/04/2021. 2.7
- Stein, Susan M; Menakis, James; Carr, MA; Comas, SJ; Stewart, SI; Cleveland, Helene; Bramwell, Lincon; y Radeloff, VC (2013). Wildfire, wildlands, and people: understanding and preparing for wildfire in the wildland-urban interface-a forests on the edge report. *Gen. Tech. Rep. RMRS-GTR-299*. Fort Collins, CO. US Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station. 36 p., 299. 1.1
- Sweigart, Al (2015). *Automate the Boring Stuff with Python: Practical Programming for Total Beginners*. No Starch Press, 1 edición. 2.11
- Tewarson, Archibald (2002). Generation of heat and chemical compounds in fires. *SFPE handbook of fire protection engineering*, (pp. 82–161). 3.2, 4.1.1
- Thomas, PH; Simms, DL; y Theobald, CR (1959). *The Interpretation of Some Experimental Data on the Ignition of Wood*. Technical report, Fire Research Station Research Note. 1.2.3
- Thurston, William; Tory, Kevin J; Fawcett, Robert JB; y Kepert, Jeffrey D (2016). Long-range spotting by bushfire plumes: The effects of plume dynamics and turbulence on firebrand trajectory. 1.2.2
- Torero, José (2015). Flaming ignition of solid fuels. In *SFPE handbook of fire protection engineering* chapter 21, (pp. 633–661). Springer. IV
- Torero, José (2016). Flaming ignition of solid fuels. In *SFPE handbook of fire protection engineering* (pp. 633–661). Springer. 2.2, 2.6.1, 2.6.3, 2.6.4.1, 2.6.5.2
- Vermesi, Izabella; DiDomizio, Matthew J; Richter, Franz; Weckman, Elizabeth J; y Rein, Guillermo (2017). Pyrolysis and spontaneous ignition of wood under transient irradiation: Experiments and a-priori predictions. *Fire Saf. J.*, 91, 218–225. 1.2.3
- Vermesi, Izabella; Roenner, Nils; Pironi, Paolo; Hadden, Rory M; y Rein, Guillermo (2016). Pyrolysis and ignition of a polymer by transient irradiation. *Combust. Flame*, 163, 31–41. 1.2.3
- Weatherford, W y Sheppard, D (1965). Basic Studies of the Mechanism of Ignition of Cellulosic Materials. *Proc. Combust. Inst.*, 10, 897–910. 1.2.3
- Weisstein, Eric W (2021a). .erf."from mathworld—a wolfram web resource. <https://mathworld.wolfram.com/Erf.html>. Accedido 10/04/2021. 2.9.5

- Weisstein, Eric W (2021b). "laplace transform."from mathworld—a wolfram web resource. *https : //mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html*. Accedido 09/04/2021. 2.9.3
- Weisstein, Eric W (2021c). "least squares fitting."from mathworld—a wolfram web resource. *https : //mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html*. Accedido 12/04/2021. 2.10.3
- Weisstein, Eric W (2021d). "taylor series."from mathworld—a wolfram web resource. *https : //mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html*. Accedido 09/04/2021. 2.9.1
- Zhai, Chunjie; Zhang, Siyu; Yao, Shuren; Zhan, Qingbin; Zhang, Shuifeng; y Wang, Yue (2019). Analytical study on ignition time of pmma exposed to time-decreasing thermal radiation using critical mass flux. *Scientific reports*, 9(1), 1–12. 1.2.3, 4.1.4, 4.2
- Zhang, Mingrui; Zhai, Chunjie; y Gong, Junhui (2019). Spontaneous ignition of thermally thin and intermediate pmma exposed to linearly increasing thermal radiation. In *2019 9th International Conference on Fire Science and Fire Protection Engineering (ICFSFPE)* (pp. 1–7).: IEEE. 1.2.3, 4.1.2, 4.1.2
- Çengel; Afshin J. Ghajar, Yunus A. (2011). *Transferencia de calor y masa. Fundamentos y aplicaciones*. Mc Graw Hill, cuarta edición. 2.1, 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3



A | Anexos

A.1. Código caso constante

```

from sympy import symbols, Function, dsolve, solve, nsolve, sqrt, Eq, exp, Derivative
from sympy import *
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d
import scipy.integrate as odeint
from scipy import optimize
import xlrd

''' ----- datos PMMA ----- '''
kappa = 960.5          # Coeficiente de absorción [-]
sigma = 5.67e-8         # Constante de Boltzmann [W/m^2 K^4]
Tinf = 300.0           # Temperatura del ambiente [K]
h = 10                 # Coeficiente de convección [W/m^2 K]
delta = 0.0098         # Camino libre promedio de la radiación [m]
rho = 1190.0           # Densidad de la muestra [kg/m^3]
cp = 1680.0            # Calor específico del material [J/kg K]
qincrit = 18000         # Calor incidente crítico de ignición [W/m^2]

''' ----- Lectura de datos ----- '''
loc = loc = (r"C:\Users\repar\OneDrive\Escritorio\Tesis\Datos.xls")
wb = xlrd.open_workbook(loc)
sheet = wb.sheet_by_index(0)
q_inc_list = []
for i in range(1,26):
    q_inc_list.append(sheet.cell_value(i, 0))    # Calor incidente [W/m^2*s]

# Parámetros de gráficos
fontsize=18
fontsize_ticks=15
fontsize_legend=13

# Creación de variables simbólicas
t, n, m, tprom, ddelta = symbols('t n m tprom ddelta')    # variables
y, Tprom = symbols('y Tprom', cls = Function)             # funciones

# Creación de listas
delta_list = np.linspace(0.0002, 0.0098, 72)
# Creación de listas para almacenar datos
tig_3dd_num, tig_3dd_aprx1, tig_3d_aprx1, tig_3d_num = ([[] for i in range(4)]
error_tig_simeoni_num, error_tig_simeoni_aprx = ([[] for i in range(2)]
ti,z,z2 = ([[],[],[],[]] for i in range(3))
# Creación de parámetros auxiliares para encontrar el espesor óptimo
best_num1, best_aprx11, best_num4, best_aprx14 = (0 for i in range(4))
aux_num1, aux_aprx11, aux_num4, aux_aprx14 = (100 for i in range(4))

# Función para obtener una unica solución real al buscar la temperatura crítica de ignición.
def sol_real(y, z):
    for x in y:
        if x.is_real and x.is_positive:
            z.append(x)

# Se comienza un ciclo para obtener información para cada penetración de la radiación impuesta
for kk in delta_list:
    # Se calcula la absorptividad según la penetración
    ab = 1 - exp(-2*kappa*kk)    # Absortividad del medio [-]
    # Cálculo del coeficiente de transferencia de calor combinando radiación y convección
    ht = 8*ab*sigma*Tinf**3 + h

''' ----- Solución Particular de EDO ----- '''
fun_heat = n

```

```

expr1 = -(ht/(rho*cp*ddelta))*(Tprom(t)-Tinf)+((ab)/(rho*cp*ddelta))*fun_heat
sol_aprox = dsolve(Eq(Derivative(Tprom(t), t), expr1), Tprom(t), ics={Tprom(0): Tinf})

''' ----- Temperatura de ignición crítica -----'''
# Versión aproximada
expr11 = -(2*ab)*sigma*(tprom**4-Tinf**4)+(ab)*qinccrit
Tig_list1 = solve(expr11,tprom)
Tigapprox = []
sol_real(Tig_list1, Tigapprox)

# Versión exacta
expr2 = (ab)*qinccrit - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf)
Tig_list2 = solve(expr2,tprom)
Tignum = []
sol_real(Tig_list2, Tignum)

# Mostarar por pantalla el resultado
print(' ')
print('La temperatura de ignición crítica numérica es: ' + str(round(Tignum[0],2)) + ' K')
print('La temperatura de ignición crítica aproximada es: ' + str(round(Tigapprox[0],2)) + ' K')

# Creación de listas para recolección de datos temporales en cada ciclo
Data1aprox, Data2aprox, Data1num, Data2num, Data_mindy1, Data_mindy2,\
Data_quintiere_thin1, Data_quintiere_thin2, Data_simeoni1, Data_simeoni2, Data_atreya1,\
Data_atreya2, Data_tewarson1, Data_tewarson2, Data_spear1, Data_spear2,\
Data_deli1, Data_deli2 = ([] for i in range(18))

j = 0 # contador
for i in q_inc_list:
    j = j+1
    print('-----')
    print(' ')
    print(list(delta_list).index(kk))
    print('los resultados de la iteración ' + str(j) + ' son: ')
    print('El calor incidente por segundo: ' + str(i) + ' [W/m^2*s]')
    print('El espesor de penetración es: ' + str(kk) + ' [m]')

''' ----- Solución numérica exacta -----'''
T_0 = np.array([Tinf])
def energy_eq(t,tprom):
    return ((ab)*(i) - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf))/(kk*rho*cp)
expr_t_span = int(1500*exp(-0.1*j))
sol_energy = odeint.solve_ivp(energy_eq, t_span=[0, expr_t_span], y0=T_0,
                             t_eval=np.linspace(0, expr_t_span, expr_t_span+1),
                             dense_output=True, first_step=0.2, max_step=10)
interpol = interp1d(sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])],np.transpose(sol_energy.y[0]),
                    fill_value="extrapolate", kind='linear')
x = sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])]
interp_fn = lambda x: interpol(x) - float(Tignum[0])
tig = optimize.newton(interp_fn, 1, maxiter=2000)
print('El tiempo de ignición exacto numérico es: ' + str(tig) + " [s]")

''' ----- Solución analítica aproximada -----'''
tigaprox = nsolve(sol_aprox.subs([(n,i), (ddelta, kk)]).rhs - Tigapprox[0], (0,10))
print('El tiempo de ignición aproximado algebraico es: ' + str(tigaprox) + " [s]")

''' ----- Modelo de mindykowski2010 (thin) -----'''
ab_M, Tigmindy = (0.8646), []
hm = (10+8*ab_M*sigma*Tinf**3)
Temp_mindy = Tinf + ((ab_M*n)/hm)*(1-exp(-hm*t/(delta*rho*cp)))
exprmindy = qinccrit - 2*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - 10/ab_M*(tprom-Tinf)
Tig_listmindy = solve(exprmindy,tprom)
sol_real(Tig_listmindy, Tigmindy)
tig_mindy = nsolve(Temp_mindy.subs(n,i) - Tigmindy[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición de mindykowski es: ' + str(tig_mindy) + " [s]")

''' ----- Modelo de Quintiere (thin) -----'''
h_Q, Tigquin = (16), []
exprquin = (qinccrit - sigma*(tprom**4-Tinf**4) - 10*(tprom-Tinf))
Tig_listquin = solve(exprquin,tprom)
sol_real(Tig_listquin, Tigquin)
Temp_quintiere_thin = Tinf + n/h_Q*(1-exp(-h_Q*t/(delta*rho*cp)))
tig_quintiere_thin = nsolve(Temp_quintiere_thin.subs(n,i) - Tigquin[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición de Quintiere es: ' + str(tig_quintiere_thin) + " [s]")

''' ----- Modelo de Delichatsios (thin) -----'''

