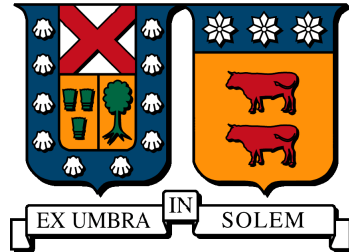


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**SANTIAGO - CHILE**



**DIFERENTES ENFOQUES PARA MEJORAR  
LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA  
CAVIDAD DIFERENCIALMENTE  
CALENTADA**

**PABLO HUERTA ROJO**

**TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL GRADO DE:  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**PROFESOR GUÍA: DR. OLIVIER SKURTYS**  
**PROFESOR CO-REFERENTE: DR. ROMAIN GERS**

**DICIEMBRE - 2022**

# Resumen

Esta investigación es sobre el estudio del efecto producido al interior de una cavidad diferencialmente calentada (CDC) cuando se incorpora un obstáculo (actuador pasivo) o excitadores térmicos locales (actuadores activos). Los excitadores aplicados en las paredes isotérmicas se posicionan de forma no-simétrica para complementar los resultados reportados por *Thiers et al.* [1]. El ratio de aspecto de la CDC (altura sobre ancho) es 4, el fluido de trabajo es aire y el número de Rayleigh basado en la altura de la cavidad es  $9 \times 10^7$ , por lo que el flujo convectivo es laminar. El objetivo principal de este trabajo es mejorar la transferencia de calor global utilizando ambos enfoques mencionados. Se realizan simulaciones numéricas usando el solver Nek5000 que utiliza el método de los elementos espectrales de alto orden. Por una parte, el actuador pasivo aumentó la transferencia de calor global en un 4,39 % y un incremento local del 80 % fue obtenido. Por otra parte, después de considerar diferentes posiciones, frecuencias y fases entre un par de excitadores se llegó a la conclusión que la distribución no-simétrica no mejora la transferencia de calor global en comparación al mejor caso reportado por *Thiers et al.* [1]. La mejor posición para aumentar la transferencia de calor se ubica a la altura del 70 % de la pared caliente y a la altura del 30 % de la pared fría. En esta posición se obtiene un incremento del 5,5 %.

Palabras clave: Convección natural, Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), Cavidad diferencialmente calentada, Modificación de la transferencia de calor, Nek5000

# Abstract

This research deals with the study of the effect produced inside a differentially heated cavity (DHC) when an obstacle (passive actuator) or a pair of thermal disturbances (active actuators) is incorporated. The thermal disturbances applied to isothermal walls are positioned non-symmetrically to complement the results reported by *Thiers et al.* [1]. The aspect ratio of the DHC (height over width) is 4, the working fluid is air, and the Rayleigh number based on the height of the cavity is  $9 \times 10^7$ , so the convective flow is laminar. The main objective of this work is to improve the overall heat transfer using the both mentioned approaches. Numerical simulations are performed using the high-order spectral element method fluid dynamics solver Nek5000. On the one hand, the passive actuator enhanced the global heat transfer by 4,39 % and a local increase up to 80 % was obtained. On the other hand, after considering different positions, frequencies and phases between a pair of thermal disturbances, it was concluded that the non-symmetrical configuration does not enhance the global heat transfer in comparison with the best case reported by *Thiers et al.* [1]. The best position to enhance the heat transfer is 70 % of the hot plate height and 30 % of the cold plate height. At this position this increase reaches 5,5 %.

Keywords: Natural Convection, Computational Fluid Dynamics (CFD), Differentially Heated Cavity, Heat Transfer Modification, Nek5000.

# Índice general

1. Introducción	1
2. Convección natural interna	5
2.1. Descripción física del problema	6
2.2. Condiciones de frontera	6
2.3. Explicación física del flujo de convección natural en CDC	7
2.4. Ecuaciones de Navier-Stokes (dimensionales)	7
2.4.1. Aproximación de Boussinesq	9
2.5. Análisis escalar sobre de la capa límite térmica y dinámica laminar para convección interna	10
2.5.1. Evolución de la capa límite térmica en el tiempo	11
2.5.2. Escala de la velocidad convectiva	11
2.5.3. Escala de espesor dinámico y térmico de la capa límite	12
2.6. Adimensionamiento de las ecuaciones gobernantes	15
3. Método numérico	17
3.1. Formulación de Galerkin	18
3.2. Funciones base en el método de los elementos espectrales	21
3.2.1. Polinomios de Legendre (base modal)	21
3.2.2. Polinomio de Lagrange (base nodal)	23
3.3. Preámbulos a la discretización de las ecuaciones gobernantes	24
3.4. Notación elemental	25
3.4.1. Vector de velocidad $u$	25
3.4.2. Vector coeficiente de expansión	26
3.4.3. Matriz de peso $W$	26
3.4.4. Matriz modal $B$	27

3.4.5.	Matriz de diferenciación $D$ . . . . .	28
3.4.6.	Matriz genérica $\Lambda$ . . . . .	29
3.4.7.	Vectores de coeficientes de expansión $\hat{u}_g$ y $\hat{u}_l$ . . . . .	30
3.5.	Discretización del método de Galerkin . . . . .	31
3.6.	Operador laplaciano débil . . . . .	33
3.7.	Discretización de la ecuación de Helmholtz . . . . .	34
3.8.	Discretización de la ecuación de Navier-Stokes incompresible . . . . .	37
3.8.1.	Algoritmo de Uzawa: caso estacionario . . . . .	37
3.8.2.	Algoritmo de Uzawa: caso no-estacionario . . . . .	39
4.	Metodología general de los problemas . . . . .	40
4.1.	Descripción del problema sin actuadores . . . . .	40
4.2.	Modelo matemático . . . . .	41
4.3.	Condiciones de frontera . . . . .	41
4.4.	Medición de la transferencia de calor para las modificaciones . . . . .	42
4.5.	Métodos Numéricos . . . . .	43
4.6.	Caso base . . . . .	44
4.6.1.	Validación del caso base . . . . .	45
4.7.	Visualización por LIC . . . . .	45
4.7.1.	Cálculos para obtener la visualización LIC . . . . .	48
5.	Supresión de la zona de estancamiento en el centro de la cavidad mediante un obstáculo . . . . .	54
5.1.	Problema físico . . . . .	55
5.2.	Dominio numérico . . . . .	55
5.3.	Resultados . . . . .	56
5.3.1.	Supresión de los flujos secundarios del caso base al incluir un obstáculo adiabático rectangular (caso (b) en la figura 5.1) . . . . .	57
5.3.2.	Generación de nuevos flujos secundarios inducidos por extrusión del obstáculo (caso (c) en la figura 5.1) . . . . .	63
5.3.3.	Efectos de la conductividad térmica . . . . .	68
5.4.	Conclusión . . . . .	69
6.	Uso de un par de actuadores térmicos locales considerando distribuciones no-simétricas . . . . .	70
6.1.	Problema físico . . . . .	70

6.2. Dominio Numérico . . . . .	72
6.3. Influencia de distribución no-simétrica . . . . .	72
6.4. Influencia posición, frecuencia y fase . . . . .	73
6.5. Conclusión . . . . .	79
7. Conclusiones Finales	81
A. Anexo	84
A.1. Método de los pesos residuales . . . . .	84
A.2. Método de Galerkin 1D . . . . .	85
A.3. Mapeo paramétrico . . . . .	88
A.4. Ensamblaje global . . . . .	89
A.5. Cuadratura de Gauss . . . . .	90
A.6. Integración y diferenciación en expansiones multidimensionales . . . . .	91
A.6.1. Integración multidimensional (cuadratura de Gauss) . . . . .	92
A.6.2. Diferenciación numérica . . . . .	92

# Índice de figuras

2.1. Visualización del flujo en 2 dimensiones. . . . .	6
2.2. Evolución de la capa límite dinámica y térmica cerca de la pared caliente. Imagen obtenida de [29]. . . . .	14
3.1. Representación de los primeros 6 polinomios de Legendre. . . . .	23
3.2. Representación de polinomios de Lagrange con raíces en los puntos GLL. Imagen obtenida de [32]. En el contexto de la imagen original $\phi_i$ son las funciones de peso definidas con los polinomios de Lagrange correspondientes. . . . .	24
4.1. Flujo base para $Ra_H = 9 \times 10^7$ : a) perfiles horizontales de la temperatura $\theta$ en la pared caliente; b) velocidad vertical $w$ para nueve alturas diferentes ( $z = 0,1,0,2, \dots, 0,9$ ). Se presenta la definición del espesor para la capa límite térmica $\delta_\theta(z = 0,5)$ y para la capa límite dinámica $\delta_w(z = 0,5)$ . . . . .	44
4.2. Distintos tipos de visualización del flujo en la sección superior de una cavidad diferencialmente calentada: a) líneas de corriente, b) y c) visualización por vectores, d) LIC. . . . .	46
4.3. Mapeo de un vector una línea DDA sobre una textura de ruido blanco para generar un píxel. Imagen de [39]. . . . .	48
4.4. Campo de vectores indicando la línea de corriente local que empieza en la celda $(x, y)$ . Imagen de [39]. . . . .	50
4.5. Comparación gráfica entre DDA y LIC sobre las mismas simulaciones. Imágenes de [39]. . . . .	51
4.6. funciones onda de Hanning con diferentes fases (arriba), ventana gaussiana (medio), y función onda de Hanning multiplicada por la ventana gaussiana (abajo). Imagen de [39]. . . . .	53

5.1. Esquema para tres configuraciones estudiadas: a) caso base; b) caso rectangular; c) caso extruido. . . . .	56
5.2. Para $H_0 = 0,05$ y $W_0 = 0,04$ , cuatro ejemplos de mallado: a) obstáculo adiabático rectangular; b) obstáculo adiabático extruido ( $W_1 = 0,08$ , $H_1 = 0,1$ ); c) obstáculo conductivo extruido ( $W_1 = 0,02$ , $H_1 = 0,3$ ); d) obstáculo conductivo más delgado considerado ( $W_1 \rightarrow 0$ , $H_1 = 0,3$ ). . . . .	57
5.3. Visualización mediante Convolución Integral de Línea (LIC) para tres valores de $H_0$ cuando $W_0 = 0,04$ . El caso base también se presenta para comparar. . . . .	58
5.4. Perfiles de velocidad vertical $w$ a lo largo de la pared caliente para seis alturas diferentes: a) sección aguas arriba; b) sección aguas abajo. Comparación entre el caso base y tres valores de $H_0$ . . . . .	60
5.5. Para varios valores de $H_0$ y $W_0$ , el esfuerzo cortante: a) en la pared isotérmica $\Gamma_T = \left(\frac{\tau}{\tau_{bf}}\right)_{x=0,0,25}$ ; b) en la pared adiabática $\Gamma_Q = \left(\frac{\tau}{\tau_{bf}}\right)_{z=0,1}$ . Los valores de $H_0$ para el espesor de las capas límites térmica y dinámica, $\delta_\theta(z = 0,5)$ y $\delta_w(z = 0,5)$ , se superponen. . . . .	61
5.6. Para varios valores de $H_0$ y $W_0$ , la ganancia relativa de transferencia de calor $\langle G_{Nu} \rangle$ . Se superponen valores de $H_0$ para el espesor de las capas límites térmica y dinámica, $\delta_\theta(z = 0,5)$ y $\delta_w(z = 0,5)$ . . . . .	62
5.7. Perfiles del número de Nusselt a lo largo de la pared caliente para varios valores de $H_0$ cuando $W_0 = 0,04$ . El caso base también se presenta para la comparación. . . . .	63
5.8. Visualización de convolución integral de línea (LIC): a) para una perturbación térmica local (consulte el trabajo anterior [1]) y tres obstáculos donde $H_0 = 0,05$ , $W_0 = 0,04$ : b) obstáculo 1: $H_1 = 0,3$ , $W_1 = 0,005$ ; c) obstáculo 2: $H_1 = 0,1$ , $W_1 = 0,085$ ; d) El mejor caso rectangular. . . . .	65
5.9. Perfiles de velocidad vertical a lo largo de la pared caliente para seis alturas diferentes: a) tramo aguas arriba; b) tramo aguas abajo. Comparación entre el caso base, el mejor caso rectangular ( $H_0 = 0,05$ , $W_0 = 0,04$ ), el obstáculo extruido 1 ( $H_1 = 0,3$ , $W_1 = 0,005$ ) y el obstáculo extruido 2 ( $H_0 = 0,035$ , $W_0 = 0,035$ ). . . . .	66

5.10.	Para dos geometrías, la ganancia relativa de transferencia de calor $\langle G_{Nu} \rangle$ : a) para varios valores de $H_1$ y $W_1$ cuando $H_0 = 0,05$ y $W_0 = 0,04$ ; b) para varios valores de $H_0$ y $W_0$ cuando $H_1 = 0,3$ , $W_1 = 0,005$ . El valor $\langle G_{Nu} \rangle$ de la mejor geometría rectangular y la mejor extrusión 1 también se presentan para comparar (líneas discontinuas rojas). . . . .	67
5.11.	Evolución vertical de la ganancia relativa de transferencia de calor, $G_{Nu}(z)$ , a lo largo de la pared caliente para tres obstáculos: caja rec- tangular, extrusión 1 y extrusión 2. . . . .	68
6.1.	Esquema de la cavidad calentada diferencialmente con áreas de pertur- bación térmica: (A) Sistema de coordenadas, condiciones de contorno y áreas de perturbación en la pared calentada $\Omega_h$ y en la pared enfria- da $\Omega_c$ ; (B) Evolución temporal de la perturbación de temperatura en $\Omega_h$ y $\Omega_c$ donde $\phi_c$ es el cambio de fase en $\Omega_c$ con respecto al actuador opuesto. . . . .	71
6.2.	Visualización LIC para tres valores de $L_c$ fijando $L_h = 0,7$ . Se indica la posición de los actuadores en las paredes activas. El caso base también se presenta para comparación. . . . .	74
6.3.	Perfiles de velocidad vertical (no-simétricos) para distintas alturas en: (a) pared caliente y (b) pared fría. Se considera el caso invertido en dos simulaciones para comparar nivel de correlación entre los perfiles. . . . .	75
6.4.	Ganancia relativa de transferencia de calor en $Ra_H = 9 \times 10^7$ para varias posiciones del área de perturbación cuando $\Omega_h$ se fija en $L_h =$ $0,7$ (en la pared caliente) y $\Omega_c$ se fija en $L_c = 0,3$ (en la pared fría). . . . .	76
6.5.	Ganancia relativa de transferencia de calor en $Ra_H = 9 \times 10^7$ mientras se fija $L_h = 0,7$ para varias posiciones del área de perturbación cuando (a) se consideran diferentes fases en $\Omega_c$ y (b) se consideran diferentes frecuencias en $\Omega_c$ . $f^*$ es la frecuencia natural de la cavidad indicado en [1] con valor $f^* = 0,403$ . . . . .	76
6.6.	Líneas de corriente en $Ra_H = 9 \times 10^7$ para varias posiciones del área de perturbación cuando $L_h$ se fija en $0,7$ . La curva oscura indica una configuración $\phi_c = 0^\circ$ y la curva roja indica la configuración $\phi_c =$ $180^\circ$ . En verde se indica la posición de los actuadores en las paredes activas. . . . .	77

6.7. Visualización de convolución integral de línea (LIC) para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en $L_c = 0,3$ y un desfase $\phi_c = 0^\circ$ . En rojo se indica la posición de los actuadores en las paredes activas. . . . .	78
6.8. Raíz cuadrática media de la fluctuación de temperatura para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en $L_c = 0,3$ . . . .	80
6.9. Raíz cuadrática media de la fluctuación de temperatura para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en $L_c = 0,7$ . . . .	80
A.1. Ejemplificación de modo global y modos locales considerando tres subsecciones. . . . .	88

# Capítulo 1

## Introducción

Las cavidades diferencialmente calentadas (notadas CDC desde ahora) es un campo de estudio de la convección natural de fluidos que ha sido investigado extensamente de forma experimental y numérica [2–6]. La CDC tiene diferentes aplicaciones industriales tal como en diseño de reactores nucleares [7], enfriamiento de equipos térmicos [8], paneles solares [9] y aire acondicionado [10]. Sin embargo el desempeño de estos sistemas energéticos puede estar limitado por la eficiencia térmica del CDC. Con tal de avanzar hacia una sociedad más responsable y eficiente con los recursos energéticos es indispensable desarrollar métodos que puedan cumplir este propósito. Diferentes investigaciones han buscado aumentar la transferencia térmica global que ocurre entre las paredes y el flujo. Los diferentes métodos usados se pueden dividir en dos categorías: actuadores activos y actuadores pasivos [11]. En el primer caso se busca perturbar térmicamente o mecánicamente al flujo para inducir la transición hacia la turbulencia, excitando las inestabilidades al interior de la capa límite (estructuras de Tollmien-Schlichting). En cambio los actuadores pasivos son herramientas que no hacen variar su posición o temperatura mediante una fuente externa, si no que mantienen sus propiedades físicas de forma constante en el tiempo. Algunos ejemplos podrían ser la aspereza de las paredes u obstáculos que modifican el trayecto del flujo tal como se verá más adelante.