```

```

exprdel ,Tigdel= (qincrcrit - sigma*(tprom**4-Tinf**4) - 10*(tprom-Tinf)), []
Tig_listdel = solve(exprdel,tprom)
sol_real(Tig_listdel, Tigdel)
tig_del_thin = (Tigdel[0]- Tinf)*rho*cp*delta/(i-0.3*qincrcrit)
print('El tiempo de ignición de Delichatsios es: ' + str(tig_del_thin) + " [s]" )

''' ----- Modelo standard (thick) -----'''
Lambda, ab_S = 0.336, 1
tig_simeoni = (np.pi/4)*(Lambda*rho*cp)*(Tigapprox[0]-Tinf)**2/((i*ab_S)**2)
print('El tiempo de ignición de Modelo Standard es: ' + str(tig_simeoni) + " [s]" )

''' ----- Modelo de Atreya (thick) -----'''
Tigatreya = Tigapprox[0]
theta_A = Tigatreya-Tinf
M_A, S_A, r_A= ((2*Lambda*rho*cp)/(3)), (-25/3*sigma*Tinf**2), (-h + 4*sigma*Tinf**3))
beta_A, F_A = (r_A**2 - 4*S_A*i), (i - h*theta_A - sigma*((theta_A + Tinf)**4 - Tinf**4))
aux1_A = (2*S_A*theta_A + r_A - sqrt(beta_A))*(r_A + sqrt(beta_A))
aux2_A = (2*S_A*theta_A + r_A + sqrt(beta_A))*(r_A - sqrt(beta_A))
tig_atreya = M_A*((theta_A/F_A)**2/2 - theta_A*(r_A + 2*S_A*theta_A)/(beta_A*F_A)\
+ r_A/beta_A**(3/2)*log(aux1_A/aux2_A))
print('El tiempo de ignición de Atreya es: ' + str(tig_atreya) + " [s]" )

''' ----- Modelo de Tewarson / delichatsios (thick) -----'''
qcrit_T, TRP = 11000, 274000
tig_tewarson = np.pi/4*(TRP/(i-qcrit_T))**2
print('El tiempo de ignición de Tewarson es: ' + str(tig_tewarson) + " [s]" )

''' ----- Modelo de Spearpoint (thick) -----'''
Big_Sp, Tigspear = qincrcrit/i, Tigapprox[0]
tig_spear = 4/3*(Lambda*rho*cp)*(1/((2-Big_Sp)*(1-Big_Sp)))*((Tigspear-Tinf)/i)**2
print('El tiempo de ignición de Spearpoint es: ' + str(tig_spear) + " [s]" )

''' ----- Modelo de Staggs (thick) -----'''
tig_staggs = Lambda*rho*cp*(Tigapprox[0]-Tinf)**2/(2*(ab*i)**2)
print('El tiempo de ignición de Staggs es: ' + str(tig_staggs) + " [s]" )
print('-----')

# Ciclo para encontrar el mejor ajuste del modelo thermally thick al compararlo
# a cada modelo de referencia.
if j==24:
    error_tig_num = abs(round((tig_mindy-tig)*100/tig_mindy,2))
    error_tig_aprx = abs(round((tig_mindy-tigaprox)*100/tig_mindy,2))
    if error_tig_num <= aux_num1:
        aux_num1, best_num1 = error_tig_num, kk
        best_index_num = list(delta_list).index(best_num1)
    if error_tig_aprx <= aux_aprx11:
        aux_aprx11, best_aprx11 = error_tig_aprx, kk
        best_index_aprx1 = list(delta_list).index(best_aprx11)

    error_tig_simeoni_num = abs(round((tig_simeoni-tig)*100/tig_simeoni,2))
    error_tig_simeoni_aprx = abs(round((tig_simeoni-tigaprox)*100/tig_simeoni,2))
    if error_tig_simeoni_num <= aux_num4:
        aux_num4, best_num4 = error_tig_simeoni_num, kk
    if error_tig_simeoni_aprx <= aux_aprx14:
        aux_aprx14, best_aprx14 = error_tig_simeoni_aprx, kk

''' ----- Gráfico Temperatura en el tiempo -----'''
evaluables = [22000,30000,40000,50000]
for pip in range(0,len(evaluables)):
    if i==evaluables[pip] and kk==0.0098:
        Taprox_list = []
        for rr in range(0,len(sol_energy.t)):
            Taprox_list = np.append(Taprox_list,
            [float(sol_aprox.subs([(t,sol_energy.t[rr]),
            (n,i), (ddelta, kk)]).rhs)],axis=0)
            ti[pip], z[pip], z2[pip] = sol_energy.t, sol_energy.y, Taprox_list

if i==50000 and kk==0.0098:
    Tigaprx, Tigaprx2 = ([] for i in range(2))
    Tigaprx.append(Tignum[0])
    Tigaprx2.append(Tigapprox[0])

# Gráfico de temperatura de la muestra en el tiempo
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import MultipleLocator
import numpy as np

```

```

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
c1 = ['tab:blue','tab:green','goldenrod','firebrick']
c2 = ['tab:cyan','tab:olive','gold','tab:red']
for pip in range(len(evaluables)-1,-1,-1):
    plt.plot(ti[pip], z[pip].T, c=c1[pip], label='Exact $q_0$ = \'
        +str(evaluables[pip]/1000) +\' $kW/m^2$', linewidth=2)
    plt.plot(ti[pip], z2[pip].T, '--', c=c2[pip], label='Approx $q_0$ = \'
        +str(evaluables[pip]/1000) +\' $kW/m^2$', linewidth=2)
plt.plot(np.linspace(0, 500, 501), Tigaprx*501, '--k',
    label='$\overline{T}_{ig}$ exact', linewidth=1)
plt.plot(np.linspace(0, 500, 501), Tigaprx2*501, ':', color='grey',
    label='$\overline{T}_{ig}$ approx', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.ylim(300,950), plt.xlim(0,500)
plt.xlabel('Time (s)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$\overline{T}_{ig}$ (t) (K)', fontsize=fontsize)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend, ncol=2)

''' ----- Recolección de resultados para graficar ----- '''
tig_list = [tigaprox,tig,tig_mindy,tig_quintiere_thin,tig_simeoni,tig_atreya,
    tig_tewarson,tig_spear,tig_del_thin]
recollect_list1 = [Data1aprox,Data1num,Data_mindy1,Data_quintiere_thin1,
    Data_simeoni1,Data_atreya1,Data_tewarson1,Data_spear1,Data_deli1]
recollect_list2 = [Data2aprox,Data2num,Data_mindy2,Data_quintiere_thin2,
    Data_simeoni2,Data_atreya2,Data_tewarson2,Data_spear2,Data_deli2]
for s,o in zip(tig_list,recollect_list1):
    o.append(s)
for s,o in zip(tig_list,recollect_list2):
    o.append(1/s)
tig_3dd_num.append(Data1num)
tig_3dd_aprx1.append(Data1aprox)
tig_3d_num.append(Data2num)
tig_3d_aprx1.append(Data2aprox)

''' ----- creación de listas para graficar ----- '''
q_inc_list = [x/1000 for x in q_inc_list]
# Resultado del mejor delta
Best_data_num = tig_3dd_num[list(delta_list).index(best_num4)-1]
Best_data_aprx = tig_3dd_aprx1[list(delta_list).index(best_aprx14)-1]
# Creación de data adimensional
tau_exp=(delta*rho*cp*(665-Tinf))/((ab)*qincrcrit)
tau_tig_exp1 = [tau_exp/element for element in Data_mindy1]
Q_adim_exp1 = [(element*1000.0/(qincrcrit)) for element in q_inc_list]
tau2 = ht*(Tigaprox[0]-Tinf)/(ab*qincrcrit)
Qadim2 = [1/(np.log(float(element*1000/qincrcrit))-np.log(float(element*1000/qincrcrit-tau2)))]\
    for element in q_inc_list]

''' ----- propiedades efectivas ----- '''
from scipy.optimize import curve_fit
def func(x, n, m): return n+m*x
popt_num, pcov_num = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp1), np.array(tig_3d_num[best_index_num]))
popt_aprx, pcov_aprx = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp1), np.array(tig_3d_aprx1[best_index_aprx1]))
popt_mindy, pcov_mindy = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp1), np.array(Data_mindy2))
eff_mindy = (ab)*qincrcrit/(best_num1*(Tignum[0]-Tinf)*popt_mindy[1])
eff_num = (ab)*qincrcrit/(best_num1*(Tignum[0]-Tinf)*popt_num[1])
eff_aprx = (ab)*qincrcrit/(best_aprx11*(Tigaprox[0]-Tinf)*popt_aprx[1])
print('Standard effective prop: '+ str(rho*cp))
print('Mindykowski effective prop: '+str(eff_mindy)+' ('+str(abs(eff_mindy-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %)')
print('Exact analytical effective prop: '+str(eff_num)+' ('+str(abs(eff_num-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %)')
print('Approx analytical effective prop: '+str(eff_aprx)+' ('+str(abs(eff_aprx-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %)')

''' ----- GRÁFICOS ----- '''
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

''' ----- gráfico tig vs qinc (THIN) ----- '''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(q_inc_list, Data_mindy1, 'oc', label='Mindykowski et al. [25]')
plt.plot(q_inc_list, Data_quintiere_thin1, 'P', color='orange', label='Quintiere et al. (thin) [13]')
plt.plot(q_inc_list, Data_deli1, 'p', color='thistle', label='Delichatsios et al.[46]')
plt.plot(q_inc_list, Data1num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(q_inc_list, Data1aprox, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)

```

```

plt.axvline(qincrcrit/1000, 0, 1.0, c='k',linestyle='dotted', linewidth=1)
plt.text(0.25, 0.3, '$\dot{q}_{crit}$', transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top')
plt.xlabel('Incident heat flux ($kW/m^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(2))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.ylim(0,1000), plt.xlim(0,65)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc (THICK) -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(q_inc_list, Data_simeoni1, 'dy', label='Standard model [13]')
plt.plot(q_inc_list, Data_atreya1, 'h', color= 'purple', label='Atreya et al. [14]')
plt.plot(q_inc_list, Data_tewarson1, 'H', color= 'gray', label='Tewarson et al. [36]')
plt.plot(q_inc_list, Data_spear1, 's', color= 'teal', label='Spearpoint et al. [43]')
plt.plot(q_inc_list, Best_data_num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(q_inc_list, Best_data_aprx, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.axvline(qincrcrit/1000, 0, 1.0, c='k',linestyle='dotted', linewidth=1)
plt.text(0.25, 0.3, '$\dot{q}_{crit}$', transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top')
plt.xlabel('Incident heat flux ($kW/m^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(2))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.ylim(0,500), plt.xlim(0,65)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc para cada delta -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
for i in range(1,delta_list.shape[0]-1):
    plt.plot(q_inc_list, tig_3dd_num[i], color=mcolors.hsv_to_rgb((0.5,i/(40*delta_list.shape[0]), 0.6)),
             alpha=1, linewidth=3.5)
plt.plot(q_inc_list, Data_simeoni1, 'dy', label='Standard model. [13]', linewidth=4)
plt.plot(q_inc_list, Data_atreya1, 'h', color= 'purple', label='Atreya et al. [14]')
plt.plot(q_inc_list, Data_tewarson1, 'H', color= 'dimgray', label='Tewarson et al. [36]')
plt.plot(q_inc_list, Data_spear1, 's', color= 'teal', label='Spearpoint et al. [43]')
plt.plot(q_inc_list, tig_3dd_num[0], '-.r', alpha=1, label='$\delta=0.1$' + ' mm', linewidth=3)
plt.plot(q_inc_list, tig_3dd_num[delta_list.shape[0]-1], '--b', label='$\delta=9.8$' + ' mm', linewidth=3)
plt.axvline(qincrcrit/1000, 0, 1.0, c='k',linestyle='dotted', linewidth=2)
plt.text(0.285, 0.2, '$\dot{q}_{crit}$', transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top')
plt.xlabel('Incident heat flux ($kW/m^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
best_str4= best_num4*1000 # simeoni
textstr4 = '$\mathrm{\delta}_{Standard}=\%5.2f$' % best_str4 + ' mm'
plt.text(0.14, 0.61, textstr4, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=11,verticalalignment='top', bbox=props)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(25))
plt.ylim(0,600), plt.xlim(-10,80)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(q_inc_list,Data_mindy2,'oc',label='Mindykowski et al. [25]')
plt.plot(q_inc_list,Data_quintiere_thin2,'8',color='orange',label='Quintiere et al. (thin) [13]',linewidth=4)
plt.plot(q_inc_list,Data_deli2,'p', color= 'thistle', label='Delichatsios et al. [46]')
plt.plot(q_inc_list,Data2num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(q_inc_list,Data2aprox, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.axvline(18, 0, 1.0, c='k',linestyle='dotted', linewidth=1)
plt.xlabel('Incident heat flux ($kW/m^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}$ $(s^{-1})$', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.001))
plt.xlim(0,70)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(Q_adim_exp1, Data_mindy2, 'ok', label='Mindykowski et al. [25]')

```

```

plt.plot(Q_adim_exp1, Data2num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(Q_adim_exp1, Data2aprox, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.axvline(1, 0, 1.0, c='k', linestyle='dotted', linewidth=1)
plt.xlabel('$q_{inc}/q_{crit}$ ', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{fig}$ $(s^{-1})$', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.001))
plt.xlim(0,4)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- Gráfico adimensional 1 ----- '''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
xdata, ydata = np.array(Q_adim_exp1), np.array(tau_tig_exp1)
plt.plot(xdata, ydata, 'ok', label='Mindykowski et al. [25]', mfc='none')
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
# Fit for the parameters a, b, c of the function func:
popt, pcov = curve_fit(func, xdata, ydata)
# obtención de r^2
residuals = ydata - func(xdata, *popt)
ss_res, ss_tot, = np.sum(residuals**2), np.sum((ydata - np.mean(ydata))**2)
r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
plt.plot(xdata, func(xdata, *popt), '--m', label='Best Fit : n=%5.3f, m=%5.3f' % tuple(popt))
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
textstr = '$\mathrm{R}^2$=%5.3f' % r_squared
plt.text(0.7, 0.6, textstr, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14, verticalalignment='top', bbox=props)
plt.xlim(0,4)
plt.xlabel(r'$q_{inc}/q_{crit}$ ', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$\tau/t_{fig}$ ', fontsize=20)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

```

A.2. Código caso lineal

```

from sympy import symbols, Function, dsolve, solve, nsolve, sqrt, Eq, exp, Derivative
from sympy import *
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d
import scipy.integrate as odeint
from scipy import optimize
import xlrd

''' ----- datos PMMA ----- '''
kappa = 960.5          # Coeficiente de absorción [-]
sigma = 5.67e-8        # Constante de Boltzmann [W/m^2 K^4]
Tinf = 300.0          # Temperatura del ambiente [K]
h = 10                # Coeficiente de convección [W/m^2 K]
delta = 0.0098        # Camino libre promedio de la radiación [m]
rho = 1190.0          # Densidad de la muestra [kg/m^3]
cp = 1680.0           # Calor específico del material [J/kg K]
qincrcrit = 18000      # Calor incidente crítico de ignición [W/m^2]
q_0 = 0               # Calor incidente inicial [W/m^2]

''' ----- Lectura de datos ----- '''
loc = loc = (r"C:\Users\repar\OneDrive\Escritorio\Tesis\Datos.xls")
wb = xlrd.open_workbook(loc)
sheet = wb.sheet_by_index(1)
ramp_list, tig_exp, ramp_zhang, tig_zhang, ramp_exp_zhang, exp_zhang = ([ ] for i in range(6))
for i in range(1,30):
    ramp_list.append(sheet.cell_value(i, 0))    # Aumento del Calor incidente [W/m^2*s]
    tig_exp.append(sheet.cell_value(i, 1))      # Datos experimentales de Reszka
for i in range(1,75):
    ramp_zhang.append(sheet.cell_value(i, 2))   # Datos numéricos de Zhang
    tig_zhang.append(sheet.cell_value(i, 3))
for i in range(1,7):
    ramp_exp_zhang.append(sheet.cell_value(i, 4)) # Datos experimentales de Zhang
    exp_zhang.append(sheet.cell_value(i, 5))

```

```

# Parámetros de gráficos
fontsize=18
fontsize_ticks=15
fontsize_legend=13

# Creación de variables simbólicas
t, n, m, tprom, ddelta = symbols('t n m tprom ddelta')      # variables
y, Tprom = symbols('y Tprom', cls = Function)               # funciones

''' ----- Solución Gong2020 dec lineal ----- '''
Lambda = 0.336
Tinf_G = 283
cp_G = 1700.0
h_G = 37.8
alpha_G = Lambda/(rho*cp_G)
delta_L = h_G/Lambda
C_aux = alpha_G*delta_L**2
Temp_gong = Tinf_G + 1/h_G*(m*t-m/(C_aux)*(exp(C_aux*t)*erfc(delta_L*sqrt(alpha_G*t))\
- 1 + 2*delta_L*sqrt(alpha_G*t)/sqrt(3.14159265359)))

# Creación de listas
delta_list = np.linspace(0.0001, 0.0098, 72)
# Creación de listas para almacenar datos
tig_3d_aprx1, tig_3d_aprx2, tig_3d_num = ([[] for i in range(3)])
ti,z,z2 = ([[],[],[]] for i in range(3))
# Creación de parámetros auxiliares para encontrar el espesor óptimo
best_num1, best_aprx11, best_num2, best_aprx12, best_num3, best_aprx13,\
best_num4, best_aprx14, best_num5, best_aprx15 = (0 for i in range(10))
aux_num1, aux_aprx11, aux_num2, aux_aprx12, aux_num3, aux_aprx13, aux_num4,\
aux_aprx14, aux_num5, aux_aprx15 = (100 for i in range(10))

# Función para obtener una unica solución real al buscar la temperatura crítica de ignición.
def sol_real(y, z):
    for x in y:
        if x.is_real and x.is_positive:
            z.append(x)

# Se comienza un ciclo para obtener información para cada penetración de la radiación impuesta
for kk in delta_list:
    # Se calcula la absorptividad según la penetración
    ab = 1 - exp(-2*kappa*kk) # Absortividad del medio [-]
    # Cálculo del coeficiente de transferencia de calor combinando radiación y convección
    ht = 8*ab*sigma*Tinf**3 + h

    ''' ----- Solución Particular de EDO ----- '''
    fun_heat = n*m*t
    expr1 = -(ht/(rho*cp*ddelta))*(Tprom(t)-Tinf)+((ab)/(rho*cp*ddelta))*fun_heat
    sol_aprox = dsolve(Eq(Derivative(Tprom(t), t), expr1), Tprom(t), ics={Tprom(0): Tinf})

    ''' ----- Temperatura de ignición crítica ----- '''
    # Versión aproximada
    expr11 = -(2*ab)*sigma*(tprom**4-Tinf**4)+(ab)*qinccrit
    Tig_list1 = solve(expr11,tprom)
    Tigapprox = []
    sol_real(Tig_list1, Tigapprox)

    # Versión exacta
    expr2 = (ab)*qinccrit - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf)
    Tig_list2 = solve(expr2,tprom)
    Tignum = []
    sol_real(Tig_list2, Tignum)

    # Mostrar por pantalla el resultado
    print(' ')
    print('La temperatura de ignición crítica numérica es: ' + str(round(Tignum[0],2)) + ' K')
    print('La temperatura de ignición crítica aproximada es: ' + str(round(Tigapprox[0],2)) + ' K')

    # Creación de listas para recolección de datos temporales en cada ciclo
    Data1aprox,Data2aprox,Data3aprox,Data1aprox2,Data2aprox2,Data3aprox2,Data1num,\
    Data2num,Data3num,Data_reszka1,Data_reszka2,Data_reszka3,Data_zhai1,Data_zhai2,Data_zhai3,\
    Data_gong1,Data_gong2,Data_gong3,Data_ji1,Data_ji2,Data_ji3,tau_num_list,tau_aprox_list,\
    Q_adim_list = ([[] for i in range(24)])

    j = 0 # contador
    print('El calor incidente inicial es: ' + str(q_0) + ' W/m^2')
    for i in ramp_list:
        j= j+1