Entre los actuadores activos se puede nombrar el trabajo de *Lage & Bejan* [12] quienes realizaron una investigación teórica y numérica al aplicar una pulsación constante del flujo de calor sobre la pared caliente de la CDC. Se verificó que la circulación

del fluido al interior de la cavidad resonaba con la frecuencia de la pulsación. *Kwak et al.* [13] demostraron que la variación de la amplitud y frecuencia sobre la pared caliente podía provocar un incremento de la transferencia de calor global. *Abourida et al.* [14] hicieron variar la amplitud y frecuencia de la temperatura en la pared caliente pulsante, pero además consideraron una pulsación en la pared fría. Demostraron que cuando las 2 temperaturas varían en fases opuestas la transferencia de calor hacia la pared fría aumentaba.

En particular *Penot et al.* [15] realizaron una propuesta experimental sobre una CDC con ratio de aspecto 4 llena de aire donde además se introducía un perturbador térmico bajo la forma de un tubo delgado ubicado en el extremo inferior de la pared caliente que variaba su frecuencia térmica según una función sinusoidal. Un actuador similar fue estudiado en el trabajo de *Chorin et al.* [16] quienes realizaron una investigación numérica de una cavidad del mismo aspecto para estudiar los efectos producidos por otro perturbador térmico local. El perturbador estaba ubicado entre el 20 % y el 25 % de la altura en la pared caliente, y obtuvieron que la modificación tuvo un impacto importante sobre la transferencia de calor global: en un 16 % por debajo de la zona modificada y un 2 % sobre la pared fría. Recientemente los autores *Thiers et al.* [1] optimizaron la posición de dos perturbadores térmicos ubicados de manera centro-simétrica entre pared caliente y fría dentro de una cavidad en dos dimensiones para así aumentar el efecto de la transferencia de calor global. Se encontró que la altura óptima del perturbador a la pared caliente para este efecto correspondía a 70 % de la altura (y por lo tanto al 30 % en la pared fría) logrando una ganancia global del 5,5 %.

Por otra parte, los actuadores pasivos más usados son mecánicos y se refieren a modificaciones en las mismas paredes o lejos de estas, pudiendo incluir bloques pequeños que representen las aspereza en las paredes en el primer caso [17] o posicionando obstáculos en el centro [18]. En muchas oportunidades los obstáculos no se utilizan como un medio para intentar mejorar la transferencia de calor sino que para representar elementos de equipos electrónicos [19, 20]. Uno de los primeros estudios numéricos y experimentales con elementos de aspereza fue realizado por *Shakerin et al.* [17] quienes buscaban comprobar o no si existía una separación del flujo en la posición de los bloques tal como se observaba en la experiencia de líneas de humo realizado por *Eckert et al.* [21]. Ellos indicaron que en su estudio esto no sucedía, por el contrario las líneas de corriente se mantenían muy cerca de la pared a pesar de modificar su trayectoria. Se estudiaron flujos laminares con  $10^3 < Ra < 10^7$  y un número de Prandtl igual a 0,7

(aire) y 7 (agua). La supuesta ganancia de la transferencia de calor debido al incremento de la superficie mediante los bloques fue anulada por la disminución del coeficiente de transferencia de calor causado por la modificación de la capa límite en las zonas de los bloques. En otra investigación *Yousaf & Usman* [22] incluyeron diferentes elementos sinusoidales en las paredes activas y también se hizo variar el tamaño. En dicho estudio utilizaron  $10^3 < Ra < 10^7$  y  $Pr = 1,0$ . Concluyeron que la inclusión de aspereza afectaba el comportamiento térmico e hidrodinámico del flujo reduciendo la ganancia de transferencia de calor. La disminución de la transferencia de calor llegó a representar el  $-28\%$ . También se han utilizado como actuadores pasivos a reflectores insertados en una de las paredes activas como en el trabajo de *Humaira-Tasnim* [23] estudiando flujo convectivos débiles con  $Ra$  igual a  $10^4$  y  $10^5$  para diferentes posiciones.

Un último tipo de actuadores pasivos son los obstáculos que se posicionan al interior de la cavidad, alterando el comportamiento sin perturbación de la convección natural. Los variados estudios han considerado obstáculos con una fuente de calor [24, 25], adiabáticos [26, 27] y conductivos [19, 20]. En particular en el estudio de *House et al.* [18] y *Bhave et al.* [27] indicaron la existencia de un tamaño óptimo de un bloque sólido adiabático posicionado al centro de la cavidad. En dicha investigación se observó que la transferencia de calor aumentaba con el tamaño del obstáculo hasta alcanzar un tamaño crítico y luego de este punto la transferencia de calor disminuía.

## Objetivos

El objetivo general de este trabajo es mejorar la transferencia de calor usando dos métodos diferentes, uno basado en un actuador pasivo y otro en un actuador térmico activo, los cuales se describen a continuación.

1. **Supresión de la zona de estancamiento en el centro de la cavidad mediante un obstáculo:** Se busca posicionar un bloque rectangular adiabático en una cavidad con ratio de aspecto 4 para buscar la geometría que más aumenta la transferencia de calor global. Luego, se realiza una extrusión del bloque para investigar si existe otra geometría con mayor eficiencia. Finalmente para los casos más importantes se estudia el efecto conductivo sobre los obstáculos.
2. **Uso de un par de actuadores térmicos locales considerando distribuciones no-simétricas:** A partir del trabajo de *Thiers et al.* [1] se busca determinar si

la posición centro-simétrica de los actuadores térmicos es la más eficiente. En este caso se evaluarán diferentes posiciones, frecuencias y desfases entre ambas señales térmicas.

En este trabajo el número de Rayleigh está fijado a  $Ra = 9 \times 10^7$ , por lo que el flujo se encuentra en régimen laminar por debajo del número crítico  $Ra_c = 1,02 \times 10^8$  [6]. Además el fluido de trabajo es aire ( $Pr = 0,71$ ).

## **Estructura del manuscrito**

En el siguiente capítulo se reportan resultados del fenómeno de la convección natural destacando la información de interés para este trabajo como puede ser el proceso de adimensionamiento de las ecuaciones gobernantes. En el tercer capítulo se describe en detalle el método numérico utilizado para desarrollar el problema, i.e el método de los elementos espectrales con tal de entender como realizar la discretización de las ecuaciones gobernantes. En un cuarto capítulo se detalla la metodología para desarrollar el problema. En los capítulos 5 y 6 se muestran los resultados para las dos configuraciones consideradas respectivamente. Finalmente, en el capítulo 7 se presentarán las conclusiones y las perspectivas del trabajo.

# Capítulo 2

## Convección natural interna

La convección es uno de los tres tipos de transferencias de calor que se pueden dar entre un cuerpo y un fluido. En particular la convección es un fenómeno que involucra un flujo de masa a la vez que el transporte de energía. Con los años se ha tomado conciencia de la contribución de este tipo de transferencia de calor tanto en el campo científico como en el tecnológico.

Antes de la segunda guerra mundial no se le daba ninguna importancia a este campo pues no se le veía ninguna contribución práctica, pero en la actualidad la convección se puede observar en variadas aplicaciones industriales. Debido a su naturaleza espontánea no necesita a priori ninguna maquinaria para mantener su funcionamiento. No hay necesidad de equipos eléctricos o electrónicos y por lo tanto se reduce significativamente el riesgo de falla, lo que permite abaratar costos dentro de una empresa. A su vez una disminución del uso de energía contribuye a la preservación del medio ambiente y al mismo tiempo una competitividad dentro del mercado laboral.

La convección se puede dividir en dos tipos de problemas, **convección natural externa** donde la región exterior a la capa límite no es afectada por la existencia de la capa límite pues el flujo se encuentra dentro de un reservorio de gran tamaño, y la **convección natural interna** donde existe una comunicación térmica entre las fronteras que encierran al fluido debido al menor tamaño del contenedor. Este último caso representa la problemática que describe el trabajo de esta memoria.

La convección natural dentro de espacios confinados tiene aplicaciones en diversos campos tecnológicos. En particular las industrias eléctricas y electrónicas utilizan este

fenómeno para regular la temperatura de equipos y componentes. Otro tipo de aplicaciones se puede dar en las áreas de aeronáutica, computadores, automóviles, energía nuclear, transporte marítimo, ingeniería civil, equipamiento solar, eólico, geotérmico, y también en industrias farmacéuticas y la agricultura.

## 2.1. Descripción física del problema

Para un caso en dos dimensiones se considera un fluido newtoniano al interior de un espacio restringido por cuatro paredes con altura  $H$  y ancho  $W$ , donde las paredes verticales se encuentran a temperaturas  $T_{\text{hot}}$  y  $T_{\text{cold}}$  tal que  $T_{\text{hot}} \gg T_{\text{cold}}$ , mientras que las paredes horizontales tienen una condición adiabática (ver figura 2.1). El gradiente de temperatura es perpendicular a la dirección de la gravedad. Inicialmente ( $t = 0$ ) el fluido se encuentra a una temperatura  $T_0 = (T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})/2$  y en equilibrio hidrostático. La fuerza gravitacional  $\vec{g}$  responsable de la fuerza de flotación es opuesta a la dirección  $z$ .

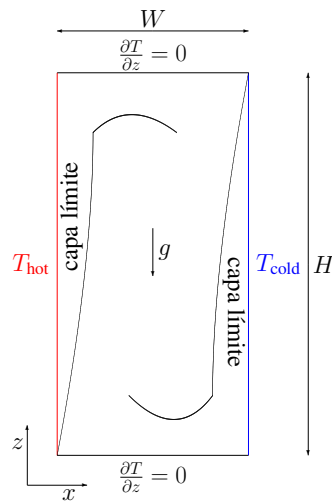


Figura 2.1: Visualización del flujo en 2 dimensiones.

## 2.2. Condiciones de frontera

Se impone una condición de no-deslizamiento en todas las paredes (ver figura 2.1), i.e

$$u = w = 0 . \quad (2.1)$$

Las paredes horizontales de la cavidad se asumen perfectamente adiabáticas e impermeables, así las condiciones de frontera para la temperatura son expresadas como

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=1} = 0 . \quad (2.2)$$

Por otra parte las paredes verticales se consideran isotérmicas con

$$T(0, z) = T_{\text{hot}} \quad , \quad T(W, z) = T_{\text{cold}} . \quad (2.3)$$

### 2.3. Explicación física del flujo de convección natural en CDC

De forma natural al aumentar la temperatura de un fluido su densidad disminuye y consecuentemente se alza sobre segmentos más densos (o más pesados). Desde el punto de vista de la CDC representada en la figura 2.1 un sección del fluido en contacto con la pared isotérmica con  $T = T_{\text{hot}}$  se calienta y se alza hacia alturas de menor presión. Por otra parte el aire en contacto con la pared isotérmica con  $T = T_{\text{cold}}$  aumenta su densidad hasta llegar al fondo de la cavidad creando una diferencia de presión que mantiene al flujo en un movimiento que sigue el contorno de la cavidad. El esquema del proceso sería:

calentamiento – ascenso – enfriamiento – descenso

### 2.4. Ecuaciones de Navier-Stokes (dimensionales)

Las ecuaciones que definen el campo de velocidad y temperatura son las ecuaciones de Navier-Stokes bajo una condición de incompresibilidad las cuales se construyen a partir de las ecuaciones de continuidad de masa, momentum y energía. Para una configuración en dos dimensiones y tomando en consideración el sistema de coordenadas definidas en la figura 2.1 las ecuaciones correspondientes son

- Ecuación de continuidad de masa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

- Ecuación de continuidad de momentum

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w - \rho g \end{aligned} \quad (2.5)$$

- ecuación de conservación de energía (primera ley de la termodinámica)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $u$  y  $w$  son las componentes de la velocidad en dirección horizontal y vertical respectivamente,  $P$  es la presión del fluido,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido y  $g$  es la componente de la aceleración de gravedad en la dirección  $-z$ .

Por otra parte el campo de presión  $P$  indicado en la ecuación anterior se puede descomponer en dos términos:  $P_a$  debido a una presión hidrostática y  $P_d$  llamada presión dinámica generada por el movimiento del fluido

$$P = P_a + P_d, \quad (2.7)$$

La presión hidrostática se encuentra en función de la posición vertical, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_a}{\partial z} &= \frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g \\ \frac{\partial P_a}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $P_0$  y  $\rho_0$  son la presión y densidad del fluido a una temperatura  $T_0$ , lo que para el caso de la CDC se refiere a la temperatura media  $T_0 = (T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})/2$ . De esta forma se pueden reordenar las ecuaciones de cantidad de momento para incluir un término

$(\rho_0 - \rho)g$ . Por lo tanto, la ecuación de conservación de momentum se puede escribir como

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P_d}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P_d}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + (\rho_0 - \rho)g\end{aligned}\tag{2.9}$$

### 2.4.1. Aproximación de Boussinesq

El flujo de fluido puede estar considerado incompresible al interior de la cavidad mientras la diferencia de temperatura  $\Delta T = T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}}$  sea suficientemente pequeña (del orden de  $15K$  [28]), por lo que es posible asumir que  $\rho \approx \rho_0$ . La aproximación de Boussinesq consiste en considerar la densidad como constante en la ecuación de conservación de masa y la ecuación de conservación de energía e introducir en la ecuación de conservación de momentum un término de fuerza aproximado al orden 2 tal que

$$\rho \simeq \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) ,\tag{2.10}$$

donde  $\beta(T - T_0) \ll 1$  y  $\beta$  es el coeficiente de expansión volumétrica a presión constante

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P .\tag{2.11}$$

Utilizando la aproximación de Boussinesq se sustituye la relación 2.10 sobre las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles y en cada caso se retiene el término dominante. Es decir, que en la ecuación de conservación de momentum la densidad  $\rho$  que acompaña al término convectivo pasa a ser  $\rho_0$  y por otra parte en el término de fuerza de cuerpo el término  $(\rho_0 - \rho)$  pasa a ser  $\beta(T_0 - T)$ . Así las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles escritas de forma conveniente y utilizando la aproximación de Boussinesq son

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g\beta(T_0 - T) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \end{cases} \quad (2.12)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática definida como  $\nu = \mu/\rho_0$ . En la ecuación 2.12 los valores de  $g$ ,  $\beta$ ,  $T_0$  y  $\nu$  son constantes. De igual forma en la ecuación de conservación de energía el término difusivo  $\alpha = k/(\rho_0 c_p)$  también es constante.

## 2.5. Análisis escalar sobre de la capa límite térmica y dinámica laminar para convección interna

Se busca hacer un análisis de escala del flujo laminar para determinar cuales son los balances de fuerza al interior de la capa límite y al mismo tiempo se buscan expresiones para evaluar el escalamiento de la velocidad vertical  $w_t$  (para  $t \in [0, t_f]$ ), el tiempo hasta alcanzar estado estacionario  $t_f$ , los espesores de la capa límite térmica  $\delta_{T,f}$  y dinámica  $\delta_{w,f}$ , ambos en el estado estacionario, para finalmente obtener  $w_f$  la velocidad vertical en el estado estacionario  $t = t_f$ .

Se consideran las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias para condición incompresible descritas en la ecuación 2.12.

Para proceder con el análisis se utilizan las siguientes escalas dimensionales:

- La distancia  $y$  se adimensiona con la altura  $H$  de la cavidad
- La distancia  $x$  se adimensiona con el espesor de la capa límite térmica  $\delta_{T,t}$  (para  $t \in [0, t_f]$ ) o  $\delta_{T,f}$  (para  $t = t_f$ ) en caso de evaluar la ecuación de conservación de energía y el espesor de la capa límite dinámica  $\delta_{w,t}$  (para  $t \in [0, t_f]$ ) o  $\delta_{w,f}$  (para  $t = t_f$ ) en caso de evaluar la ecuación de conservación de momentum.
- La temperatura  $T$  se adimensiona con la diferencia de temperatura  $\Delta T$  entre las paredes verticales.