```

```

print('-----')
print(' ')
print(list(delta_list).index(kk))
print('los resultados de la iteración ' + str(j) + ' son: ')
print('El aumento del calor incidente por segundo es: ' + str(i) + ' [W/m^2*s]')
print('El espesor de penetración es: ' + str(kk) + ' [m]')

''' ----- Solución numérica exacta -----'''
T_0 = np.array([Tinf])
def energy_eq(t,tprom):
    return ((ab)*(q_0+i*t) - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf))/(kk*rho*cp)
expr_t_span = int(1500*exp(-0.1*j))
sol_energy = odeint.solve_ivp(energy_eq, t_span=[0, expr_t_span], y0=T_0,
                             t_eval=np.linspace(0, expr_t_span, expr_t_span+1),
                             dense_output=True, first_step=0.2, max_step=10)
interpol = interp1d(sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])],np.transpose(sol_energy.y[0]),
                    fill_value="extrapolate", kind='linear')
x = sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])]
interp_fn = lambda x: interpol(x) - float(695)
tig = optimize.newton(interp_fn, 40, maxiter=2000)
print('El tiempo de ignición exacto numérico es: ' + str(tig) + " [s]")

''' ----- Solución analítica aproximada -----'''
tigaprox = nsolve(sol_aprox.subs([(n,q_0), (m,i), (ddelta, kk)]).rhs - 695, (0,tig))
print('El tiempo de ignición aproximado algebraico es: ' + str(tigaprox) + " [s]")

''' ----- Modelo de Reszka (thick) -----'''
Lambda_R, rho_R, cp_R, h_R = 0.280,1200.0,2100.0,10
aux_R = (Lambda_R*rho_R*cp_R)
Temp_reszka = Tinf + 2*m*t/(3*sqrt(np.pi))*(2*t**(1/2)/(aux_R)**(1/2)-h_R**2*t**(3/2)/(aux_R)**(3/2))
tig_reszka = nsolve(Temp_reszka.subs(m,i) - 699, (0,tig+207), tol=2.16840434497100886801e-5)
print('El tiempo de ignición de Reszka es: ' + str(tig_reszka) + " segundos" )

''' ----- Modelo de Zhai2019 (thick) -----'''
Lambda , cp_Z = 0.336,1700.0
Temp_zhai = Tinf + (2/3)*2*sqrt(t/(np.pi*Lambda*rho*cp_Z))*m*t
tig_zhai = nsolve(Temp_zhai.subs(m,i) - Tigapprox[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición de Zhai es: ' + str(tig_zhai) + " segundos" )

''' ----- Modelo de Gong2020 (thick) -----'''
tig_gong = nsolve(Temp_gong.subs(m,i) - 618.6, (0,tig))
print('El tiempo de ignición de Gong es: ' + str(tig_gong) + " segundos" )

''' ----- Modelo de Ji (thick) -----'''
tig_ji = (4/3*Lambda*rho*cp)**(1/3)*((Tigapprox[0]-Tinf)/(0.5*i))**(2/3)
print('El tiempo de ignición de Ji es: ' + str(tig_ji) + " segundos" )
print('-----')

# Ciclo para encontrar el mejor ajuste del modelo thermally thick al compararlo
# a cada modelo de referencia.
if j==24:
    error_tig_exp_num = abs(round((tig_exp[list(ramp_list).index(i)]-tig)*100/tig_exp[list(ramp_list).index(i)],2))
    error_tig_exp_aprx = abs(round((tig_exp[list(ramp_list).index(i)]-tigaprox)*100/tig_exp[list(ramp_list).index(i)],2))
    if error_tig_exp_num <= aux_num1:
        aux_num1,best_index_num = error_tig_exp_num, kk,j-1
    if error_tig_exp_aprx <= aux_aprx11:
        aux_aprx11,best_aprx11,best_index_aprx1 = error_tig_exp_aprx,kk,j-1
    error_tig_reszka_num = abs(round((tig_reszka-tig)*100/tig_reszka,2))
    error_tig_reszka_aprx = abs(round((tig_reszka-tigaprox)*100/tig_reszka,2))
    if error_tig_reszka_num <= aux_num2:
        aux_num2,best_num2 = error_tig_reszka_num,kk
    if error_tig_reszka_aprx <= aux_aprx12:
        aux_aprx12,best_aprx12 = error_tig_reszka_aprx,kk
    error_tig_zhai_num = abs(round((tig_zhai-tig)*100/tig_zhai,2))
    error_tig_zhai_aprx = abs(round((tig_zhai-tigaprox)*100/tig_zhai,2))
    if error_tig_zhai_num <= aux_num3:
        aux_num3,best_num3 = error_tig_zhai_num,kk
    if error_tig_zhai_aprx <= aux_aprx13:
        aux_aprx13,best_aprx13 = error_tig_zhai_aprx,kk
    error_tig_gong_num = abs(round((tig_gong-tig)*100/tig_gong,2))
    error_tig_gong_aprx = abs(round((tig_gong-tigaprox)*100/tig_gong,2))
    if error_tig_gong_num <= aux_num4:
        aux_num4,best_num4 = error_tig_gong_num,kk
    if error_tig_gong_aprx <= aux_aprx14:
        aux_aprx14,best_aprx14 = error_tig_gong_aprx,kk
    error_tig_ji_num = abs(round((tig_ji-tig)*100/tig_ji,2))

```

```

error_tig_ji_aprx = abs(round((tig_ji-tigaprox)*100/tig_ji,2))
if error_tig_ji_num <= aux_num5:
    aux_num5,best_num5 = error_tig_ji_num,kk
if error_tig_ji_aprx <= aux_aprx15:
    aux_aprx15,best_aprx15 = error_tig_ji_aprx,kk

''' ----- Gráfico Temperatura en el tiempo -----'''
evaluables = [500,1000,2000,3000]
for pip in range(0,len(evaluables)):
    if i==evaluables[pip] and kk==0.0098:
        Taprox_list = []
        for rr in range(0,len(sol_energy.t)):
            Taprox_list = np.append(Taprox_list,
                [float(sol_aprox.subs([(t, sol_energy.t[rr]), (n,q_0), (m,i),
                    (ddelta, kk)]).rhs)],axis=0)
            ti[pip], z[pip], z2[pip] = sol_energy.t, sol_energy.y, Taprox_list

if i==3000 and kk==0.0098:
    Tigaprx, Tigaprx2 = ([ for i in range(2)])
    Tigaprx.append(Tignum[0])
    Tigaprx2.append(Tigaprox[0])

# Gráfico de temperatura de la muestra en el tiempo
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import MultipleLocator
import numpy as np
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
c1 = ['tab:blue','tab:green','goldenrod','firebrick']
c2 = ['tab:cyan','tab:olive','gold','tab:red']
for pip in range(len(evaluables)-1,-1,-1):
    plt.plot(ti[pip], z[pip].T, c=c1[pip], label='Exact $q_0$ = \'
        +str(evaluables[pip]/1000) +\' $kW/m^2$', linewidth=2)
    plt.plot(ti[pip], z2[pip].T, '--', c=c2[pip], label='Approx $q_0$ = \'
        +str(evaluables[pip]/1000) +\' $kW/m^2$', linewidth=2)
plt.plot(np.linspace(0, 400, 401), Tigaprx*401, '--k',
    label = '$\overline{T}_{fig}$ exact', linewidth=1 )
plt.plot(np.linspace(0, 400, 401), Tigaprx2*401, ':', color='grey',
    label = '$\overline{T}_{fig}$ approx', linewidth=2 )
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.ylim(300,1100),plt.xlim(0,280)
lim=plt.gca().get_ylim()
plt.xlabel('Time (s)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$\overline{T}(t)$ (K)', fontsize=fontsize)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=4, fontsize=fontsize_legend, ncol=2)
# Generate data for the zoomed portion
if i==3000:
    ti_detail,z_detail,z2_detail = sol_energy.t[53:63],sol_energy.y[0][61:71],Taprox_list[61:71]
    sub_axes = plt.axes([.18, .68, .18, .18])
    # plot the zoomed portion
    sub_axes.plot(ti_detail,z_detail,color='firebrick',label='Numeric solution',linewidth=2)
    sub_axes.plot(ti_detail,z2_detail, '--',color='tab:red',label='Approx solution',linewidth=2)
    sub_axes.plot(ti_detail,Tigaprx*len(ti_detail), '--k',label = '$\overline{T}_{fig}$ numeric')
    sub_axes.plot(ti_detail,Tigaprx2*len(ti_detail), ':',color='grey', label = '$\overline{T}_{fig}$ approx')
    sub_axes.axvline(tigaprox-8,0,(Tigaprox[0]+100)/(lim[1]),c='k',linestyle='dashed',linewidth=0.6)
    sub_axes.axvline(tig-8,0,(Tignum[0]-180)/(lim[1]),c='k',linestyle='dashed',linewidth=0.6)
    sub_axes.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(1))
    sub_axes.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))

''' ----- Recolección de resultados para graficar -----'''
tig_list = [tigaprox,tig,tig_reszka,tig_zhai,tig_gong,tig_ji]
recollect_list1 = [Data1aprox,Data1num,Data_reszka1,Data_zhai1,Data_gong1,Data_ji1]
recollect_list2 = [Data2aprox,Data2num,Data_reszka2,Data_zhai2,Data_gong2,Data_ji2]
for s,o in zip(tig_list,recollect_list1):
    o.append(s)
for s,o in zip(tig_list,recollect_list2):
    o.append(1/s)
tig_3d_num.append(Data1num)
tig_3d_aprx1.append(Data1aprox)

''' ----- creación de listas para graficar -----'''
ramp_list2=[x for x in ramp_list]
ramp_list=[x/1000 for x in ramp_list]
tig_exp2_inverso = [1/element for element in tig_exp]