### 2.5.1. Evolución de la capa límite térmica en el tiempo

En primera instancia se considera un estado inicial estático en  $t = 0$  tal que  $u = v = 0$ . La ecuación de conservación de energía se escala como

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\frac{\Delta T}{t}} + u \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_0 + v \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_0 = \alpha \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{\frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}} + \alpha \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\frac{\alpha \Delta T}{H^2}} . \quad (2.13)$$

Se observa que  $\partial^2 T / \partial y^2 \ll \partial^2 T / \partial x^2$  ya que  $H \gg \delta_{T,0}$ , entonces a partir del escalamiento anterior se genera una relación entre el término inercial y conductivo

$$\frac{\Delta T}{t} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_{T,t}^2} , \quad (2.14)$$

y así es posible obtener una evolución del espesor  $\delta_T^2$  en el tiempo tal que

$$\delta_{T,t} \sim (\alpha t)^{1/2} \quad (2.15)$$

### 2.5.2. Escala de la velocidad convectiva

Para ver la escala de la velocidad se derivan e igualan los términos de presión  $\frac{\delta^2 P}{(\delta x \delta y)}$  en las ecuaciones de momentum descritas en la ecuación 2.12, lo que resulta en

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sobre esta ecuación existen grupos de variables correspondientes a la inercia, fuerza de fricción y fuerza de flotación. Los términos que dominan cada grupo básico en la ecuación de conservación de momentum son correspondientemente

$$\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{\text{grupo inercia}}, \quad \underbrace{\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}}_{\text{grupo fricción}}, \quad \underbrace{g\beta \frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{grupo flotación}}. \quad (2.17)$$

Lo que en término de escalamiento resulta en

$$\frac{w_t}{t \delta_{T,t}}, \quad \nu \frac{w_t}{\delta_{T,t}^3}, \quad g\beta \frac{\Delta T}{\delta_{T,t}}. \quad (2.18)$$

Es importante determinar si la flotabilidad se equilibra principalmente con la fricción o la inercia. Para poder determinarlo se divide las escalas anteriores por el término de fricción obteniéndose

$$\frac{1}{\text{Pr}}, \quad 1, \quad \frac{g\beta \Delta T \delta_{T,t}^2}{\nu w}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, para fluidos con Pr de orden 1 o mayor es correcto asumir que el balance de fuerzas se da entre la flotación y la fricción, es decir

$$1 \sim \frac{g\beta \Delta T \delta_{T,t}^2}{\nu w}. \quad (2.20)$$

Y se concluye que el escalamiento de la velocidad convectiva es

$$w_t \sim \frac{g\beta \Delta T \delta_{T,t}^2}{\nu}. \quad (2.21)$$

### 2.5.3. Escala de espesor dinámico y térmico de la capa límite

Con respecto a la ecuación de conservación de energía los términos dominantes para cada grupo básico son

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{grupo inercia}}, \quad \underbrace{w \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{grupo convección}}, \quad \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{\text{grupo conducción}}. \quad (2.22)$$

Con respecto al escalamiento esto resulta en

$$\frac{\Delta T}{\partial t} \quad , \quad w_t \frac{\Delta T}{H} \quad , \quad \alpha \frac{\Delta T}{\delta_{T,t}^2} . \quad (2.23)$$

Al aumentar  $t$  la velocidad convectiva aumenta según la ecuación 2.21 mientras que el termino inercial disminuye en importancia hasta alcanzar  $t_f$  donde se considera que el fluido se encuentra en un estado estacionario y solo hay balance entre la conducción y la convección tal que

$$w_f \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_{T,f}^2} . \quad (2.24)$$

Por otra parte se tiene la velocidad convectiva a partir de las ecuaciones 2.15 y 2.21 por lo que se puede reescribir como

$$w_f \sim \frac{g\beta\Delta T\delta_{T,f}^2}{\nu} \sim \frac{g\beta\Delta T\alpha t_f}{\nu} , \quad (2.25)$$

entonces a partir del balance entre convección y conducción se puede obtener un escalamiento del tiempo  $t_f$  hasta llegar a un estado estacionario tal que

$$\frac{g\beta\Delta T\alpha t_f}{\nu} \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_{T,f}^2} , \quad (2.26)$$

lo que implica

$$t_f \sim \left( \frac{\nu H}{g\beta\Delta T\alpha} \right)^{1/2} . \quad (2.27)$$

Con este último resultado es posible reescribir las ecuaciones 2.15 y 2.21 para obtener las escalas  $\delta_{T,f}$  y  $w_f$  en el estado estacionario

$$\begin{cases} \delta_{T,f} \sim H \text{Ra}_H^{-1/4} \\ w_f \sim \frac{\alpha}{H} \text{Ra}_H^{1/2} \end{cases} , \quad (2.28)$$

donde  $\text{Ra}_H$  es el número de Rayleigh usando de referencia la altura  $H$  tal que

$$\text{Ra}_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu} . \quad (2.29)$$

Afuera de la capa límite aún se desarrolla un perfil de velocidad (cómo en el caso de fluidos con un Pr alto). El grosor de estos jets son de  $\delta_{w,t}$ . En esta región afuera de la capa límite térmica, pero dentro de la capa límite dinámica hay un balance entre inercia y difusión viscosa en la ecuación de conservación de momentum, por lo tanto

$$\frac{w_t}{t\delta_{w,t}} \sim \nu \frac{w_t}{\delta_{w,t}^3} , \quad (2.30)$$

y así

$$\delta_{w,t} \sim (\nu t)^{1/2} \sim \text{Pr}^{1/2} \delta_{T,t} . \quad (2.31)$$

En la figura 2.2 se puede ver un esquema de la evolución de la capa límite dinámica y térmica hasta alcanzar el estado estacionario.

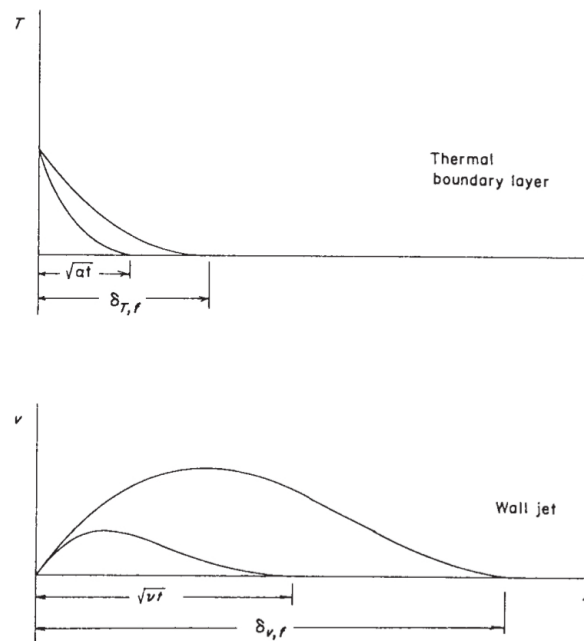


Figura 2.2: Evolución de la capa límite dinámica y térmica cerca de la pared caliente. Imagen obtenida de [29].

Se pueden encontrar mayores detalles en el documento [29].

## 2.6. Adimensionamiento de las ecuaciones gobernantes

Se busca realizar un adimensionamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles para incluirlas como las ecuaciones gobernantes en el modelo numérico de la cavidad diferencialmente calentada de esta memoria. Para ello se toman cinco variables de referencia para la longitud, el tiempo, la velocidad, la temperatura y la presión. En particular el tiempo, la velocidad y la presión de referencia se formulan utilizando la velocidad convectiva para un estado estacionario definida en la ecuación 2.28 tal que

$$\begin{aligned} L_{\text{ref}} &= H & t_{\text{ref}} &= \frac{H^2}{\alpha} \text{Ra}_H^{-1/2} & u_{\text{ref}} &= \frac{\alpha}{H} \text{Ra}_H^{1/2} \\ T_{\text{ref}} &= \Delta T & P_{\text{ref}} &= \rho \frac{\alpha^2}{H^2} \text{Ra}_H \end{aligned}$$

Por otra parte se construyen variables adimensionales a partir de estas referencias

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x}{L_{\text{ref}}} = \frac{x}{H} & z_* &= \frac{z}{L_{\text{ref}}} = \frac{z}{H} & t_* &= \frac{t}{t_{\text{ref}}} = t \frac{\alpha}{H^2} \text{Ra}_H^{1/2} \\ u_* &= \frac{u}{u_{\text{ref}}} = u \frac{H}{\alpha} \text{Ra}_H^{-1/2} & w_* &= \frac{w}{u_{\text{ref}}} = w \frac{H}{\alpha} \text{Ra}_H^{-1/2} & & (2.32) \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_{\text{ref}}} = \frac{T - T_0}{\Delta T} & P_* &= \frac{P_d}{P_{\text{ref}}} = P_d \frac{H^2}{\rho \alpha^2} \text{Ra}_H^{-1} \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones adimensionales se introducen estas variables al interior de las ecuaciones de Navier-Stokes (ec. 2.12) y para ello también se debe incluir al interior de las derivadas utilizando la regla de la cadena. Por ejemplo el término  $\partial u / \partial t$  es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial u_*} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} \frac{\partial t_*}{\partial t} = \left( \frac{\alpha}{H} \text{Ra}_H^{1/2} \right) \frac{\partial u_*}{\partial t_*} \left( \frac{\alpha}{H^2} \text{Ra}_H^{1/2} \right) = \frac{\alpha^2}{H^3} \text{Ra}_H \frac{\partial u_*}{\partial t_*} \quad (2.33)$$

En la tabla 2.1 se indican las igualdades correspondientes de las variables adimensionales sobre los distintos operadores utilizados en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Tabla 2.1: Equivalencia de las derivadas de la velocidad, la temperatura y la presión utilizando variables adimensionales.

variable	$\partial/\partial t$	$\partial/\partial x$	$\partial^2/\partial x^2$
$u$	$\frac{\alpha^2}{H^3} \text{Ra}_H^{1/2} \frac{\partial u_*}{\partial t_*}$	$\frac{\alpha}{H^2} \text{Ra}_H^{1/2} \frac{\partial u_*}{\partial x_*}$	$\frac{\alpha}{H^3} \text{Ra}_H^{1/2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2}$
$T$	$\frac{\alpha \Delta T}{H^2} \text{Ra}_H^{1/2} \frac{\partial \theta}{\partial t_*}$	$\frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \theta}{\partial x_*}$	$\frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_*^2}$
$P_d$	-	$\frac{\rho \alpha^2}{H^3} \text{Ra} \frac{\partial P_*}{\partial x_*}$	-

Al hacer el cambio de variable y reordenando las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales utilizando aproximación de Boussinesq se obtienen las ecuaciones de Oderbeck-Boussinesq

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \\ \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = -\frac{\partial P_*}{\partial x_*} + \text{PrRa}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \right) \\ \frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial w_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = -\frac{\partial P_*}{\partial z_*} + \text{PrRa}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} \right) + \text{Pr}\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial \theta}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial \theta}{\partial z_*} = \text{Ra}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_*^2} \right) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

# Capítulo 3

## Método numérico

Las herramientas numéricas se han convertido en una parte crucial en el desarrollo de tecnologías emergentes. Entre estas herramientas es de nuestro interés la Dinámica de Fluidos Computacionales (CFD por sus siglas en inglés). La idea básica es usar algoritmos apropiados para encontrar soluciones a las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo.

CFD se ha vuelto una herramienta indispensable para las industrias de automóviles, de plantas de energía, industrias químicas, nucleares e industrias marinas entre varias otras. La razón de su éxito radica en la capacidad de resolver ecuaciones complejas que no tienen una solución analítica como es el caso de de las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales también gobiernan el movimiento del fluido al interior de las CDC.

Para discretizar y resolver las ecuaciones de Navier-Stokes es posible utilizar el método de diferencia finitas (FDM), el método de volúmenes finitos (FVM), el método de elementos finitos (FEM) y el método espectral (SM) entre otros. En particular, se decide trabajar con el método de los elementos espectrales (SEM) el cual es una combinación entre los métodos SM y FEM.

Por una parte el método espectral (SM) consiste en representar una ecuación diferencial mediante una expansión ortogonal de alto orden. Los coeficientes se determinan mediante el método de los pesos residuales (ver anexo A.1). Por otra parte, el método de los elementos finitos (FEM) consiste en la aplicación del método de los pesos residuales sobre una serie de expansiones en la que cada una de estas representa una pequeña parte del dominio (un elemento).

El atractivo del SM es su precisión. Sin embargo, no es posible implementar en dominios geométricos complejos como en un dominio no-conexo. Mientras que el atractivo del FEM es su generalidad, pero comúnmente en este método se eligen usar formas cuadráticas para representar los elementos y en consecuencia la precisión se alcanza con dificultad.

El SEM se aprovecha del atractivo de estas dos técnicas para crear un método que sea fácil de implementar y a la vez tenga una gran precisión de resultados. Básicamente es aplicar el método espectral dentro de subdominios como en el método de elementos finitos. Esta técnica fue presentada por primera vez en 1984 por Patera [30]. En este capítulo se detalla el método.

Para este trabajo el método de los elementos espectrales se implementa mediante el uso del código Nek5000 para aproximar la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes [31]. El código Nek5000 fue creado en 1990 por P. Fischer, J. Kruse, J. Mullen bajo la asistencia técnica de A. Petera y Y. Maday con tal de discretizar las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. El código está escrito en lenguaje Fortran 77 y C, y en términos generales puede usarse para realizar simulaciones tipo DNS y LES para casos de transferencia de calor, magnetohidrodinámica, flujos reactivos y flujos de transporte de sedimentos.

El proceso de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas requerirá transformar un esquema **local** hacia un esquema **global** a través del proceso de **ensamblaje global**.

Antes de continuar se recomienda al lector leer el anexo desde A.1 hasta A.6, pues en la sección actual se busca aplicar los conceptos allí indicados para discretizar las ecuaciones de Navier-Stokes. En el anexo indicado se incluyen los conceptos:

- Método de los pesos residuales    -Método de Galerkin    -Mapeo paramétrico
- Ensamblaje global    -Cuadratura de Gauss
- Integración y diferenciación en expansiones multidimensionales

### 3.1. Formulación de Galerkin

Comúnmente el método de los elementos finitos utiliza la formulación de Galerkin descrita en el anexo A.2. En esta sección se describe como formular el problema de

Galerkin empezando por una ecuación diferencial y a diferencia del anexo el análisis aquí se centra en como el esquema es integrado en el software computacional. Para mayor información se puede consultar los documentos [32, 33].

A modo de ejemplo, tomamos la ecuación de advección-difusión expresado en su forma fuerte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Si  $c = u$  entonces la expresión sería la ecuación de Burger. Por simplicidad se asume que  $c = 1$ . La forma débil se obtiene multiplicando el residual por una función de forma  $v(x)$  e integrando sobre el dominio (ver anexo A.1):

$$(v, R) = \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0. \quad (3.2)$$

El orden de la derivada del término difusivo puede ser reducido integrando por partes. Luego al elegir una base de  $v(x)$  que se anula en los límites del dominio  $\partial\Omega$  la formulación de Galerkin es como sigue:

Encontrar  $u$  tal que

$$\int_{\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (3.3)$$

la solución  $u(x, t)$  puede ser aproximado mediante una combinación de funciones de prueba  $\psi(x)$  tal que:

$$u^{\delta}(x, t) = \sum_{n=0}^N u_n(t) \psi_n(x). \quad (3.4)$$

En el método de Galerkin la función de forma se representa utilizando el mismo set de polinomios:

$$v(x) = \sum_{n=0}^N \psi_n(x). \quad (3.5)$$

Es conveniente que  $\psi$  se describa utilizando expansiones ortogonales dentro de la región. En la sección 3.2 se describen dos opciones usadas comúnmente. Al aplicar las aproximaciones sobre la formulación de Galerkin se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right) \frac{du_j}{dt} + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \int_{\Omega} \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx \right) u_j \\ = 0 + \nu \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \int_{\Omega} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right) u_j . \end{aligned} \quad (3.6)$$

La forma matricial de la ecuación anterior es:

$$M \frac{du}{dt} = -Ku - Cu , \quad (3.7)$$

con

$$M[i, j] = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \quad (3.8)$$

$$K[i, j] = \int_{\Omega} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (3.9)$$

$$C[i, j] = \int_{\Omega} \psi_i \frac{d\psi_j}{dx} dx , \quad (3.10)$$

donde a  $M$  se le conoce como la matriz de masa. En la sección 3.4 se describen diferentes matrices utilizadas en el problema numérico. Se verá que en particular la matriz de masa se puede describir usando la matriz de peso  $W$  y la matriz modal  $B$  tal que  $M = B^T W B$ .

## 3.2. Funciones base en el método de los elementos espectrales

Históricamente se han usado tanto bases nodales como modales para definir la función de forma en la aproximación de Galerkin. En las versiones más tempranas del SEM [30, 34] se utilizaba una base modal con polinomios de Chebyshev, pero más recientemente se ha optado por el uso de polinomios de Legendre para obtener cuadraturas numéricas más precisas. Si en la aproximación de Galerkin no hay errores de integración entonces los métodos son matemáticamente idénticos. Sin embargo, cada enfoque tiene diferentes propiedades numéricas en términos de la eficiencia de la implementación, la habilidad de variar el orden del polinomio y el condicionamiento.

A continuación se presentan las expansiones ortogonales más comunes.

### 3.2.1. Polinomios de Legendre (base modal)

El polinomio de Legendre de orden  $k$ , notado  $L_k(x)$ , es la solución del problema de Sturm-Liouville<sup>1</sup> cuando  $\alpha = \beta = 0$  dentro de la región  $(-1 < x < 1)$ , lo que también se le conoce como la ecuación diferencial de Legendre tal que

$$-\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} L_k(x) \right) = k(k+1)L_k(x). \quad (3.11)$$

Los polinomios de Legendre pueden obtenerse a través de la siguiente relación de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)xL_n + nL_{n-1} = 0. \quad (3.12)$$

Además obedecen la ecuación diferencial:

---

<sup>1</sup>El problema de Sturm-Liouville se escribe:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x)^{1+\alpha} (1+x)^{1+\beta} \frac{d}{dx} u_p(x) \right] = \lambda_p (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u_p(x)$$

donde

$$\lambda_p = -k(\alpha + \beta + k + 1)$$

$$(x^2 - 1)L_n'' + 2xL_n' - n(n + 1)L_n = 0 \quad (3.13)$$

Los primeros 6 polinomios de Legendre se presentan en la tabla 3.1 y en la figura 3.1 se observa una representación de estos para  $x \in [-1, 1]$ .

Los polinomios de Legendre son polinomios ortogonales respecto al producto interno en el intervalo  $[-1, 1]$ :

$$(L_n, L_m) = \int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{mn} \quad (3.14)$$

donde  $\delta_{nm}$  es el delta de Kronecker.

Las propiedades de los polinomios de Legendre son

1. Los  $L_n$  son definidos en  $[-1, +1]$ ,
2. Todas las raíces de  $L_n \in [-1, +1]$ ,
3. Todas las raíces son reales
4. Todos los polinomios  $L_n$  son ortogonales entre si
5. La derivada del polinomio de Legendre  $L_n$  es:

$$\frac{d}{dx} L_n(x) = \frac{n}{1 - x^2} [L_{n-1}(x) - xL_n(x)] \quad (3.15)$$

Tabla 3.1: Primeros 6 polinomios de Legendre.

<b>n</b>	$L_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

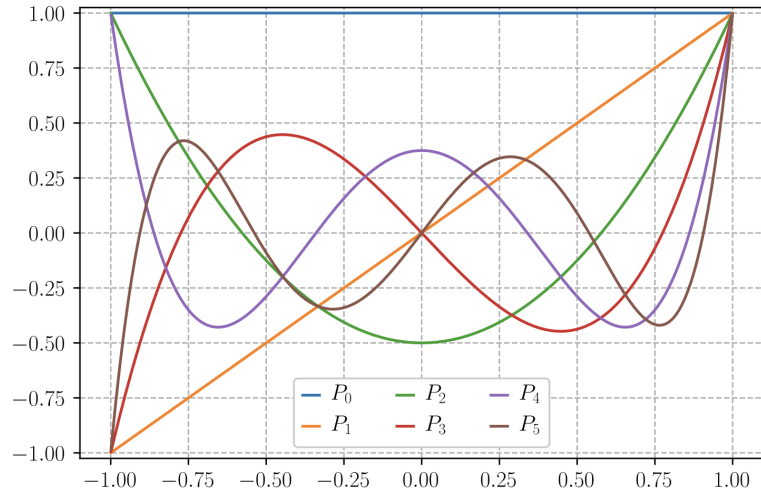


Figura 3.1: Representación de los primeros 6 polinomios de Legendre.

### 3.2.2. Polinomio de Lagrange (base nodal)

El polinomio de Lagrange es un polinomio de orden  $P$  con  $P + 1$  puntos nodales en  $x_q$  ( $0 \leq q \leq P$ ). Una propiedad del polinomio de Lagrange  $h_p$  es que es igual a la unidad en  $x_p$  y es nulo en  $x_q$  cuando se cumple que  $p \neq q$ , es decir

$$h_p(x_q) = \delta_{pq} , \quad (3.16)$$

donde  $\delta$  es el delta de Kronecker. El polinomio puede ser escrito en forma factorial como

$$h_p(x) = \frac{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x - x_q)}{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x_p - x_q)} . \quad (3.17)$$

En el caso que las raíces del polinomio se ubiquen en los puntos **Gauss- Legendre-Lobatto** (GLL) <sup>2</sup> los diferentes modos se vuelven ortogonales entre si, lo cual convierten al polinomio de Lagrange en una base estable para el método de los elementos espectrales espectral (ver figura 3.2). En este caso particular el polinomio de Lagrange se pueden expresar en término de los polinomios de Legendre:

<sup>2</sup>Los puntos GLL corresponden a la posición de las  $N + 1$  raíces del polinomio  $(1 - x^2)P'_n(x)$ , donde  $P'_n$  es la primera derivada del polinomio de Legendre de orden  $N$ . Estos puntos también corresponden a la cuadratura de la integración numérica que permite integrar exactamente polinomios de grados  $2N - 1$  (ver anexo A.5).

$$h_q(x) = \frac{-1}{N(N+1)} \frac{(1-x^2) L'_n(x)}{(x-x_q) L_n(x_q)} \quad 0 \leq q \leq P. \quad (3.18)$$

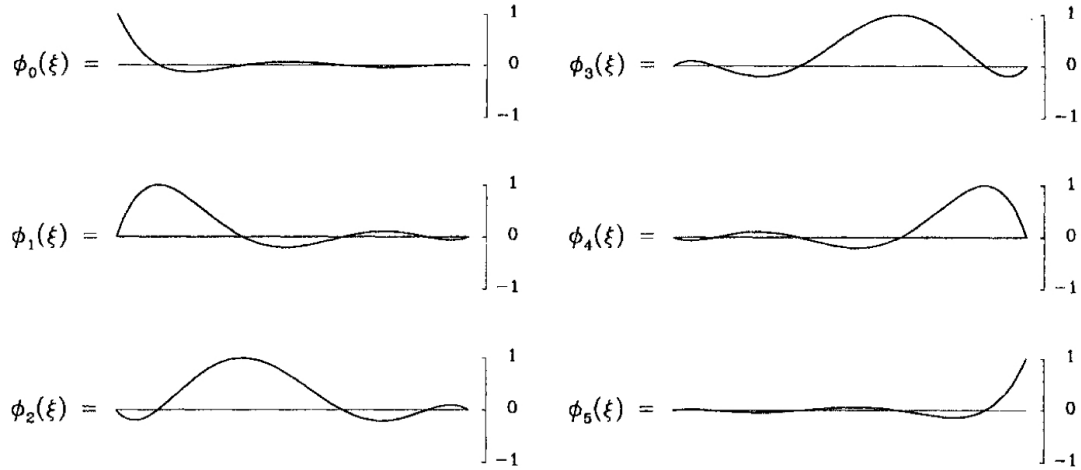


Figura 3.2: Representación de polinomios de Lagrange con raíces en los puntos GLL. Imagen obtenida de [32]. En el contexto de la imagen original  $\phi_i$  son las funciones de peso definidas con los polinomios de Lagrange correspondientes.

De aquí en adelante para definir las funciones de prueba y de forma se utilizan polinomios de Lagrange con raíces en los puntos GLL. Así se estará en concordancia con el análisis e información presentes en los documentos [32, 33]. Por otra parte Fischer (creador del software Nek5000) ha preferido utilizar este tipo de expansión en variadas ocasiones [35, 36]. Más concretamente, en las lecturas realizadas por él en el Real Instituto de Tecnología (KTH) se menciona que típicamente SEM utiliza esta base nodal. Sin embargo es usual hacer un mapeo entre los polinomios de Legendre y los polinomios de Lagrange con pérdida mínima de información.

### 3.3. Preámbulos a la discretización de las ecuaciones gobernantes

Se busca una solución discretizada  $u^\delta(x_1, x_2, x_3)$  de la forma descrita en la ecuación 3.19,

$$u^\delta(x_1, x_2, x_3) = \sum_p^P \sum_q^P \sum_r^P \hat{u}_{pqr} \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^e, \quad (3.19)$$

donde  $\hat{u}_{pqr}$  es el coeficiente de expansión correspondiente a cada modo  $\phi_{pqr}$  (y es independiente del espacio),  $\Omega^e$  es un subdominio del espacio o un **elemento e**,  $x_i$  es una coordenada **global**, es decir que describe una posición dentro del conjunto de todos los subdominios elementales  $\Omega^e$ , y  $\xi_i$  es una coordenada **local**, es decir que solo tiene significado dentro de un solo subdominio  $\Omega^e$  y su valor varía entre  $-1$  y  $1$ . La transformación notada  $\chi^e$  desde las coordenadas **locales** hacia las coordenadas **globales** dependerá del tipo de estructura de  $\Omega^e$ . Mayores detalles se pueden encontrar en [32]. El inverso de  $\chi^e$  también es cierto y en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\chi_1^e)^{-1}(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_2 &= (\chi_2^e)^{-1}(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_3 &= (\chi_3^e)^{-1}(x_1, x_2, x_3) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Teniendo estas definiciones es posible empezar a discretizar las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, antes se presenta la notación elemental para ilustrar el procedimiento numérico.

## 3.4. Notación elemental

### 3.4.1. Vector de velocidad $u$

Se escribe como  $u$  la evaluación de  $u(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k})$  siendo  $\xi_{1i}$  la ubicación de las raíces del polinomio de Lagrange en dirección  $\xi_1$  utilizando los puntos de cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). Si tenemos  $Q_1, Q_2, Q_3$  cantidad de nodos de cuadratura en cada dirección  $(x, y, z)$ , entonces el vector  $u$  se representa como

$$u[m(ijk)] = u(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}), \quad (3.21)$$

donde

$$m(ijk) = i + jQ_1 + kQ_1Q_2 .$$

siendo  $m(ijk)$  un indicador nodal. Numéricamente primero se recorre los nodos  $Q_1$ , seguido de los nodos  $Q_2$  y finalizando con  $Q_3$ .

### 3.4.2. Vector coeficiente de expansión

A diferencia del vector  $u$  el coeficiente de expansión  $\hat{u}$  es constante en el espacio y su rol es cuantificar la presencia del modo  $\phi_{pqr}$  tal que  $0 \leq p \leq P_1$ ,  $0 \leq q \leq P_2$ ,  $0 \leq r \leq P_3$ .

$$\hat{u}[m(pqr)] = \hat{u}_{pqr} . \quad (3.22)$$

### 3.4.3. Matriz de peso W

La matriz de peso  $W$  contiene los pesos de las cuadraturas numéricas multiplicado por el jacobiano  $|J|$  en el caso de trabajar con dos o tres dimensiones en el espacio. Cabe decir que el jacobiano es consecuencia de un mapeo desde las coordenadas globales  $(x_1, x_2, x_3)$  hacia las coordenadas locales  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ya que en el segundo caso se consideran regiones estándares. Para que el mapeo sea exitoso se debe asegurar que el jacobiano sea estrictamente positivo. Si se trabajan con regiones estructuradas (regiones con forma hexaédrica o de cuadrilátero) esto siempre se cumplirá y la matriz de peso se representará como

$$W[m(ijk)][n(ijk)] = J_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k \delta_{mn} . \quad (3.23)$$

Esta matriz será diagonal. Un esquema para ejemplificar es

$$W = \begin{bmatrix} \omega_0 \omega_0 \omega_0 J_{ijk} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{Q_1} \omega_0 \omega_0 J_{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{Q_1-1} \omega_{Q_2-1} \omega_{Q_3-1} J_{ijk} \end{bmatrix} .$$

El lector habrá notado que el último término de la matriz se escribe con notación  $Q_{i-1}$  porque el primer término parte en 0. Para ilustrar el uso de esta matriz se considera el producto interno  $(v, u)$  en término de las coordenadas locales  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$(v, u) = \int_{\Omega^e} v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 ,$$

y se le aplica la cuadratura de Gauss obteniéndose

$$(v, u)_\delta = \sum_{i=0}^{Q_1-1} \sum_{j=0}^{Q_2-1} \sum_{k=0}^{Q_3-1} \omega_i \omega_j \omega_k v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) |J_{ijk}| .$$

donde la notación del sufijo  $\delta$  hace referencia a que es una operación discretizada o finita. Conociéndose la definición y forma del vector  $u$  y la matriz  $W$  la expresión anterior puede escribirse simplemente como

$$(v, u)_\delta = v^T W u . \quad (3.24)$$

### 3.4.4. Matriz modal B

La matriz modal  $B$  representa el valor de los modos  $\phi_{pqr}$  evaluados en los diferentes puntos  $(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k})$  de la cuadratura, en otras palabras es el set de polinomios en la ecuación 3.19 que buscan aproximar la solución del problema. Al estar trabajando bajo el método de Galerkin, la matriz  $B$  también representa el set de modos que definen a la función de forma.

$$B[m(ijk)][n(ijk)] = \phi_{pqr}(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}) . \quad (3.25)$$

De forma esquemática esto sería

$$B = \begin{bmatrix} \phi_{000}(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) & \cdot & \phi_{00P_3}(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) & \cdot & \phi_{P_1 P_2 P_3}(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) \\ \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots \\ \phi_{000}(\xi_{1Q_1}, \xi_{20}, \xi_{30}) & \cdot & \phi_{00P_3}(\xi_{1Q_1}, \xi_{20}, \xi_{30}) & \cdot & \phi_{P_1 P_2 P_3}(\xi_{1Q_1}, \xi_{20}, \xi_{30}) \\ \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots \\ \phi_{000}(\xi_{1Q_1}, \xi_{2Q_2}, \xi_{3Q_3}) & \cdot & \phi_{00P_3}(\xi_{1Q_1}, \xi_{2Q_2}, \xi_{3Q_3}) & \cdot & \phi_{P_1 P_2 P_3}(\xi_{1Q_1}, \xi_{2Q_2}, \xi_{3Q_3}) \end{bmatrix} .$$

Así, si se quisiera representar matricialmente la ecuación 3.19 se tendrá a partir de los vectores  $u$ ,  $\hat{u}$  y la matriz  $B$  la expresión

$$u = B\hat{u} .$$

Y en el caso particular SEM, al trabajar con los polinomios de Lagrange se tiene la propiedad  $h_p(x_q) = \delta_{pq}$  y por lo tanto la matriz modal  $B$  se reduce a la matriz identidad  $I$ , entonces

$$u = \hat{u} .$$

### 3.4.5. Matriz de diferenciación D

Una diferenciación de  $u^\delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sobre una dirección  $\xi_1$  (ver anexo, sección A.6.2) se expresa:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{r=0}^{P_1} \sum_{s=0}^{P_2} \sum_{t=0}^{P_3} u_{rst} \frac{\partial h_r(\xi_1)}{\partial \xi_1} h_s(\xi_2) h_t(\xi_3) , \quad (3.26)$$

donde  $u_{rst}$  es la evaluación de la solución aproximada  $u^\delta$  sobre las abscisas de la cuadratura  $(\xi_{1r}, \xi_{2s}, \xi_{3t})$ . Se quiere introducir una matriz de diferenciación  $D_{\xi_1}$  que sirva como un operador tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = D_{\xi_1} u . \quad (3.27)$$

Entonces la matriz de diferenciación se define

$$D_{\xi_1}[m(ijk)][n(rst)] = \frac{\partial h_r(\xi_{1i})}{\partial \xi_1} h_s(\xi_{2j}) h_t(\xi_{3k}) . \quad (3.28)$$

Ya que la propiedad del polinomio de Lagrange provoca que  $h_s(\xi_{2j}) = \delta_{sj}$  y  $h_t(\xi_{3k}) = \delta_{tk}$  se tiene como resultado una matriz diagonal, lo que esquemáticamente sería

$$D_{\xi_1} = \begin{bmatrix} D^{1d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{1d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{1d} \end{bmatrix} , \quad (3.29)$$

donde

$$D^{1d} = \frac{\partial h_r(\xi_{1i})}{\partial \xi_1} .$$

### 3.4.6. Matriz genérica $\Lambda$

Cuando se expresa la diferenciación sobre una región elemental (ver sección A.6.2.3) es necesario hacer una transformación desde las coordenadas **globales** hacia las coordenadas **locales**, y esto significa que es necesario definir la expresión  $\frac{\partial \xi_1}{x_1}$  para definir el operador gradiente  $\nabla$  (ver apéndice). Para efectos prácticos se guarda el valor de  $\frac{\partial \xi_1}{x_1}$  para los distintos puntos de cuadratura  $\xi_{1i}$  a través de una matriz genérica  $\Lambda$  con componentes diagonales igual a una función cualquiera  $f(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k})$ , es decir

$$\Lambda \left( f(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}) \right) [m(ijk)][n(rst)] = f(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}) \delta_{mn} . \quad (3.30)$$

De esta forma la notación matricial de  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_3}$  es

$$u_{x_1} = \left[ \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) D_{\xi_2} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right) D_{\xi_3} \right] u$$

### 3.4.7. Vectores de coeficientes de expansión $\hat{u}_g$ y $\hat{u}_l$

El traspaso desde un punto de vista **local** sobre un elemento local ( $\Omega^e$ ) hacia un punto de vista **global** sobre todo el dominio ( $\Omega$ ) conlleva a definir una relación entre los coeficientes de expansión locales y globales. En la sección A.4 se describe más en detalle la relación entre ambos, pero en definitiva se puede decir que existirán más coeficientes de expansión locales que su contraparte. Para corregir el problema y al mismo tiempo expresar una continuidad sobre los modos globales se utiliza la matriz de ensamblaje  $A$  sobre los vectores de coeficiente de expansión  $\hat{u}_g$  y  $\hat{u}_l$ . El primero guarda los coeficientes de expansión  $\hat{u}$  de todos los modos globales utilizados para aproximar la solución y tiene la forma

$$\hat{u}_g = \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_{\text{dof}}-1} \end{bmatrix} .$$

donde dof se refiere a los grados de libertad por sus siglas en inglés.