```

```

# Resultado del mejor delta
Best_data_num = tig_3d_num[list(delta_list).index(best_num1)-1]
Best_data_num2 = [1/element for element in Best_data_num]
Best_data_aprx = tig_3d_aprx1[list(delta_list).index(best_aprx11)-1]
Best_data_aprx_inv = [1/element for element in Best_data_aprx]
Best_data2_num2 = [1/element**2 for element in Best_data_num]
Best_data2_aprx_inv = [1/element**2 for element in Best_data_aprx]
# Creación de data adimensional
tau_exp=(2*best_num1*rho*cp*(Tigapprox[0]-Tinf))/((ab)*qinccrit)
tau_tig_exp1 = [(tau_exp)**(1/2)/element for element in tig_exp]
tau_tig_exp2 = [(element)**2 for element in tig_exp2_inverso]
Q_adim_exp1 = [(element*1000.0/(qinccrit))**(1/2) for element in ramp_list]
Q_adim_exp2 = [(element*1000.0/(qinccrit)) for element in ramp_list]

''' ----- propiedades efectivas -----'''
from scipy.optimize import curve_fit
def func(x, n, m): return n*m*x
popt_num, pcov_num = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(Best_data2_num2))
popt_aprx, pcov_aprx = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(Best_data2_aprx_inv))
popt_exp, pcov_exp = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(tau_tig_exp2))
eff_exp = (ab)*qinccrit/(2*best_num1*(Tignum[0]-Tinf)*popt_exp[1])
eff_num = (ab)*qinccrit/(2*best_num1*(Tignum[0]-Tinf)*popt_num[1])
eff_aprx = (ab)*qinccrit/(2*best_aprx11*(Tigapprox[0]-Tinf)*popt_aprx[1])
print('Standard effective prop: '+str(rho*cp))
print('Experimental effective prop: '+str(eff_exp)+' ('+str(abs(eff_exp-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')
print('Exact analytical effective prop: '+str(eff_num)+' ('+str(abs(eff_num-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')
print('Approx analytical effective prop: '+str(eff_aprx)+' ('+str(abs(eff_aprx-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')

''' ----- GRÁFICOS -----'''
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

''' ----- gráfico tig vs qinc (thin) -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_exp_zhang, exp_zhang, '^k', label='Exp data (thin) [33]', mfc='none')
plt.plot(ramp_zhang, tig_zhang, 'y', label='Zhang et al. [33]')
plt.plot(ramp_list2[2:12], tig_3d_num[43][2:12], 'b', label='Exact solution')
plt.plot(ramp_list2[2:12], tig_3d_aprx1[43][2:12], '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.xlabel('Ramp magnitude ($W/m^2s$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
plt.xlim(0,160),plt.ylim(0,800)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc (thick) -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, tig_exp, '^k', label='Exp data (thick) [18]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list, Data_reszkal, 'xy', label='Reszka et al. [18]')
plt.plot(ramp_list, Data_ji1, '+m', label='Ji et al [30]')
plt.plot(ramp_list, Data_zhai1, 'ig', label='Zhai et al [32]')
plt.plot(ramp_list, Data_gong1, '3c', label='Gong et al [35]')
plt.plot(ramp_list, Best_data_num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.xlabel('Ramp magnitude ($kW/m^2s$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc para cada delta -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
for i in range(1,delta_list.shape[0]-1):
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[i], color=mcolors.hsv_to_rgb((0.5,i/(40*delta_list.shape[0]), 0.6)), alpha=1, linewidth=3)
    plt.plot(ramp_list, tig_exp, '^k', label='Exp data (thick) [18]', mfc='none')
    plt.plot(ramp_list, Data_reszkal, 'xy', label='Reszka et al. [18]')
    plt.plot(ramp_list, Data_ji1, '+m', label='Ji et al [30]')
    plt.plot(ramp_list, Data_zhai1, 'ig', label='Zhai et al [32]')
    plt.plot(ramp_list, Data_gong1, '3c', label='Gong et al [35]')
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[0], '-.r', alpha=1, label='$\delta=0.1$' + ' mm', linewidth=3)
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[delta_list.shape[0]-1], '--b', alpha=1, label='$\delta=9.8$' + ' mm', linewidth=3)

```

```

ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.xlabel('Ramp magnitude ($kW/m^2s$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
best_str1= best_num1*1000
textstr1 = '$\mathrm{\Delta^*_{Exp}}$=%5.3f$' % best_str1 + ' mm'
best_str2= best_num2*1000
textstr2 = '$\mathrm{\Delta^*_{Reszka}}$=%5.3f$' % best_str2 + ' mm'
best_str3= best_num3*1000
textstr3 = '$\mathrm{\Delta^*_{Zhai}}$=%5.3f$' % best_str3 + ' mm'
best_str4= best_num4*1000
textstr4 = '$\mathrm{\Delta^*_{Gong}}$=%5.3f$' % best_str4 + ' mm'
best_str5= best_num5*1000
textstr5 = '$\mathrm{\Delta^*_{Ji}}$=%5.3f$' % best_str5 + ' mm'
plt.text(0.25, 0.85, textstr5, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.text(0.25, 0.75, textstr1, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.text(0.25, 0.65, textstr2, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.text(0.25, 0.55, textstr3, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.text(0.25, 0.45, textstr4, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, tig_exp2_inverso, '^k', label='Exp data (thick) [18]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list, Data_reszka2, 'xy', label='Reszka et al. [18]')
plt.plot(ramp_list, Data_ji2, '+m', label='Ji et al [30]')
plt.plot(ramp_list, Data_zhai2, 'ig', label='Zhai et al [32]')
plt.plot(ramp_list, Data_gong2, '3c', label='Gong et al [35]')
plt.plot(ramp_list, Best_data_num2, 'b', label='Exact numeric')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx_inv, '--r', label='Analytical approx', linewidth=2)
plt.xlabel('Ramp magnitude ($kW/m^2s$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}$ $(s^{-1})$', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.25))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.0025))
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig^2 vs rampa -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(Q_adim_exp2, tau_tig_exp2, '^k', label='Exp data (thick) [18]', mfc='none')
plt.plot(Q_adim_exp2, Best_data2_num2, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(Q_adim_exp2, Best_data2_aprx_inv, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
plt.xlabel('$r/q_{crit}$ $(s^{-1})$', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}^2$ $(s^{-2})$', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.0125))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.0001))
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- Gráfico adimensional 1 (n y m libres) -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
xdata,ydata = np.array(Q_adim_exp1),np.array(tau_tig_exp1)
plt.plot(xdata, ydata, '^k', label='Exp data (thick) [18]', mfc='none')
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.025))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.025))
# Fit for the parameters a, b, c of the function func:
popt, pcov = curve_fit(func, xdata, ydata)
# obtención de r^2
residuals = ydata- func(xdata, *popt)
ss_res,ss_tot = np.sum(residuals**2),np.sum((ydata-np.mean(ydata))**2)
r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
#print('r_squared = '+str(r_squared))
#graficando
plt.plot(xdata, func(xdata, *popt), '--m',label='Best Fit : n=%5.3f, m=%5.3f' % tuple(popt))
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
textstr = '$\mathrm{R^2}$=%5.3f$' % r_squared
plt.text(0.7, 0.6, textstr, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.xlim(0,0.45)
plt.xlabel(r'$\sqrt{r/\dot{q}_{crit}}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$\sqrt{2\tau}/t_{ig}$', fontsize=20)
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)