Por otra parte el segundo vector  $\hat{u}_l$  guarda el valor de los coeficientes locales  $\hat{u}^e$ , el que a su vez almacena el valor de los coeficientes en los distintos nodos<sup>3</sup>.

$$\hat{u}_l = \begin{bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}^2 \\ \vdots \\ \hat{u}^{N_{\text{el}}} \end{bmatrix} .$$

Tal como se mencionó anteriormente la relación entre ambos se indica utilizando una matriz de ensamblaje  $A$  tal que

$$\hat{u}_l = A\hat{u}_g . \quad (3.31)$$

En particular el proceso de describir el vector de coeficientes de expansión globales

---

<sup>3</sup>para un mismo modo local  $\phi$ ,  $\hat{u}^e$  es igual en los diferentes nodos porque no depende del espacio, sin embargo numéricamente se debe indicar.

a partir del coeficiente de expansión local se llama **ensamblaje global** y se define por la operación

$$\hat{u}_g = A^T \hat{u}_l . \quad (3.32)$$

### 3.5. Discretización del método de Galerkin

En esta sección se considerarán dos dimensiones espaciales, pero el análisis puede ser extrapolado para tres dimensiones. En el anexo, sección A.2 se encuentra disponible la descripción del método de Galerkin. A continuación se plantea como discretizar las expresiones que definen el método de Galerkin.

A partir de las definiciones de la aproximación de la solución (ecuación 3.19) se puede definir el residual  $R(u)$  sobre coordenadas locales, es decir sobre un solo subdominio elemental  $\Omega^e$

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) - u(\xi_1, \xi_2) = R(u) , \quad (3.33)$$

lo que es equivalente a decir

$$\left( \sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \right) - u(\xi_1, \xi_2) = R(u) .$$

Se aplica el método de los pesos residuales (ver sección A.1), es decir que condici-  
ciona la función de forma  $v$  tal que  $(v, R) = 0$ ,

$$\left( v, \sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \right) - (v, u(\xi_1, \xi_2)) = (v, R) ,$$

sea

$$\left( v, \sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \right) - (v, u(\xi_1, \xi_2)) = 0 ,$$

es decir

$$\left( v, \sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \right) = (v, u(\xi_1, \xi_2)) .$$

Luego se aplica el método de Galerkin (ver sección A.2), lo que es decir que el factor de forma  $v$  se define con los mismos modos que la solución ( $v = \phi_{pq}$ ),

$$\left( \phi_{rs}, \sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \right) = (\phi_{rs}, u(\xi_1, \xi_2)) .$$

En esta expresión es posible introducir el producto interno  $( , )$  al interior de la sumatoria ya que el coeficiente de expansión  $\hat{u}_{pq}$  es independiente del espacio, obteniéndose

$$\sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} (\phi_{rs}, \phi_{pq}) \hat{u}_{pq} = (\phi_{rs}, u) .$$

A continuación se discretiza la integral mediante una cuadratura gaussiana (ver sección A.5) e indicamos su expresión mediante la notación del sub-índice  $\delta$  (i.e. este sub-índice indica que es una operación discretizada),

$$\sum_p^{P_1} \sum_q^{P_2} (\phi_{rs}, \phi_{pq})_{\delta} \hat{u}_{pq} = (\phi_{rs}, u)_{\delta} . \quad (3.34)$$

Se busca expresar esta última relación de forma matricial ayudándose de los vectores y matrices anteriormente definidos. Previamente se utilizó la matriz de peso  $W$  para representar la cuadratura de Gauss (ecuación 3.24). En el caso del método de Galerkin la función de forma  $v$  toma la forma de los modos de la aproximación  $\phi_{rs}$ , por lo tanto se representa matricialmente a través de la matriz modal  $\mathbf{B}$ , y así

$$(\phi_{rs}, u)_{\delta} = B^T W u[m(rs)] . \quad (3.35)$$

Y de forma similar

$$(\phi_{rs}, \phi_{pq})_{\delta} = M[m(rs)][n(pq)] = B^T W B[m(rs)][n(pq)] , \quad (3.36)$$

donde a  $M$  se le conoce como la matriz de masa que también se observa en la ecuación 3.8. Entonces la ecuación 3.34 se representa matricialmente como

$$M \hat{u} = B^T W u .$$

Finalmente el problema de Galerkin queda discretizado. El problema se resuelve al encontrar los valores del vector de los coeficientes de expansión  $\hat{u}$ , entonces

$$\hat{u} = M^{-1} (B^T W u) .$$

En el caso del SEM los modos  $\phi$  se definen utilizando polinomios de Lagrange  $h_p$  (ver sección 3.2.2) y debido a la propiedad  $h_p(\xi_i) = \delta_{pi}$  la matriz modal  $B$  resulta en una matriz identidad ( $B = I$ ), por lo tanto el esquema discreto se simplifica mediante

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (B^T W B)^{-1} B^T W u \\ &= (I W I)^{-1} W I u \\ &= W^{-1} W u \\ &= u . \end{aligned}$$

### 3.6. Operador laplaciano débil

El operador laplaciano débil  $L^e$  sobre un elemento  $\Omega^e$  puede ser usado para definir la operación

$$(\nabla v, \nabla u) = L^e \hat{u} ,$$

donde

$$(\nabla v, \nabla u) = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) .$$

Por análisis previo se tiene la noción que  $(v, u) = v^T W u = B^T W B \hat{u}$ . Por otra parte el operador  $L^e$  se define utilizando las matrices  $\Lambda(f(\xi_1, \xi_2))$  y  $D_{\xi_i}$  tal que

$$L^e = \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) D_{\xi_2} \right) B \right]^T W \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) D_{\xi_2} \right) B \right] + \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) D_{\xi_2} \right) B \right]^T W \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) D_{\xi_2} \right) B \right] .$$

En esta ecuación al aplicar la transpuesta se obtiene

$$L^e = B^T \left[ D_{\xi_1}^T \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) + D_{\xi_2}^T \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \right] W \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) D_{\xi_2} \right) B \right] + B^T \left[ D_{\xi_1}^T \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) + D_{\xi_2}^T \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \right] W \left[ \left( \Lambda \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) D_{\xi_1} + \Lambda \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) D_{\xi_2} \right) B \right] .$$

### 3.7. Discretización de la ecuación de Helmholtz

Es conocido que la ecuación de Helmholtz se escribe

$$\nabla^2 u(x) - \lambda u(x) = f(x) . \quad (3.37)$$

Para que exista continuidad se debe hacer cumplir que las funciones se definan sobre los subespacios  $(u(x) \in \mathcal{H}^1)$ <sup>4</sup> y  $(f(x) \in \mathcal{L}^2)$ <sup>5</sup>. Estas condiciones mínimas corresponden a la familia de funciones posibles que pueden tomar  $u(x)$  y  $f(x)$  al interior

4

$$\mathcal{H}_\Omega^1 = \left\{ f : \int_\Omega f^2 + \|\nabla f\|^2 dx < \infty \right\} \quad (3.38)$$

5

$$\mathcal{L}_\Omega^2 = \left\{ f : \int_\Omega f^2 dx < \infty \right\} \quad (3.39)$$

de la ecuación de Helmholtz.

Se aplica el producto interno de la ecuación 3.37 con respecto a la función de forma  $v(x)$  con  $v(x) \in H^1$ ,

$$(v, \nabla^2 u) - (v, \lambda u) = (v, f) .$$

Con tal de reducir  $\nabla^2$  hacia  $\nabla$  se utiliza el teorema de la divergencia tal que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dS + \int_{\Omega} v \nabla^2 u dS \end{aligned}$$

es decir,

$$(v, \nabla^2 u) = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n dx - (\nabla v, \nabla u) .$$

Entonces la ecuación de Helmholtz queda

$$(\nabla v, \nabla u) + (v, \lambda u) = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n dx - (v, f) .$$

Para resolver la ecuación primero se considera un análisis local sobre un solo elemento singular  $e$  discretizado y luego se construye el sistema global. Siguiendo las descripciones matriciales definidas en la sección anterior los componentes de la ecuación de Helmholtz son

$$(\nabla v, \nabla u) = L^e \hat{u}^e \quad (v, \lambda u) = \lambda M^e \hat{u}^e \quad (v, f) = (B^e)^T W^e f^e$$

resultando en

$$L^e \hat{u}^e + \lambda M^e \hat{u}^e = - (B^e)^T W^e f^e \quad (3.40)$$

En esta aproximación no se considera la integral de línea sobre la frontera elemental  $\partial\Omega$  ya que la mayoría de los elementos no contemplan este término. La matriz que representa este término se integrará en la representación global.

La discretización sobre todos los elementos es

$$[\underline{L}^e + \lambda \underline{M}^e] \hat{u}_l = - (\underline{B}^e \underline{W}^e) f_l ,$$

donde  $\hat{u}_l$  y  $f_l$  son la concatenación de  $\hat{u}^e$  y  $f^e$ , es decir que  $\hat{u}_l = \underline{u}^e$  y  $f_l = \underline{f}^e$ . Los modos globales son continuos y existen en  $\mathcal{H}^1$ , y tal como se indica en la sección A.4 la continuidad desde el punto de vista **local** se representa por medio de una matriz de ensamblaje  $A$  mediante la cual  $\hat{u}_l = A \hat{u}_g$ . Entonces la discretización de la ecuación de Helmholtz desde el punto de vista **global** se escribe

$$H \hat{u}_g = \Gamma - A^T (\underline{B}^e \underline{W}^e) f_l , \quad (3.41)$$

donde  $\Gamma$  representa la integral de línea sobre  $\partial\Omega$  y  $H$  es la matriz débil de Helmholtz tal que

$$H = L + \lambda M = A^T [\underline{L}^e + \lambda \underline{M}^e] A .$$

Finalmente el problema se resuelve invirtiendo la matriz de Helmholtz y obteniendo los coeficientes de expansión globales

$$\hat{u}_g = H^{-1} [\Gamma - A^T (\underline{B}^e \underline{W}^e) f_l] .$$

### 3.8. Discretización de la ecuación de Navier-Stokes incompresible

El problema del acoplamiento se refiere a la aparición de las variables de velocidad y presión en las 3 ecuaciones de la conservación de momentum. El gradiente de presión que aparece como termino fuente en estas ecuaciones es el motor del flujo. Sin embargo, no disponemos de ninguna ecuación de transporte para la variable de presión. Si el gradiente de presión fuera conocido, se podría calcular el campo de velocidad que verifica la ecuación de conservación de masa. Lamentablemente, la presión es siempre una variable a determinar, al igual que la velocidad. Varios métodos han sido desarrollados para resolver numéricamente este problema. En particular en esta sección se utilizará el **algoritmo de Uzawa**. Cabe destacar que el esquema que se presentará podría diferir del utilizado en Nek5000.

La ecuación de Navier-Stokes incompresible es

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= -\nabla p + \nu \nabla^2 v \\ \nabla \cdot v &= 0 \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\end{aligned}\tag{3.42}$$

donde  $p(x, t)$  es la presión y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Por simplicidad se asume que la densidad es  $\rho = 1$ . Para discretizar la ecuación se utiliza al **algoritmo de Uzawa** como método de desacople entre la velocidad y la presión. Primero se detallará en qué consiste este método al considerar un caso **estacionario** para finalmente discretizar el caso **no-estacionario**.

#### 3.8.1. Algoritmo de Uzawa: caso estacionario

Al considerar el caso estacionario la ecuación de Navier-Stokes incompresible despreja el término que involucra al tiempo resultando en

$$\begin{aligned}\nu \nabla^2 v - \nabla p &= f \\ \nabla \cdot v &= 0 .\end{aligned}\tag{3.43}$$

donde  $f$  incluye al término de la fuerza volumétrica y todas las contribuciones de los términos explícitos<sup>6</sup>. Al introducir los vectores y matrices definidos en la sección 3.4 la ecuación anterior se discretiza como

$$\begin{aligned}\nu L v^\delta - D^T p^\delta &= M f \\ D v^\delta &= 0 .\end{aligned}\tag{3.44}$$

Para acoplar los campos de velocidad y presión primero se descompone la velocidad

$$v^\delta = \frac{1}{\nu} (L^{-1} D^T p^\delta + L^{-1} M f) ,$$

y luego se introduce dentro de la ecuación de continuidad de masa

$$D v^\delta = \frac{1}{\nu} (D L^{-1} D^T p^\delta + D L^{-1} M f) = 0 .$$

Entonces la ecuación queda reescrita como

$$\begin{aligned}\nu \nabla^2 v - \nabla p &= f \\ S_0 p^\delta &= -D L^{-1} M f ,\end{aligned}\tag{3.45}$$

siendo  $S_0 = D L^{-1} D^T$  llamada la matriz de presión, la cual es una matriz simétrica semi-definida positiva. Primero se resuelve para la presión y luego para la velocidad. No son necesarias ninguna condición de frontera para la presión ya que se puede asumir discontinuidad en las interfaces elementales y no está definida en ninguna frontera.

---

<sup>6</sup>El término convectivo de la ecuación 3.42 se está considerando de forma explícita y va incluido dentro de  $f$ .

### 3.8.2. Algoritmo de Uzawa: caso no-estacionario

Usando las notaciones de los vectores y matrices definidos en la sección 3.4 la ecuación 3.42 resulta en

$$\begin{aligned} M \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \nu L v^{n+1} &= -D^T p^{n+1} + M f^{n+1} \\ -D v^{n+1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Este sistema es absolutamente estable y se realizó una demostración en [32]. Se utiliza el algoritmo de Uzawa para desacoplar los campos de presión y velocidad obteniéndose

$$\begin{aligned} H v^{n+1} - D^T p^{n+1} &= M f^{n+1} \\ S_t p^{n+1} &= -D H^{-1} M f^{n+1}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde  $f^{n+1}$  incluye todos los términos explícitos y los operadores  $S_t$  (matriz de presión) y  $H$  (matriz de Helmholtz) son equivalentes a

$$S_t \equiv D H^{-1} D^T,$$

$$H \equiv \frac{M}{\Delta t} + \nu L.$$

# Capítulo 4

## Metodología general de los problemas

Si bien en esta memoria se trabaja con dos tipos de problemas diferentes (uno con actuadores activos y otro con actuador pasivo) ambos son parte de un problema aún más general, dígase **Convección natural interna** (capítulo 2). Por otra parte ambos problemas utilizan los mismos métodos numéricos (ver capítulo 3) a pesar de tener mallas numéricas diferentes. El propósito de este capítulo es presentar una metodología general de los dos problemas y así evitar repetir los mismos procedimientos metodológicos en distintos capítulos.

### 4.1. Descripción del problema sin actuadores

Se considera un modelo 2D de una CDC con aire (asumido como fluido newtoniano) al interior (con  $Pr = 0,71$ ). Ver el esquema de la figura 2.1. La cavidad tiene una altura  $H$  y un ancho  $W$  en el plano  $x - z$  tal que el ratio de aspecto  $A_z = H/W$  es igual a 4. La diferencia de temperatura  $\Delta T = T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}}$  se impone en las paredes verticales, y la temperatura reducida  $\theta$  se define como  $\theta = \frac{T - T_{\text{mean}}}{\Delta T}$ . Las paredes horizontales se consideran adiabáticas. El aire se asume con viscosidad cinemática  $\nu$ , difusividad térmica  $\alpha$ , conductividad térmica  $k_f$ , densidad  $\rho$  y un coeficiente de expansión térmica  $\beta$  (ecuación 2.11). La aceleración gravitacional  $\vec{g}$  actúa en dirección  $-z$ .

## 4.2. Modelo matemático

Se supone que el aire al interior de la CDC está gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes bajo las suposiciones de Oderbeck-Boussinesq (ecuación 2.34). Ya que  $\text{Pr}$  y  $A_z$  están fijas la solución solo depende del número de Rayleigh  $\text{Ra}_H = g\beta\Delta TH^3/(\nu\alpha)$  el cual para efectos de este trabajo se considera  $\text{Ra}_H = 9 \times 10^7$  justo debajo del valor crítico  $\text{Ra}_H = 1,02 \times 10^8$  [6]. Se usa un enfoque adimensional y para ello las dimensiones de referencia son:  $H$  para el espacio,  $u_{\text{ref}} = \alpha\text{Ra}^{1/2}/H$  para la velocidad,  $t_{\text{ref}} = H^2\text{Ra}^{-1/2}/\alpha$  para el tiempo y  $P_{\text{ref}} = \rho u_{\text{ref}}^2$ . Se define una temperatura reducida  $\theta = (T - T_0)/\Delta T$  con  $T_0 = (T_h + T_c)/2$ . Ver sección 2.6 para mayores detalles del proceso de adimensionamiento. La forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo las condiciones de Oderbeck-Boussinesq son:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{PrRa}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{PrRa}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \text{Pr}\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{Ra}^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

Por conveniencia se prefiere dejar de usar la notación con sufijo \* para denotar las variables adimensionales. Si un cuerpo sólido conductivo se posiciona al interior de la cavidad (capítulo 5) la ecuación de la conservación de la energía se lee como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_s \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta. \quad (4.2)$$

donde  $a_s$  es la difusividad del cuerpo sólido.

## 4.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son el no-desplazamiento de velocidad en las paredes, es decir

$$u = w = 0 , \quad (4.3)$$

y por otra parte las paredes horizontales son adiabáticas para evitar la transferencia de calor en estas superficies

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial z}(x, 1) = 0 \quad (4.4)$$

En las paredes activas las condiciones de frontera térmicas son:

$$\begin{aligned} \theta(x = 0, z, t) &= \theta_h = 0,5 && \text{para } \forall t , \\ \theta(x = 0,25, z, t) &= \theta_c = -0,5 && \text{para } \forall t . \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el caso de un cuerpo sólido y conductivo se posiciona al interior de la cavidad la interfase entre el fluido y el obstáculo se expresa como

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\text{fluido}} = k_r \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\text{sólido}} , \quad (4.6)$$

donde  $n$  es el vector normal a la superficie del sólido y  $k_r$  es el ratio entre la conductividad térmica del sólido  $k_s$  y la conductividad térmica del fluido  $k_f$  :  $k_r = k_s/k_f$ .

#### 4.4. Medición de la transferencia de calor para las modificaciones

Para calcular el número de Nusselt promediado en el tiempo y espacio en la pared isotérmica (por ejemplo pared caliente) como:

$$\langle \overline{Nu}_d \rangle = \frac{1}{\Delta t_{\text{avg}}} \int_0^1 \int_t^{t+t_{\text{avg}}} - \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} dt dz , \quad (4.7)$$

donde  $\langle \overline{Nu}_d \rangle$  corresponde al número de Nusselt promedio cuando el caso está perturbado por las modificaciones empleadas sobre la CDC. Con tal de estimar el impacto

de las perturbaciones sobre la transferencia de calor en las paredes activas el parámetro  $G_{Nu}$  llamado la ganancia de Nusselt se calcula

$$G_{Nu} = \frac{\langle \overline{Nu_d} \rangle - \langle \overline{Nu_{bf}} \rangle}{\langle \overline{Nu_{bf}} \rangle} \times 100 \quad (4.8)$$

donde  $\langle \overline{Nu_{bf}} \rangle$  indica el correspondiente valor del número de Nusselt para el caso base (bf por sus siglas en inglés), i.e si no existen modificaciones sobre la cavidad. Así  $G_{Nu}$  representa la ganancia relativa ( $G_{Nu} > 0$ ) o la pérdida relativa ( $G_{Nu} < 0$ ) de la transferencia de calor comparado con el caso sin modificar ( $G_{Nu} = 0$ ).

## 4.5. Métodos Numéricos

Para resolver el sistema de ecuaciones 4.1 se utiliza el código abierto Nek5000, que se basa en el método de los elementos espectrales (SEM). La técnica se encuentra más detallada en el capítulo 3. En resumen se puede decir que el método de elementos espectrales (SEM) se influencia del método de los elementos finitos (FEM) para obtener una solución finita al interior de un elemento. En cada elemento espectral las ecuaciones de Navier-Stokes son reescritas con una formulación débil por el método de Galerkin, donde las funciones de forma y de peso se describen utilizando polinomios de Lagrange con raíces ubicadas en los puntos definidos por la cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) de forma similar al método espectral (SM).

El paso de tiempo en Nek5000 es semi-implícito. Los términos difusivos de las ecuaciones de Navier-Stokes son tratados usando diferencia atrasada de tercer orden (BDF3), mientras que los términos no lineales son tratados mediante un esquema de extrapolación de tercer orden (EXT3), lo que lleva a un sistema de ecuaciones discretas de Helmholtz. El sistema linear resultante del método para velocidad y temperatura se resuelve usando un algoritmo GMRES. El desacoplamiento entre la velocidad y la presión se realiza mediante el algoritmo de Uzawa (ver sección 3.8). Para los diferentes casos se define un paso de tiempo que pueda resolver todas las escalas del flujo respetando la condición Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

## 4.6. Caso base

El número de Rayleigh,  $Ra_H = 9 \times 10^7$ , se elige por debajo del número de Rayleigh crítico  $Ra_c = 1,052 \times 10^8$  [6]. De este modo, el caso del flujo base corresponde a un estado estacionario y los resultados pueden ser comparados con el trabajo de *Thiers et al.* [1]. Los perfiles de temperatura y velocidad vertical se presentan en la figura 4.1. El espesor  $\delta_\theta(z)$  de la capa límite térmica se define como la distancia mínima a la que se alcanza la temperatura media  $\theta = 0$  [37]. De igual forma el espesor de la capa límite dinámica  $\delta_w(z)$  se define como la distancia mínima a la cual la velocidad vertical se desvanece [5]. En el centro de la cavidad,  $z = 0,5$ , se tiene que  $\delta_\theta(z) = 0,03$  y  $\delta_w(z) = 0,05$ . Se puede observar que el gradiente de temperatura disminuye a lo largo de la pared caliente cuando  $z$  aumenta (ver figura 4.1a), mientras que el máximo de la velocidad  $w$  aumenta (ver figure 4.1b).

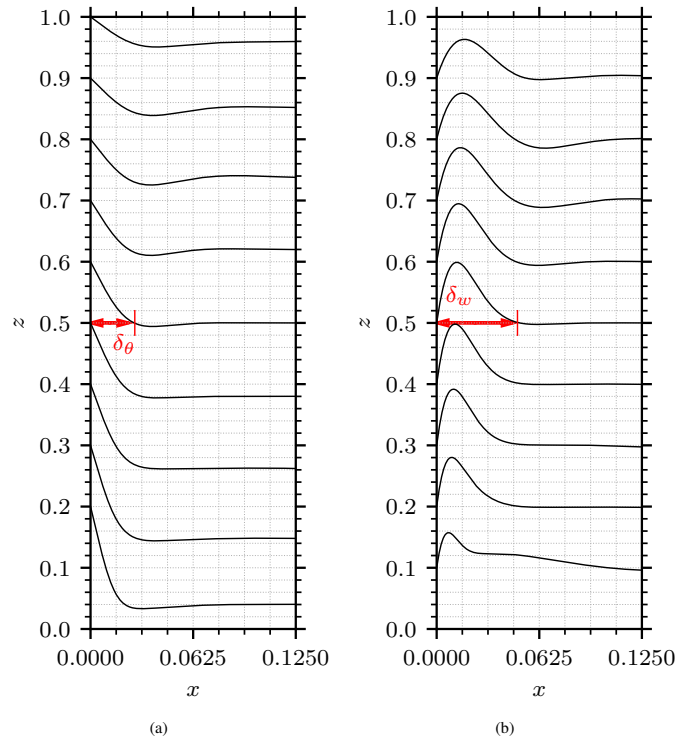


Figura 4.1: Flujo base para  $Ra_H = 9 \times 10^7$ : a) perfiles horizontales de la temperatura  $\theta$  en la pared caliente; b) velocidad vertical  $w$  para nueve alturas diferentes ( $z = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ ). Se presenta la definición del espesor para la capa límite térmica  $\delta_\theta(z = 0,5)$  y para la capa límite dinámica  $\delta_w(z = 0,5)$

### 4.6.1. Validación del caso base

La malla del caso base considera  $5 \times 20$  elementos espectrales en direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$  respectivamente y un orden de polinomio igual a 24. Para validar la malla los resultados se comparan con los presentados por Gadoin et al. [38] para un amplio rango de números de Rayleigh entre  $Ra_H = 6,4 \times 10^6$  y  $1,92 \times 10^8$ . Los resultados en la tabla 4.1 se encuentran en un acuerdo total.

Tabla 4.1: Para diferentes números de Rayleigh, el número de Nusselt promedio,  $\langle Nu \rangle$ . Comparación con los resultados reportados por [38].

Rayleigh	Presente	Gadoin
$6,4 \times 10^6$	15,49	15,49
$6,4 \times 10^7$	27,46	27,46
$1,28 \times 10^8$	32,69	32,69
$1,6 \times 10^8$	34,56	34,56
$1,92 \times 10^8$	36,17	36,17

## 4.7. Visualización por LIC

El flujo de convección al interior de la cavidad se visualiza usando Convolución por Integral de Línea (LIC). Este método fue inicialmente propuesto por Cabral & Leedom [39] en 1993, y está basado en la técnica DDA (Discrete Dipole Approximation) presentado por Van Wijk [40].

Debido a su simplicidad las líneas de corriente y la visualización de vectores se imponen como el tipo de visualizaciones más conocidos. Sin embargo, a la hora de extraer información del movimiento convectivo, es fácil ver por qué la visualización mediante LIC es una herramienta más precisa. En las figuras 4.2-a, b, c y d se muestran diferentes tipos de visualizaciones en la parte superior ( $z \in [0,7; 1]$ ) de una CDC sin ningún tipo de actuador activo o pasivo (**caso base**).

En el caso de la visualización a partir de las líneas de corriente (ver figura 4.2-a) se puede ver que el flujo se mueve verticalmente en las cercanías de las paredes verticales y se observa un movimiento de recirculación en la zona central. Se entiende en parte la dinámica del flujo. Sin embargo existen varios problemas inherentes de este método:

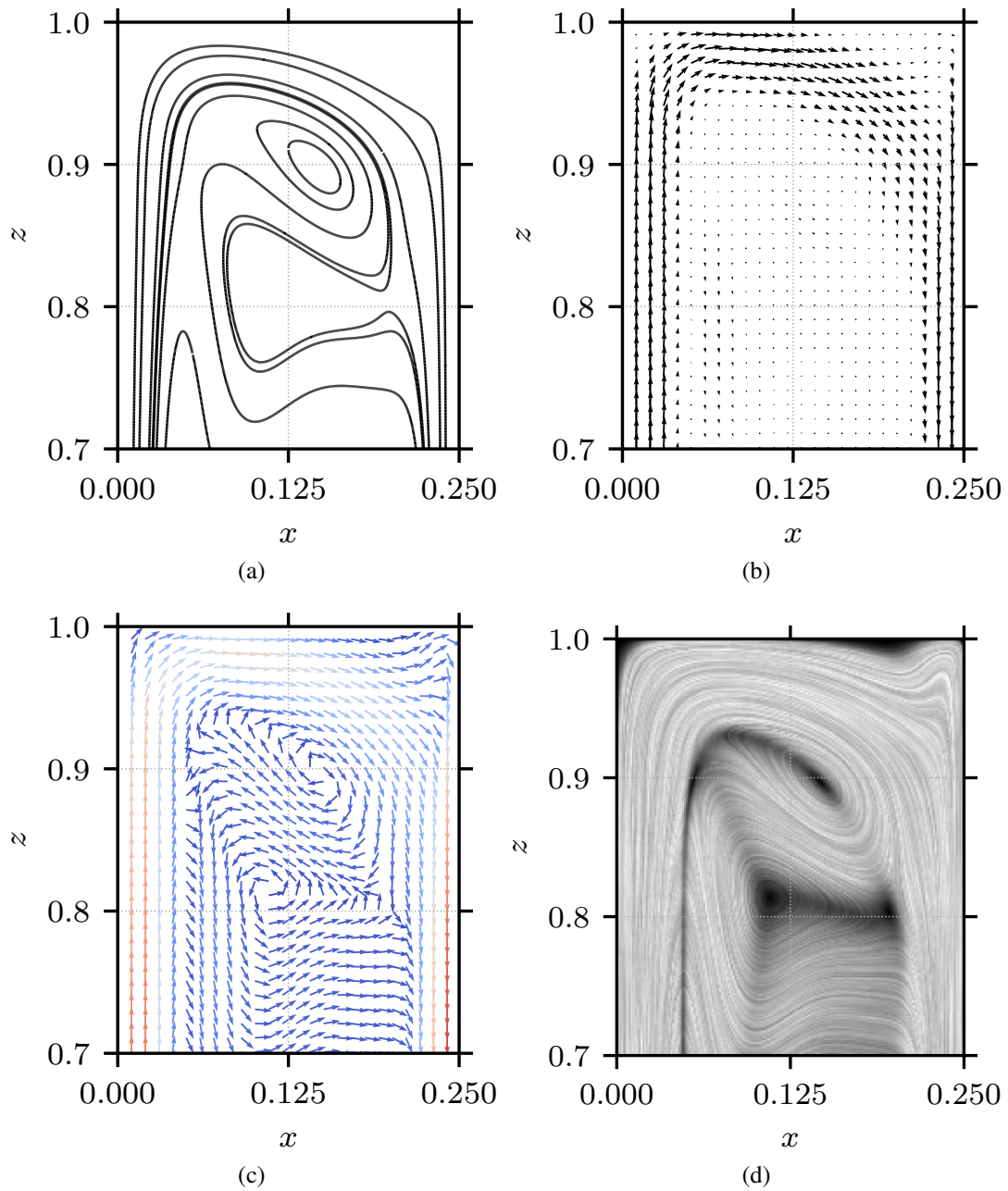


Figura 4.2: Distintos tipos de visualización del flujo en la sección superior de una cavidad diferencialmente calentada: a) líneas de corriente, b) y c) visualización por vectores, d) LIC.

- La técnica requiere disponer de posiciones iniciales por donde pasará la líneas de corriente, por lo tanto se necesita saber con anticipación cual es el tipo de

movimiento esperado. En consecuencia la técnica está supeditado a errores humanos y puede convertirse en un proceso tedioso ya que depende en gran parte del “ensayo y error”.

- No se logra percibir el sentido del movimiento.
- No existe una visualización de la magnitud del movimiento. Desde el punto de vista del observador las líneas de corriente tienen el mismo nivel de intensidad lo que puede llegar a ser una pista equivocada, y puede dar cabida a conclusiones erróneas.

Por otra parte, la visualización por vectores (ver figuras 4.2-b y c) son capaces de definir un sentido y una magnitud al movimiento. Existen dos opciones para representar los vectores. En el primero (figura 4.2-b) la magnitud se representa mediante el tamaño del vector y en el segundo caso 4.2-c la magnitud se representa mediante un espectro de colores. Para este caso en particular y a diferencia del caso de las líneas de corriente se puede percibir a partir de la figura 4.2-b que la velocidad aumenta en las secciones adyacentes a la pared y que la zona central se mantiene relativamente estática. En este caso no fue necesario agregar puntos de partida, el método no depende de un factor humano y en cambio se tiene una visualización homogénea. A pesar de ello esta técnica tiene sus propias complicaciones:

- Si se elige representar la magnitud mediante el tamaño del vector se puede llegar a estropear la visualización si los vectores llegan a ser muy grandes, sobretodo en una visualización 3d.
- Por el contrario si los vectores son muy pequeños es complicado visualizar el movimiento convectivo de las secciones más débiles, que a pesar de su magnitud pueden impactar en el comportamiento dinámico global del caso de estudio.

Considerando las ventajas y desventajas de las diferentes técnicas de visualización la LIC sobresale entre las tres. Si bien no resuelve por si misma la visualización de la magnitud existe una noción de continuidad que facilita la lectura del movimiento convectivo del flujo. Y por otra parte no depende del factor humano ya que no requiere introducir puntos de partida y el cálculo se realiza de forma homogénea sobre todo el campo.

### 4.7.1. Cálculos para obtener la visualización LIC

La visualización LIC se basa en la técnica DDA (Discrete Dipole Approximation) presentado por Van Wijk [40]. En la técnica DDA cada vector en el campo es usado para crear una línea DDA sobre una malla tal como se observa en la segunda fila de la figura 4.3 la cual es tangencial a la dirección del vector y tiene un longitud  $L$  en ambos sentidos. Sobre la línea DDA se aplica una textura de forma tal que cada píxel se asocian a un píxel de la textura en cuestión (en la figura 4.3 se aplica ruido blanco) y luego al sumar los valores normalizados se obtiene el tono de un solo píxel de la imagen de salida (proceso de convolución).