```

```
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)
```

A.3. Código caso exponencial

```
from sympy import symbols, Function, dsolve, solve, nsolve, sqrt, Eq, exp, Derivative
from sympy import *
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d
import scipy.integrate as odeint
from scipy import optimize
import xlrd

''' ----- datos PMMA ----- '''
kappa = 960.5          # Coeficiente de absorción [-]
sigma = 5.67e-8         # Constante de Boltzmann [W/m^2 K^4]
Tinf = 300.0           # Temperatura del ambiente [K]
h = 10                 # Coeficiente de convección [W/m^2 K]
delta = 0.0098         # Camino libre promedio de la radiación [m]
rho = 1190.0           # Densidad de la muestra [kg/m^3]
cp = 1680.0            # Calor específico del material [J/kg K]
qincrit = 18000         # Calor incidente crítico de ignición [W/m^2]
q_0 = 1                # Calor incidente inicial [W/m^2]

''' ----- Lectura de datos ----- '''
loc = loc = (r"C:\Users\repar\OneDrive\Escritorio\Tesis\Datos.xls")
wb = xlrd.open_workbook(loc)
sheet = wb.sheet_by_index(2)
ramp_list, tig_gong = ([ ] for i in range(2))
for i in range(1,39):
    ramp_list.append(sheet.cell_value(i, 0))    # Aumento del Calor incidente exponencial [1/s]
    tig_gong.append(sheet.cell_value(i, 1))      # Datos modelo numérico de Gong

# Parámetros de gráficos
fontsize=18
fontsize_ticks=15
fontsize_legend=13

# Creación de variables simbólicas
t, n, m, tprom, ddelta = symbols('t n m tprom ddelta')    # variables
y, Tprom = symbols('y Tprom', cls = Function)             # funciones

# Creación de listas
delta_list = np.linspace(0.0001, 0.0098, 72)
# Creación de listas para almacenar datos
tig_3d_aprx1, tig_3d_num = ([ ] for i in range(2) )
ti, z, z2 = ([ ], [ ], [ ], [ ]) for i in range(3)
# Creación de parámetros auxiliares para encontrar el espesor óptimo
best_num, best_aprx1 = (0 for i in range(2) )
aux_num, aux_aprx1 = (100 for i in range(2) )

# Función para obtener una única solución real al buscar la temperatura crítica de ignición.
def sol_real(y, z):
    for x in y:
        if x.is_real and x.is_positive:
            z.append(x)

# Se comienza un ciclo para obtener información para cada penetración de la radiación impuesta
for kk in delta_list:
    # Se calcula la absorptividad según la penetración
    ab = 1 - exp(-2*kappa*kk)    # Absortividad del medio [-]
    # Cálculo del coeficiente de transferencia de calor combinando radiación y convección
    ht = 8*ab*sigma*Tinf**3 + h

    ''' ----- Solución Particular ----- '''
    fun_heat = n*exp(m*t)
    expr1 = -(ht/(rho*cp*ddelta))*(Tprom(t)-Tinf)+((ab)/(rho*cp*ddelta))*fun_heat
    # solución de la ODE simplificada con condición inicial:
    sol_aprox = dsolve(Eq(Derivative(Tprom(t), t), expr1), simplify=True, ics={Tprom(0): Tinf})
```

```

''' ----- Temperatura de ignición crítica -----'''
# Versión aproximada
expr11 = -(2*ab)*sigma*(tprom**4-Tinf**4)+(ab)*qincrcrit
Tig_list1 = solve(expr11,tprom)
Tigapprox = []
sol_real(Tig_list1, Tigapprox)

# Versión exacta
expr2 = (ab)*qincrcrit - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf)
Tig_list2 = solve(expr2,tprom)
Tignum = []
sol_real(Tig_list2, Tignum)

# Mostrar por pantalla el resultado
print(' ')
print('La temperatura de ignición crítica numérica es: ' + str(round(Tignum[0],2)) + ' K')
print('La temperatura de ignición crítica aproximada es: ' + str(round(Tigapprox[0],2)) + ' K')

# Creación de listas para recolección de datos temporales en cada ciclo
Data1aprox, Data2aprox, Data1num, Data2num = ([[] for i in range(4)])

j = 0 # contador
print('El calor incidente inicial es: ' + str(q_0) + ' W/m^2')
for i in ramp_list:
    j= j+1
    print('-----')
    print(' ')
    print(list(delta_list).index(kk))
    print('los resultados de la iteración ' + str(j) + ' son: ')
    print('El aumento del calor incidente por segundo es: ' + str(i) + ' [W/m^2*s]')
    print('El espesor de penetración es: ' + str(kk) + ' [m]')

''' ----- Solución numérica exacta -----'''
T_0 = np.array([Tinf])
def energy_eq(t,tprom):
    return ((ab)*(q_0*np.exp(i*t)) - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf))/(kk*rho*cp)
expr_t_span1 = int(round(18.031*i*(-0.926),0))
sol_energy = odeint.solve_ivp(energy_eq, t_span=[0, expr_t_span1], y0=T_0,
                             t_eval=np.linspace(0, expr_t_span1, expr_t_span1+1),
                             first_step=0.1, max_step=10)
interpol = interp1d(sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])],np.transpose(sol_energy.y[0]),\
                    fill_value="extrapolate", kind='linear')
x = sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])]
interp_fn = lambda x: interpol(x) - float(Tignum[0])
tig = optimize.newton(interp_fn, 1, maxiter=3000)
print('El tiempo de ignición exacto numérico es: ' + str(tig) + " segundos")

''' ----- Solución analítica aproximada -----'''
tigaprox = nsolve(sol_aprox.subs([(n,q_0), (m,i), (ddelta, kk)]).rhs - Tigapprox[0], (26,tig-2.49))
print('El tiempo de ignición aproximado algebraico es: ' + str(tigaprox) + " segundos")
print('-----')

if j==24:
    error_tig_num = abs(round((tig_gong[ramp_list.index(i)]-tig)*100/\
                             tig_gong[ramp_list.index(i)],2))
    if error_tig_num <= aux_num:
        aux_num,best_num = error_tig_num,kk
    error_tig_aprx = abs(round((tig_gong[ramp_list.index(i)]-tigaprox)*100/\
                             tig_gong[ramp_list.index(i)],2))
    if error_tig_aprx <= aux_aprx1:
        aux_aprx1,best_aprx1 = error_tig_aprx,kk

''' ----- Gráfico Temperatura en el tiempo -----'''
evaluables = [0.0493,0.0688,0.0998,0.1500]
for pip in range(0,len(evaluables)):
    if i==evaluables[pip] and kk==0.0098:
        Tapprox_list = []
        for rr in range(0,len(sol_energy.t)):
            Tapprox_list = np.append(Tapprox_list,
                                     [float(sol_aprox.subs([(t,sol_energy.t[rr]),
                                                             (n,q_0), (m,i), (ddelta, kk)]).rhs)],axis=0)
            ti[pip], z[pip], z2[pip] = sol_energy.t, sol_energy.y, Tapprox_list

if (i ==0.1500) and kk==0.0098:
    Tigaprx, Tigaprx2 = [], []
    Tigaprx.append(Tignum[0])
    Tigaprx2.append(Tigapprox[0])

```

```

# Gráfico de temperatura de la muestra en el tiempo
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import MultipleLocator
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
c1 = ['tab:blue','tab:green','goldenrod','firebrick']
c2 = ['tab:cyan','tab:olive','gold','tab:red']
for pip in range(len(evaluables)-1,-1,-1):
    plt.plot(ti[pip], z[pip].T, c=c1[pip], label='Exact $b$ = '\
        +str(round(evaluables[pip],3)) + ' $s^{-1}$', linewidth=2)
    plt.plot(ti[pip], z2[pip].T, '--', c=c2[pip], label='Approx $b$ = '\
        +str(round(evaluables[pip],3)) + ' $s^{-1}$', linewidth=2)
plt.plot(np.linspace(0,400,401), Tigaprx*401, '--k', label = '$\overline{T}_{ig}$ exact')
plt.plot(np.linspace(0,400,401), Tigaprx2*401, ':', color='grey',\
    label = '$\overline{T}_{ig}$ approx', linewidth=2 )
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.xlim(0, 300), plt.ylim(300, 1200)
plt.xlabel('Time (s)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$\overline{T}_{ig}$ (K)', fontsize=fontsize)
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labelsize=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=2, fontsize=fontsize_legend, ncol=2)

''' ----- Recolección de resultados para graficar -----'''
Data1aprox.append(float(tigaprox))
Data1num.append(tig)
tig_3d_num.append(Data1num)
tig_3d_aprx1.append(Data1aprox)

''' ----- creación de listas para graficar -----'''
# Resultado del mejor delta
Best_data_num = tig_3d_num[list(delta_list).index(best_num)]
Best_data_num3 = [1/element for element in Best_data_num]
Best_data_aprx = tig_3d_aprx1[list(delta_list).index(best_aprx1)]
Best_data_aprx_inv3 = [1/element for element in Best_data_aprx]
# Creación de data adimensional
tig_chino_inverso3 = [1/element for element in tig_gong]
Q_adim_exp1=[np.log(((float(ht)+element*best_num*rho*cp)*(665-Tinf))/(float(ab)*1)))/\
    element for element in ramp_list]

''' ----- propiedades efectivas -----'''
from scipy.optimize import curve_fit
def func(x, n, m):
    return n + m*x
asd1=[np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,tig_gong)]
asd2=[np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,Best_data_num)]
asd3=[np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,Best_data_aprx)]
popt_num, pcov_num = curve_fit(func, np.array(ramp_list), np.array(asd2))
popt_aprx, pcov_aprx = curve_fit(func, np.array(ramp_list), np.array(asd3))
popt_exp, pcov_exp = curve_fit(func, np.array(ramp_list), np.array(asd1))
eff_exp = popt_exp[1]*q_0*(ab)/(best_num*(700-Tinf))
eff_num = popt_num[1]*q_0*(ab)/(best_num*(Tignum[0]-Tinf))
eff_aprx = popt_aprx[1]*q_0*(ab)/(best_aprx1*(Tigapprox[0]-Tinf))
print('Standard effective prop : ' + str(rho*cp))
print('Gong effective prop:'+str(eff_exp)+' ('+str(abs(eff_exp-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')
print('Exact analytical effective prop:'+str(eff_num)+' ('+str(abs(eff_num-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')
print('Approx analytical effective prop:'+str(eff_aprx)+' ('+str(abs(eff_aprx-rho*cp)*100/(rho*cp))+ '%)')

''' ----- GRÁFICOS -----'''
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

''' ----- gráfico tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, tig_gong, '3k', label='Gong et al. [34]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list, Best_data_num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.05))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
plt.xlabel('$b$ ($s^{-1}$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$T_{ig}$ (s)', fontsize=20)
plt.xlim(0, 0.55)
plt.tick_params(axis='x', labelsize=fontsize_ticks)