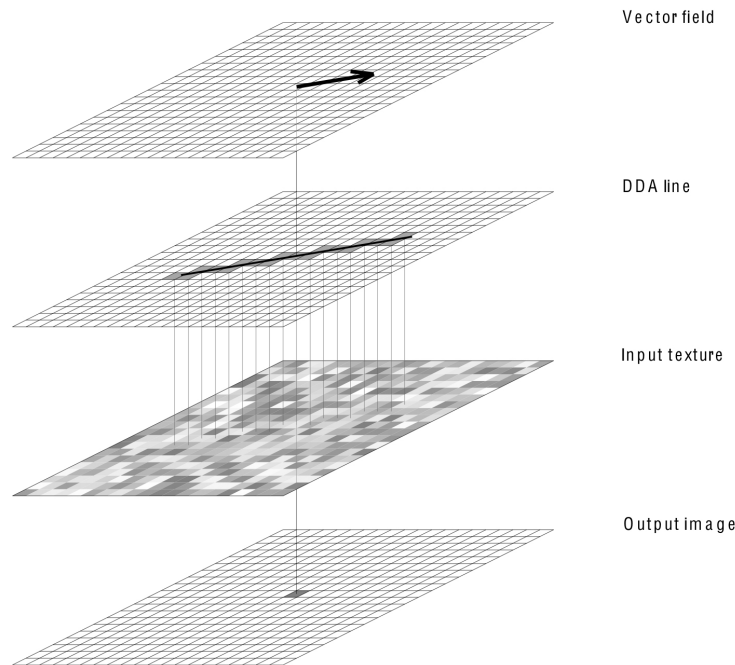


Figura 4.3: Mapeo de un vector una línea DDA sobre una textura de ruido blanco para generar un píxel. Imagen de [39].

El punto de vista DDA puede ser visto como una técnica con perspectiva local ya que solo se toma en cuenta la dirección del vector del punto en el campo. Es una técnica eficiente, pero inadecuada o incorrecta. Para flujos laminares puede ser una buena aproximación, pero cuando se tienen estructuras más complejas e incluso con radios de curvatura menores que el tamaño del píxel la técnica no se aproxima bien utilizando una línea recta. Una mejor aproximación sería utilizar la misma técnica pero con una perspectiva global. Esto es la técnica LIC.

En la técnica LIC en vez de representar el filtro kernel como una línea recta se busca incluir la línea de corriente que pasa por el punto del campo. Para obtener un valor final (un tono para la imagen de salida) se evalúan todos los píxeles por los que pasa la línea de corriente. Las distintas posiciones  $P_i$  se calculan como

$$P_0 = (x + 0,5, y + 0,5) \quad [\text{el centro del píxel}]$$

$$P_i = P_{i-1} + \frac{V(\lfloor P_{i-1} \rfloor)}{\|V(\lfloor P_{i-1} \rfloor)\|} \Delta s_{i-1} \quad (4.9)$$

donde  $V(\lfloor P_{i-1} \rfloor)$  es el vector en el punto  $(\lfloor P_x \rfloor, \lfloor P_y \rfloor)$  y  $\Delta s_i$  es la distancia para llegar al siguiente píxel. Esta ecuación solo es aplicable en el sentido positivo del vector, moviéndose hacia adelante en la línea de corriente. La ecuación equivalente para el sentido negativo es

$$P'_0 = P_0$$

$$P'_i = P'_{i-1} + \frac{V(\lfloor P'_{i-1} \rfloor)}{\|V(\lfloor P'_{i-1} \rfloor)\|} \Delta s'_{i-1} \quad (4.10)$$

Como resultado se obtiene la línea de corriente representada en la figura 4.4. Se puede observar que en cada celda (o píxel) existe una línea recta usando la dirección del vector posicionado al centro.

Ahora se tienen la posición  $(\lfloor P_x \rfloor, \lfloor P_y \rfloor)$  de todos los píxeles que participan en la conformación de la línea de corriente. Los valores de entrada de cada píxel (es decir el correspondiente tono del ruido blanco, como se observa en la imagen 4.3) se denota como  $F(\lfloor P \rfloor)$ . Finalmente es posible obtener un valor de salida  $F'(\lfloor P \rfloor)$  con la ayuda de un valor  $h_i$  definido como la integral exacta del kernel de convolución  $k(w)$ , es decir

$$h_i = \int_{s_i}^{s_i + \Delta s_i} k(w) dw, \quad (4.11)$$

donde

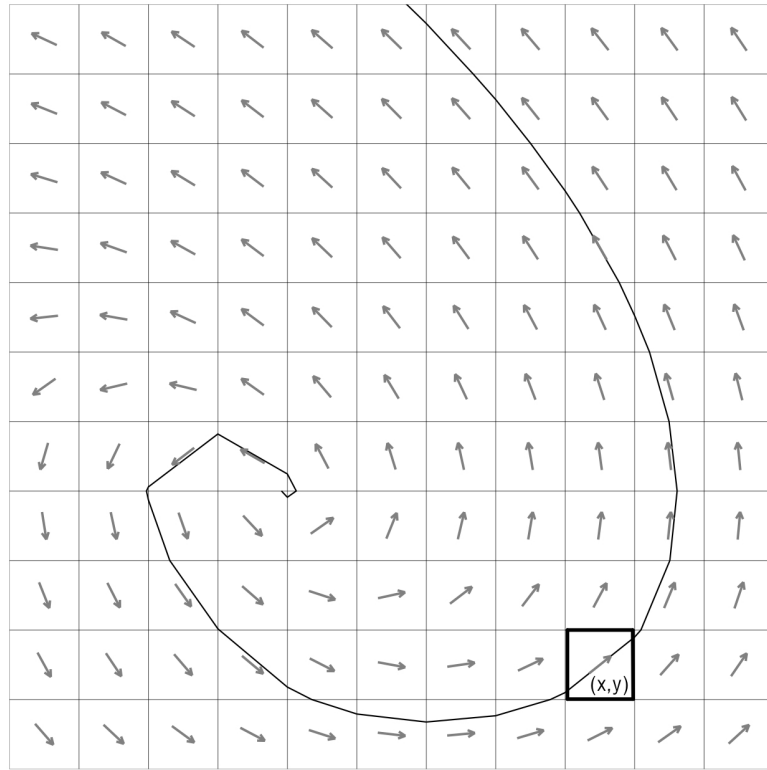


Figura 4.4: Campo de vectores indicando la línea de corriente local que empieza en la celda  $(x, y)$ . Imagen de [39].

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_i = s_{i-1} + \Delta s_{i-1} \end{cases}$$

Así el valor de salida  $F'(\lfloor P \rfloor)$  es igual a

$$F'(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^l F(\lfloor P \rfloor) h_i + \sum_{i=0}^{l'} F(\lfloor P' \rfloor) h'_i}{\sum_{i=0}^l h_i + \sum_{i=0}^{l'} h'_i}, \quad (4.12)$$

donde  $l$  es el número de píxeles considerados dentro de la línea de corriente (en un solo sentido).

En la figura 4.5 se realiza una comparación entre DDA y LIC. Las imágenes son obtenidas del documento [39] donde se utilizó el mismo campo de vectores para cada

caso. En la primera fila de la figura 4.5 se muestra una dinámica circular, y en la segunda una dinámica turbulenta. Al realizar la comparación es apreciable que en el caso de DDA hay información que se pierde o que está mal interpretada. En cambio en LIC se percibe una mayor continuidad al estar usando de referencia las líneas de corriente en sus cálculos. En efecto, se observa que las figuras 4.5-b y 4.5-d incluyen líneas de corriente que mantienen una tonalidad similar.

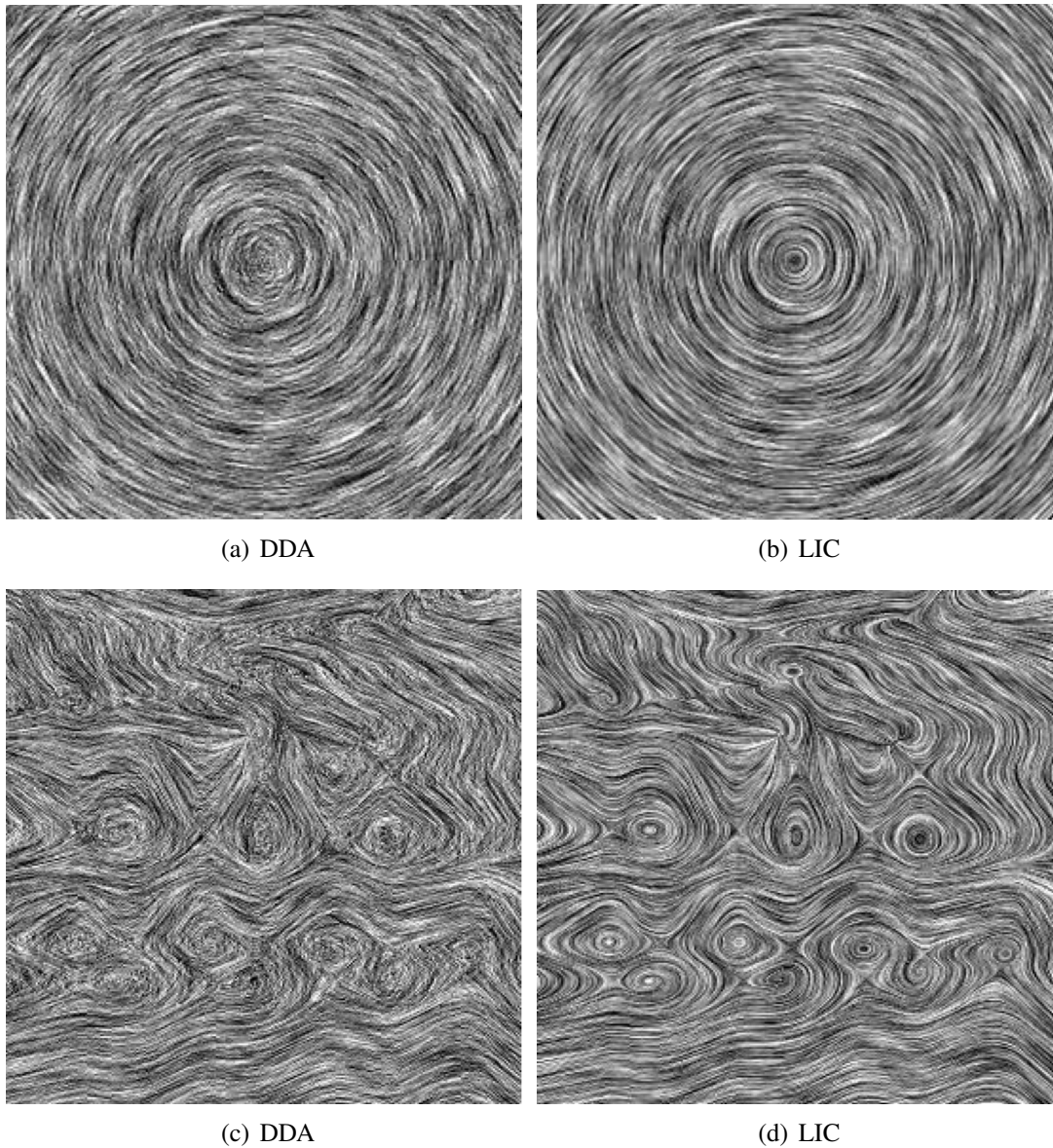


Figura 4.5: Comparación gráfica entre DDA y LIC sobre las mismas simulaciones. Imágenes de [39].

#### 4.7.1.1. Filtros de movimiento

El algoritmo de LIC presentado anteriormente no permite visualizar la dirección del movimiento por si mismo y requiere el uso de un kernel de convolución  $k(w)$ . Freeman et al. [41] describen una técnica que simula el movimiento usando convoluciones especiales. Para crear una noción de movimiento en las imágenes LIC es deseable crear un filtro periódico de paso bajo para difuminar la textura en dirección del vector del campo. Esto se puede lograr incorporando un filtro de Hanning que tiene la forma

$$k(w) = \frac{1}{2} (1 + \cos(w + \beta)) .$$

Sin embargo no es conveniente usar esta expresión directamente ya que el LIC es un algoritmo de tipo local por lo tanto va a haber un corte (cutoff) abrupto de la función tal como se puede observar en la primera columna de la figura 4.6. Una solución a este problema es utilizar una ventana gaussiana como se sugiere en [42], es decir combinar el filtro de Hanning con un filtro de Gauss <sup>1</sup> (segunda fila de la figura 4.6), resultando en la función que se observa en la tercera fila de la figura 4.6.

La forma general de esta nueva función es

$$\begin{aligned} k(w) &= \underbrace{\frac{1 + \cos(cw)}{2}}_{\text{Ventana Gaussiana}} \times \underbrace{\frac{1 + \cos(dw + \beta)}{2}}_{\text{Ventana de Hanning}} \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos(cw) + \cos(dw + \beta) + \cos(cw) \cos(dw + \beta)) , \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $c$  y  $d$  representan las constantes de dilatación de Hanning y  $\beta$  es el cambio de fase en radianes. La integral de esta función desde un punto  $a$  hasta un punto  $b$  (ecuación 4.11) es

---

<sup>1</sup>Esta ventana se puede describir usando el filtro de Hanning mientras se considere  $\beta = 0$ .

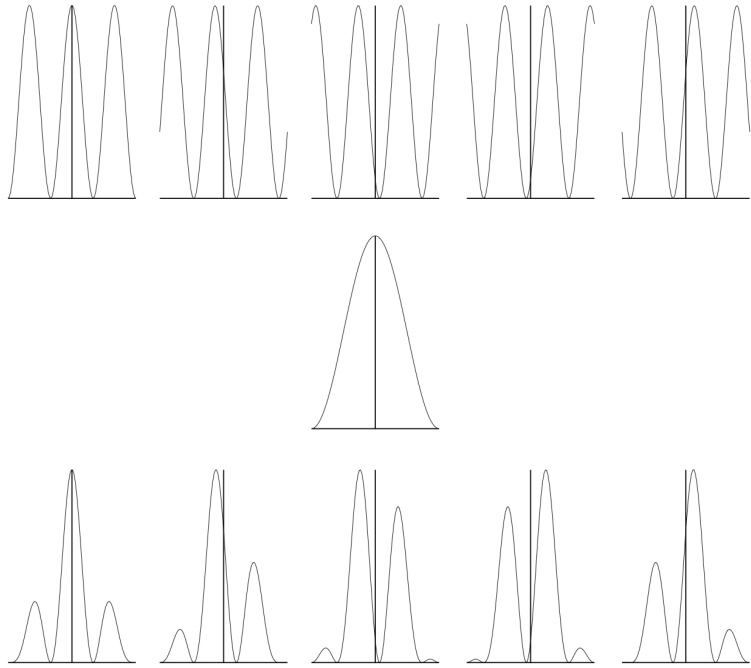


Figura 4.6: funciones onda de Hanning con diferentes fases (arriba), ventana gaussiana (medio), y función onda de Hanning multiplicada por la ventana gaussiana (abajo). Imagen de [39].

$$\int_{s_i}^{s_i + \Delta s_i} k(w) dw = \frac{1}{4} \left[ b - a + \frac{\sin(bc) - \sin(ac)}{c} \right. \\
 + \frac{\sin(bd + \beta) - \sin(ad + \beta)}{d} \\
 + \frac{\sin(b(c - d) - \beta) - \sin(a(c - d) - \beta)}{2(c - d)} \\
 \left. + \frac{\sin(b(c + d) + \beta) - \sin(a(c + d) + \beta)}{2(c + d)} \right] \quad (4.14)$$

## Capítulo 5

# Supresión de la zona de estancamiento en el centro de la cavidad mediante un obstáculo

En la búsqueda de mejorar la transferencia de calor por otros medios diferentes a los empleados en la investigación de Thiers et al. [1] se consideró la posibilidad de redirigir el flujo por zonas en la que la temperatura pudiera ser mejor aprovechada mediante la incorporación de un obstáculo inicialmente en estado adiabático.

El obstáculo funciona de forma pasiva, es decir que experimentalmente no requiere el uso de una fuente externa para funcionar. Por lo tanto, la incorporación de este actuador pasivo podría ser más fácil de implementar a un nivel industrial o experimental. Al mismo tiempo el uso del espacio al interior de la cavidad disminuye el uso de un fluido de trabajo que en algunos casos pudiera ser tóxico (en este trabajo se considera aire). Estos beneficios, más la posibilidad de aumentar la transferencia de calor, vuelven a este método una opción atractiva tanto a nivel de investigación como industrial.

La investigación resultante fue enviado a la revista *International Journal of Thermal Sciences* bajo el nombre de *Heat transfer enhancement by the supression of the stratified stagnant core in a rectangular differentially heated cavity* (P. Huerta, R. Gers, O. Skurtys, F. Moreau, D. Saury) para publicarse (código de manuscrito: THESCI-D-22-02187).