```

```

plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc para cada delta ----- '''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
for i in range(1,delta_list.shape[0]-1):
    plt.plot(ramp_list,tig_3d_num[i],color=mccolors.hsv_to_rgb((0.5,i/(40*delta_list.shape[0]), 0.6)),\
             alpha=1, linewidth=3)
plt.plot(ramp_list,tig_gong, '3k', label='Gong et al. [34]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list,tig_3d_num[0], '-.r', alpha=1, label='$\delta=0.1$' + ' mm', linewidth=3)
plt.plot(ramp_list,tig_3d_num[delta_list.shape[0]-1], '--b', alpha=1, label='$\delta=9.8$' + ' mm', linewidth=3)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.05))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
plt.xlabel('$b$ ($s^{-1}$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
best_str= best_num*1000
textstr = '$\mathrm{\delta}^{*}_{Gong} = 5.3f$' % best_str + ' mm'
plt.text(0.30, 0.80, textstr, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
plt.xlim(0, 0.55)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig vs qinc ----- '''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, tig_chino_inverso3, '3k', label='Gong et al. [34]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx_inv3, '--r', label='Approximate solution', linewidth=3)
plt.plot(ramp_list, Best_data_num3, 'b', label='Exact solution')
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.05))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.0025))
plt.xlabel('$b$ ($s^{-1}$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}$ ($s^{-1}$)', fontsize=20)
plt.xlim(0, 0.55)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico exp(b*tig) vs qinc ----- '''
Best_data_num2 = [np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,Best_data_num)]
tig_chino_inverso1 = [np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,tig_gong)]
Best_data_aprx_inv = [np.exp(element1*element2) for element1, element2 in zip(ramp_list,Best_data_aprx)]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, tig_chino_inverso1, '3k', label='Gong et al. [34]', mfc='none')
plt.plot(ramp_list, Best_data_num2, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx_inv, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.05))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20000))
plt.xlabel('$b$ ($s^{-1}$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$e^{bt_{ig}}$', fontsize=20)
plt.xlim(0, 0.55)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- Gráfico adimensional 1 (n y m libres) ----- '''
def func(x, n, m):
    return n + m*x
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
xdata,ydata = np.array(Q_adim_exp1),np.array(tig_gong)
plt.plot(xdata, ydata, '3k', label='Gong et al. [34]', mfc='none')
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
# Fit for the parameters a, b, c of the function func:
popt, pcov = curve_fit(func, xdata, ydata)
# obtención de r^2
residuals = ydata- func(xdata, *popt)
ss_res,ss_tot = np.sum(residuals**2),np.sum((ydata-np.mean(ydata))**2)
r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
#graficando
plt.plot(xdata, func(xdata, *popt), '--m',label='Best Fit : n=%5.3f, m=%5.3f' % tuple(popt))
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
textstr = '$\mathrm{R}^2 = 5.3f$' % r_squared
plt.text(0.7,0.6,textstr,transform=plt.gcf().transFigure,fontsize=14,verticalalignment='top',bbox=props)
#plt.title('gráfico de ignición adimensional')
plt.xlabel('$\ln(Q_{crit})\tau/q_0/b$', fontsize=20)

```

```
plt.ylabel(r'$t_{ig}$', fontsize=20)
plt.xlim(0, 200)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)
```

A.4. Código caso polinomial

```
from sympy import symbols, Function, dsolve, solve, nsolve, sqrt, Eq, exp, Derivative
from sympy import *
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d
import scipy.integrate as odeint
from scipy import optimize
import xlrd

''' ----- datos PMMA ----- '''
kappa = 960.5          # Coeficiente de absorción [-]
sigma = 5.67e-8         # Constante de Boltzmann [W/m^2 K^4]
Tinf = 300.0           # Temperatura del ambiente [K]
h = 10                 # Coeficiente de convección [W/m^2 K]
delta = 0.0098         # Camino libre promedio de la radiación [m]
rho = 1190.0           # Densidad de la muestra [kg/m^3]
cp = 1680.0            # Calor específico del material [J/kg K]
qincrcrit = 18000       # Calor incidente crítico de ignición [W/m^2]
q_0 = 0                # Calor incidente inicial [W/m^2]

''' ----- Lectura de datos ----- '''
loc = loc = (r"C:\Users\repar\OneDrive\Escritorio\Tesis\Datos.xls")
wb = xlrd.open_workbook(loc)
sheet = wb.sheet_by_index(3)
ramp_list = []
for i in range(1,25):
    ramp_list.append(sheet.cell_value(i, 0))    # Aumento del Calor incidente [W/m^2*s^2]

# Parámetros de gráficos
fontsize=18
fontsize_ticks=15
fontsize_legend=13

# Creación de variables simbólicas
t, n, m, tprom, ddelta = symbols('t n m tprom ddelta')    # variables
y, Tprom = symbols('y Tprom', cls = Function)            # funciones

# Creación de listas
delta_list = np.linspace(0.0001, 0.0098, 96)
# Creación de listas para almacenar datos
tig_3d_aprx1, tig_3d_num = ([[] for i in range(2) ])
ti, z, z2 = ([[], [], [], []] for i in range(3))
# Creación de parámetros auxiliares para encontrar el espesor óptimo
best_num1, best_aprx11, best_num2, best_aprx12 = (0 for i in range(4) )
aux_num1, aux_aprx11, aux_num2, aux_aprx12 = (100 for i in range(4) )

# Función para obtener una única solución real al buscar la temperatura crítica de ignición.
def sol_real(y, z):
    for x in y:
        if x.is_real and x.is_positive:
            z.append(x)

# Se comienza un ciclo para obtener información para cada penetración de la radiación impuesta
for kk in delta_list:
    # Se calcula la absorptividad según la penetración
    ab = 1 - exp(-2*kappa*kk)    # Absortividad del medio [-]
    # Cálculo del coeficiente de transferencia de calor combinando radiación y convección
    ht = 8*ab*sigma*Tinf**3 + h

    ''' ----- Solución Particular ----- '''
    fun_heat = n+m*t**2
    expr1 = -(ht/(rho*cp*ddelta))*(Tprom(t)-Tinf)+((ab)/(rho*cp*ddelta))*fun_heat
```

```

# solución de la ODE simplificada con condición inicial:
sol_aprox = dsolve(Eq(Derivative(Tprom(t), t), expr1), Tprom(t), ics={Tprom(0): Tinf})

''' ----- Temperatura de ignición crítica -----'''
# Versión aproximada
expr11 = -(2*ab)*sigma*(tprom**4-Tinf**4)+(ab)*qincrit
Tig_list1 = solve(expr11,tprom)
Tigapprox = []
sol_real(Tig_list1, Tigapprox)

# Versión exacta
expr2 = (ab)*qincrit - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf)
Tig_list2 = solve(expr2,tprom)
Tignum = []
sol_real(Tig_list2, Tignum)

# Mostrarar por pantalla el resultado
print(' ')
print('La temperatura de ignición crítica numérica es: ' + str(round(Tignum[0],2)) + ' K')
print('La temperatura de ignición crítica aproximada es: ' + str(round(Tigapprox[0],2)) + ' K')

# Creación de listas para recolección de datos temporales en cada ciclo

# listas para recolección de datos en el loop que viene
Data1aprox,Data2aprox,Data1aprox2,Data2aprox2,Data1num,Data2num,Data_lamorlette1,\
Data_lamorlette2,Data_zhai1,Data_zhai2 = ([[] for i in range(10)])

j = 0 # contador
print('El calor incidente inicial es: ' + str(q_0) + ' W/m^2')
for i in ramp_list:
    j= j+1
    print('-----')
    print(' ')
    print(list(delta_list).index(kk))
    print('los resultados de la iteración ' + str(j) + ' son: ')
    print('El aumento del calor incidente por segundo es: ' + str(i) + ' [W/m^2*s]')

''' ----- Solución numérica exacta -----'''
T_0 = np.array([Tinf])
def energy_eq(t,tprom):
    return ((ab)*(q_0+i*t**2) - 2*ab*sigma*(tprom**4-Tinf**4) - h*(tprom-Tinf))/(kk*rho*cp)

expr_t_span = int(300*exp(-0.03*j))
sol_energy = odeint.solve_ivp(energy_eq, t_span=[0, expr_t_span], y0=T_0,
                             t_eval=np.linspace(0, expr_t_span, expr_t_span+1),
                             dense_output=True, first_step=0.2, max_step=10)
interpol = interp1d(sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])],np.transpose(sol_energy.y[0]),
                    fill_value="extrapolate", kind='linear')
x = sol_energy.t[0:len(sol_energy.y[0])]
interp_fn = lambda x: interpol(x) - float(Tignum[0])
tig = optimize.newton(interp_fn, 40, maxiter=2000)
print('El tiempo de ignición exacto numérico es: ' + str(tig) + " segundos ")

''' ----- Solución analítica aproximada -----'''
tigaprox = nsolve(sol_aprox.subs([(n,q_0), (m,i), (ddelta, kk)]).rhs - Tigapprox[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición aproximado algebraico es: ' + str(tigaprox) + " segundos ")

''' ----- Modelo de Lamorlette2014 -----'''
# ecuación numero 11 de su paper, integer power law time varying flux q_inc=r*t**2
Lambda = 0.336
Temp_lamorlette = Tinf+(8/15)*sqrt(t/(np.pi*Lambda*rho*cp))*m*t**2
tig_lamorlette = nsolve(Temp_lamorlette.subs(m,i) - Tignum[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición de Lamorlette es: ' + str(tig_lamorlette) + " segundos ")

''' ----- Modelo de Zhai2019 -----'''
# ecuación numero 42 de su paper
Temp_zhai = Tinf+(8/15)*2*sqrt(t/(np.pi*Lambda*rho*cp))*m*t**2
tig_zhai = nsolve(Temp_zhai.subs(m,i) - Tignum[0], (0,tig))
print('El tiempo de ignición de Zhai es: ' + str(tig_zhai) + " segundos ")
print('-----')

if j==24:
    error_tig_lamorlette_num = abs(round((tig_lamorlette-tig)*100/tig_lamorlette,2))
    error_tig_lamorlette_aprx = abs(round((tig_lamorlette-tigaprox)*100/tig_lamorlette,2))
    if error_tig_lamorlette_num <= aux_num1:
        aux_num1,best_num1 = error_tig_lamorlette_num, kk

```

```

if error_tig_lamorlette_aprx <= aux_aprx11:
    aux_aprx11,best_aprx11 = error_tig_lamorlette_aprx,kk
error_tig_zhai_num = abs(round((tig_zhai-tig)*100/tig_zhai,2))
error_tig_zhai_aprx = abs(round((tig_zhai-tigaprox)*100/tig_zhai,2))
if error_tig_zhai_num <= aux_num2:
    aux_num2,best_num2 = error_tig_zhai_num,kk
if error_tig_zhai_aprx <= aux_aprx12:
    aux_aprx12,best_aprx12 = error_tig_zhai_aprx,kk

''' ----- Gráfico Temperatura en el tiempo -----'''
evaluables = [22.36,31.62,44.72,54.77]
for pip in range(0,len(evaluables)):
    if i==evaluables[pip] and kk==0.0098:
        Tprox_list = []
        for rr in range(0,len(sol_energy.t)):
            Tprox_list = np.append(Tprox_list,
                                   [float(sol_aprox.subs([(t, sol_energy.t[rr]),\
                                                           (n,q_0),(m,i), (ddelta, kk)]).rhs)],axis=0)
            ti[pip], z[pip], z2[pip] = sol_energy.t, sol_energy.y, Tprox_list
if i==54.77 and kk==0.0098:
    Tigaprx,Tigaprx2 = [], []
    Tigaprx.append(Tignum[0])
    Tigaprx2.append(Tigaprox[0])

# Gráfico de temperatura de la muestra en el tiempo
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import MultipleLocator
import numpy as np
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
c1 = ['tab:blue','tab:green','goldenrod','firebrick']
c2 = ['tab:cyan','tab:olive','gold','tab:red']
for pip in range(len(evaluables)-1,-1,-1):
    plt.plot(ti[pip], z[pip].T, c=c1[pip], label='Exact $d_3$ = '\
            +str(evaluables[pip])+' $kW/m^2s^2$', linewidth=2)
    plt.plot(ti[pip], z2[pip].T, '--', c=c2[pip], label='Approx $d_3$ = '\
            +str(evaluables[pip])+' $kW/m^2s^2$', linewidth=2)

plt.plot(np.linspace(0, 400, 401), Tigaprx*401,'--k', label='$\overline{T}_{ig}$ exact')
plt.plot(np.linspace(0, 400, 401), Tigaprx2*401,':', color='grey',\
         label='$\overline{T}_{ig}$ approx', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(20))
plt.xlim(0, 210), plt.ylim(300, 1100)
lim=plt.gca().get_ylim()
plt.xlabel('Time (s)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$\overline{T}_{ig}$ (K)', fontsize=fontsize)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=4, fontsize=11, ncol=2)

''' ----- Recolección de resultados para graficar -----'''
Data1aprox.append(tigaprox)
Data1num.append(tig)
Data_lamorlette1.append(tig_lamorlette)
Data_lamorlette2.append(1/tig_lamorlette)
Data_zhai1.append(tig_zhai)
Data_zhai2.append(1/tig_zhai)
tig_3d_num.append(Data1num)
tig_3d_aprx1.append(Data1aprox)

''' ----- creación de listas para graficar -----'''
# Resultado del mejor delta para Zhai
Best_data_num = tig_3d_num[list(delta_list).index(best_num2)-1]
Best_data_num2 = [1/element for element in Best_data_num]
Best_data_aprx = tig_3d_aprx1[list(delta_list).index(best_num2)-1]
Best_data_aprx_inv = [1/element for element in Best_data_aprx]
Best_data2_num2 = [1/element**3 for element in Best_data_num]
Best_data2_aprx_inv = [1/element**3 for element in Best_data_aprx]
# Creación de data adimensional
tau_exp=(3*best_num2*rho*cp*(665-Tinf))/((ab)*qinccrit)
tau_tig_exp1 = [(tau_exp)**(1/3)/element for element in Data_zhai1]
tau_tig_exp2 = [(element)**3 for element in Data_zhai2]
Q_adim_exp1 = [(element/(qinccrit))*(1/3) for element in ramp_list]
Q_adim_exp2 = [(element/(qinccrit)) for element in ramp_list]

''' ----- propiedades efectivas -----'''

```

```

from scipy.optimize import curve_fit
def func(x, n, m):
    return n+m*x
popt_num, pcov_num = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(Best_data2_num2))
popt_aprx, pcov_aprx = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(Best_data2_aprx_inv))
popt_exp, pcov_exp = curve_fit(func, np.array(Q_adim_exp2), np.array(tau_tig_exp2))
eff_exp = (ab)*qincrcrit/(3*best_num2*(Tignum[0]-Tinf)*popt_exp[1])
eff_num = (ab)*qincrcrit/(3*best_num2*(Tignum[0]-Tinf)*popt_num[1])
eff_aprx = (ab)*qincrcrit/(3*best_aprx12*(Tigapprox[0]-Tinf)*popt_aprx[1])
print('Standard effective prop: '+str(rho*cp))
print('Zhai effective prop: '+str(eff_exp)+' ('+str(abs(eff_exp-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %')')
print('Exact analytical effective prop: '+str(eff_num)+' ('+str(abs(eff_num-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %')')
print('Approx analytical effective prop: '+str(eff_aprx)+' ('+str(abs(eff_aprx-rho*cp)*100/(rho*cp))+ ' %')')

''' ----- GRÁFICOS -----'''
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

''' ----- gráfico tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, Data_zhai1, 'k', label='Zhai et al. [32]')
plt.plot(ramp_list, Data_lamorlette1, 'D', color='orange', label='Lamorlette et al [31]', linewidth=3)
plt.plot(ramp_list, Best_data_num, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
plt.xlabel('Ramp magnitude ($W/m^2s^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
plt.xlim(0, 60)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico tig vs qinc para cada delta -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
for i in range(1,delta_list.shape[0]-1):
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[i], color=mcolors.hsv_to_rgb((0.5,i/(40*delta_list.shape[0]), 0.6)),
             alpha=1, linewidth=6)
    plt.plot(ramp_list, Data_zhai1, 'k', label='Zhai et al. [32]')
    plt.plot(ramp_list, Data_lamorlette1, 'D', color='orange', label='Lamorlette et al [31]', linewidth=3)
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[0], '-.r', alpha=1, label='$\delta=0.1$' + ' mm', linewidth=3)
    plt.plot(ramp_list, tig_3d_num[delta_list.shape[0]-1], '--b', alpha=1, label='$\delta=9.8$' + ' mm', linewidth=3)
    ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
    ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(10))
    plt.xlim(0, 60)
    plt.xlabel('Ramp magnitude ($W/m^2s^2$)', fontsize=fontsize)
    plt.ylabel('$t_{ig}$ (s)', fontsize=20)
    props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
    best_str1= best_num1*1000
    textstr1 = '$\mathrm{\delta}_{Lamor}=\%5.3f$' % best_str1 + ' mm'
    best_str2= best_num2*1000
    textstr2 = '$\mathrm{\delta}_{Zhai}=\%5.3f$' % best_str2 + ' mm'
    plt.text(0.31, 0.80, textstr1, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
    plt.text(0.31, 0.70, textstr2, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14,verticalalignment='top', bbox=props)
    plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
    plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
    plt.legend(loc=1, fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig vs qinc -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
plt.plot(ramp_list, Data_zhai2, 'k', label='Zhai et al. [32]')
plt.plot(ramp_list, Data_lamorlette2, 'D', color='orange', label='Lamorlette et al [31]', linewidth=3)
plt.plot(ramp_list, Best_data_num2, 'b', label='Exact numeric')
plt.plot(ramp_list, Best_data_aprx_inv, '--r', label='Analytical approx', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.001))
plt.xlabel('Ramp magnitude ($W/m^2s^2$)', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}$ $(s^{-1})$', fontsize=20)
plt.xlim(0, 60)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- gráfico 1/tig^3 vs rampa -----'''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))

```

```

plt.plot(Q_adim_exp2, tau_tig_exp2, '1k', label='Zhai et al. [32]', mfc='none')
plt.plot(Q_adim_exp2, Best_data2_num2, 'b', label='Exact solution')
plt.plot(Q_adim_exp2, Best_data2_aprx_inv, '--r', label='Approximate solution', linewidth=2)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.00025))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.000001))
plt.xlabel('$d_3/q_{crit}$ $(s^{-2})$', fontsize=fontsize)
plt.ylabel('$1/t_{ig}^{-3}$ $(s^{-3})$', fontsize=20)
plt.xlim(0, 0.003)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

''' ----- Gráfico adimensional 1 (n y m libres) ----- '''
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
xdata, ydata = np.array(Q_adim_exp1), np.array(tau_tig_exp1)
plt.plot(xdata, ydata, '1k', label='Zhai et al. [32]', mfc='none')
# Fit for the parameters a, b, c of the function func:
popt, pcov = curve_fit(func, xdata, ydata)
# obtención de  $r^2$ 
residuals = ydata - func(xdata, *popt)
ss_res, ss_tot = np.sum(residuals**2), np.sum((ydata - np.mean(ydata))**2)
r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
#graficando
plt.plot(xdata, func(xdata, *popt), '--m', label='Best Fit : n=%5.3f, m=%5.3f' % tuple(popt))
props = dict(boxstyle='round', facecolor='grey', alpha=0.5)
textstr = '$\mathrm{R}^2$=%5.3f' % r_squared
plt.text(0.7, 0.6, textstr, transform=plt.gcf().transFigure, fontsize=14, verticalalignment='top', bbox=props)
plt.xlabel(r'$\sqrt[3]{r/\dot{q}_{crit}}$', fontsize=20)
ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.01))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(0.01))
plt.xlim(0, 0.16)
plt.ylabel(r'$\sqrt[3]{3\tau}/t_{ig}$', fontsize=20)
plt.tick_params(axis='x', labels=fontsize_ticks)
plt.tick_params(axis='y', labels=fontsize_ticks)
plt.legend(fontsize=fontsize_legend)

```