El trabajo fue presentado en las XX Jornadas de Mecánica Computacional llevado a cabo en el campus Miraflores de la Universidad Austral de Chile (ciudad de Valdivia) durante los días 6 y 7 de Octubre del año 2022.

El capítulo se ordena como sigue: Primero se presenta el Problema físico y el Dominio numérico siguiendo el esquema similar al del capítulo anterior y luego se presentan los Resultados y Conclusiones incluidas en el documento enviado para publicarse.

## 5.1. Problema físico

Un obstáculo se sitúa en el centro de la cavidad llena de aire considerando  $Ra = 9 \times 10^7$ . Se consideran diferentes dimensiones del obstáculo para evaluar el mejoramiento de la transferencia de calor global mediante el procedimiento indicado en la sección 4.4. Para hacer una comparación de los resultados se toma de referencia el caso base indicado en la sección 4.1 (ver figura 5.1a). Para evaluar el rendimiento del actuador pasivo primero se utiliza un obstáculo completamente rectangular (ver figura 5.1b) y eventualmente parte de la región sólida es extruída creando una “escalera” en dirección del movimiento dinámico del flujo (ver figura 5.1c).

## 5.2. Dominio numérico

El modelo numérico general se describe en la sección 4.2. Tal como dice en dicha sección en el caso base el dominio computacional consta de  $5 \times 20$  elementos espectrales rectangulares en las direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$  respectivamente. Es necesario utilizar 5 elementos en dirección  $\hat{x}$  ya que solo se incluye un elemento entre la pared vertical y el obstáculo. Así es posible validar la malla del caso base considerando el elemento más grueso utilizado en todas las simulaciones posteriores (lo que es un ancho elemental de 0,05, y en este caso el nodo más cercano a la malla se encuentra a una distancia  $3,32 \times 10^4$ ). En la figura 5.2 se presentan 4 ejemplos del dominio numérico cuando se incluye el actuador pasivo. Para el caso adiabático solo se necesita el dominio del fluido (ver figuras 5.2a-b) mientras que para el caso conductivo es necesario un mallado al interior del bloque sólido para calcular el campo de temperatura (ver figura 5.2c-d). Para el caso más fino ( $W_1 \rightarrow 0$ , figura 5.2d) solo se considera un punto.

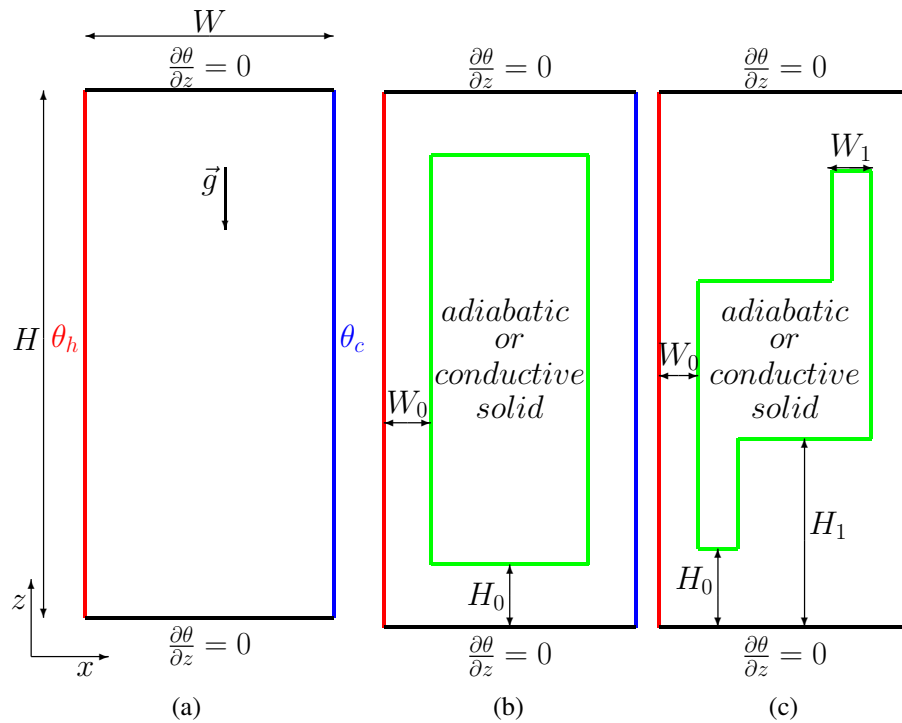


Figura 5.1: Esquema para tres configuraciones estudiadas: a) caso base; b) caso rectangular; c) caso extruido.

### 5.3. Resultados

El objetivo principal de este trabajo es encontrar una forma de mejorar la transferencia de calor global en la cavidad. Una forma de lograr este objetivo es aumentar la velocidad de la capa límite al inicio de las capas límites verticales mediante el uso de un obstáculo sólido. Para ello, se consideran dos configuraciones posibles. Primero, se ubica un obstáculo rectangular en el núcleo de la cavidad para suprimir los flujos secundarios. En una segunda parte, la mejor geometría de la configuración anterior se modifica mediante un proceso de extrusión para generar un nuevo flujo secundario. En cada configuración se detalla la influencia del obstáculo sólido sobre los campos de velocidad y temperatura. Finalmente, en la tercera sección, se consideran los efectos de la conducción de calor en el obstáculo sólido.

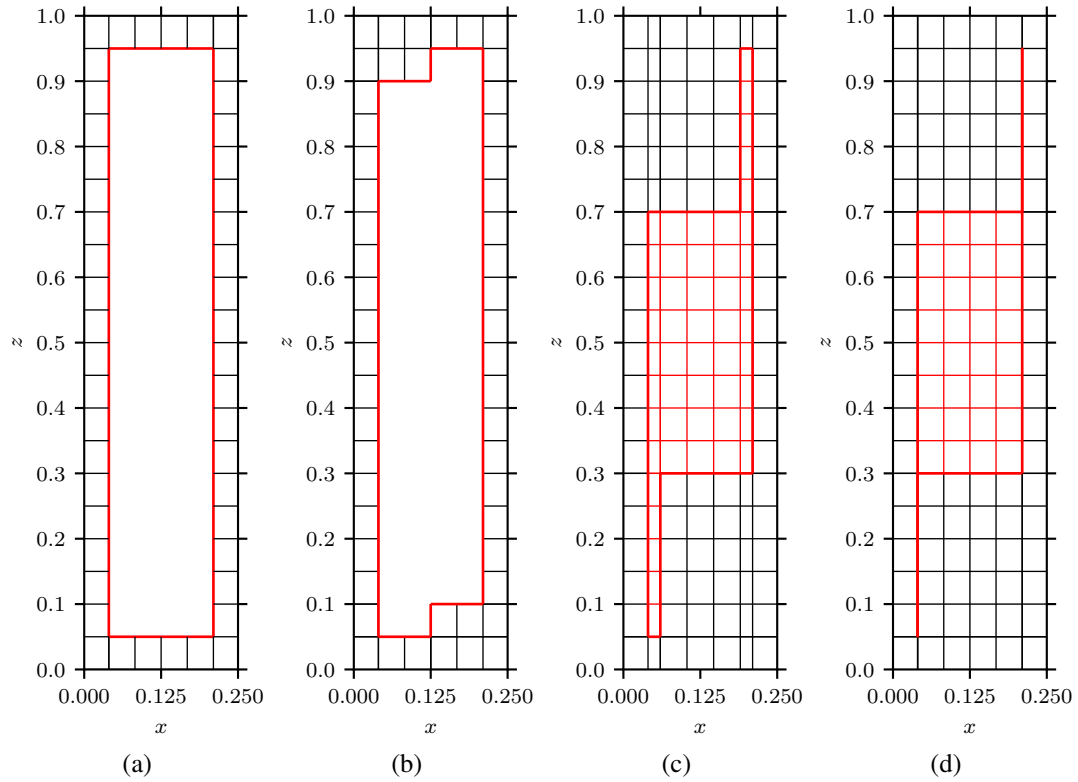


Figura 5.2: Para  $H_0 = 0,05$  y  $W_0 = 0,04$ , cuatro ejemplos de mallado: a) obstáculo adiabático rectangular; b) obstáculo adiabático extruído ( $W_1 = 0,08$ ,  $H_1 = 0,1$ ); c) obstáculo conductivo extruído ( $W_1 = 0,02$ ,  $H_1 = 0,3$ ); d) obstáculo conductivo más delgado considerado ( $W_1 \rightarrow 0$ ,  $H_1 = 0,3$ ).

### 5.3.1. Supresión de los flujos secundarios del caso base al incluir un obstáculo adiabático rectangular (caso (b) en la figura 5.1)

En esta sección, para cuarenta pares de  $(W_0, H_0)$ , presentamos en detalle los efectos del tamaño de un obstáculo rectangular adiabático (ver figura 5.1-b): primero en la dinámica del flujo y en una segunda parte sobre la transferencia de calor.

#### 5.3.1.1. Dinámica del flujo

En la figura 5.3 se muestran visualizaciones LIC del flujo estacionario cuando se incorpora un obstáculo rectangular. La distancia  $W_0$  entre la pared de la isotérmica y la pared vertical del obstáculo se mantiene constante:  $W_0 = 0,04$ . También se presenta el caso base para mostrar cómo el obstáculo modifica dos zonas de recirculación: una en

$z \approx 0,9$  (ver punto A) y otra en  $z \approx 0,8$  (ver punto B). El mismo comportamiento se observa en el fondo de la cavidad debido a la propiedad de centro-simetría del flujo (ver figura 5.3-a). Cuando se introduce un obstáculo rectangular de altura  $H_0 = 0,15$  dentro de la cavidad, la zona de recirculación A y B se hacen más pequeñas (ver figura 5.3-b). Si se inserta un obstáculo más grande ( $H_0 = 0,05$ ), las dos zonas de recirculación desaparecen mientras que se forma una pequeña zona de recirculación (señalada con la letra C) a la derecha de la parte inferior (o a la izquierda de la parte superior) del obstáculo (ver figura 5.3-c). Esto se debe a que la velocidad dentro del canal vertical es mayor que dentro del canal horizontal ( $H_0 > W_0$ ); es decir C corresponde a un salto hidráulico. Finalmente, si aumentamos ligeramente la altura del rectángulo para que  $H_0 = 0,03$ , como  $H_0 < W_0$ , la velocidad dentro del canal horizontal es mayor que dentro del canal vertical. Como consecuencia, se crea una nueva zona de recirculación en la parte inferior del lado vertical izquierdo (o en la parte superior del lado vertical derecho) del obstáculo (ver figura 5.3-d).

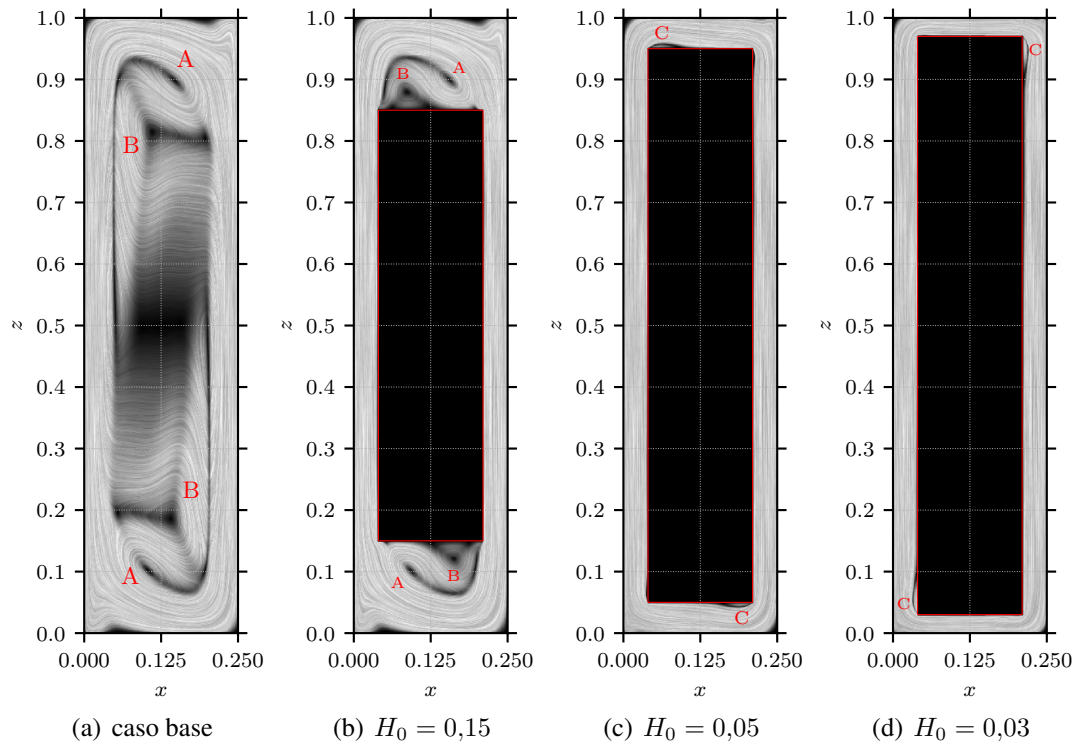


Figura 5.3: Visualización mediante Convolución Integral de Línea (LIC) para tres valores de  $H_0$  cuando  $W_0 = 0,04$ . El caso base también se presenta para comparar.

La figura 5.4 muestra perfiles de velocidad vertical a seis alturas a lo largo de la

pared caliente ( $z = 0,05$ ,  $z = 0,1$ ,  $z = 0,5$ ,  $z = 0,7$ ,  $z = 0,8$  y  $z = 0,9$ ), para los tres casos presentados anteriormente ( $H_0 = 0,15$ ,  $H_0 = 0,05$  y  $H_0 = 0,03$ ). Para  $H_0 = 0,15$ , como se esperaba, los perfiles de velocidad vertical son similares a los del caso base en la parte inferior de la cavidad (ver figura 5.4-a). Sin embargo, en la parte superior de la cavidad ( $z = 0,9$ ), la velocidad máxima es mayor que la del caso base (ver figura 5.4-b). Para valores menores de  $H_0$ ,  $H_0 = 0,05$  o  $H_0 = 0,03$ , al inicio de la capa límite ( $z = 0,05$  y  $z = 0,1$ ) se puede observar que los perfiles de velocidad vertical  $w$  son más altos que los del caso base. Como consecuencia, en esta área se espera que la transferencia de calor sea mayor que en el caso base. Usando el obstáculo rectangular, el flujo es forzado a pasar a través de un canal vertical. Esto implica que el flujo de aire se beneficia de una mayor longitud de intercambio y, en consecuencia,  $G_{Nu}$  debería aumentar. Se puede notar que para  $z = 0,05$  y  $H_0 = 0,03$ , se observa un ligero contra-flujo para  $x \in [0,03; 0,04]$  lo que corresponde al punto  $C$  en la figura 5.3-d. Finalmente, también se puede observar para  $z = 0,5$  y  $0,7$  que los perfiles de velocidad vertical son ligeramente inferiores a los del caso base; esto puede explicarse porque el flujo base se concentra naturalmente en la sección media de la cavidad debido a la recirculación secundaria (ver punto B, figura 5.3-a) o porque los tres casos estudiados deben superar la resistencia friccional de las paredes del canal.

En la figura 5.5, para  $H_0 \in [0,03, 0,25]$  y  $W_0 \in [0,03, 0,05]$  (es decir,  $W_0 \in [\delta_\theta(z = 0,5), \delta_w(z = 0,5)]$  para el caso de flujo base), se presenta el esfuerzo cortante medio relativo en la pared isotérmica  $\Gamma_T$  y en la pared adiabática  $\Gamma_Q$ . Se definen como:

$$\Gamma_T = \left( \frac{\tau}{\tau_{bf}} \right)_{x=\{0;W/H\}}, \quad \Gamma_Q = \left( \frac{\tau}{\tau_{bf}} \right)_{z=\{0;1\}} \quad (5.1)$$

donde  $(\tau)_{x=\{0;W/H\}}$  y  $(\tau)_{z=\{0;1\}}$  son, considerando un obstáculo rectangular en el centro, el esfuerzo cortante medio en las paredes de la cavidad isotérmica y adiabática respectivamente. Para el caso base, las mismas magnitudes se definen como  $(\tau_{bf})_{x=\{0;W/H\}}$  y  $(\tau_{bf})_{z=\{0;1\}}$ . Los valores de  $H_0$  para el espesor de las capas límites térmica y dinámica para el caso de flujo base,  $\delta_\theta(z = 0,5)$  y  $\delta_w(z = 0,5)$ , también son superpuestos. Claramente,  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_Q$  parecen ser más dependientes de  $H_0$  que de  $W_0$  ya que todas las curvas están casi superpuestas entre si (ver figuras 5.5-a y 5.5-b). Además, se puede observar en la figura 5.5-a que  $(\tau)_{x=\{0;W/H\}}$  es cercano a  $(\tau_{bf})_{x=\{0;W/H\}}$  ya que  $\Gamma_T \approx 1$ . Es decir, el obstáculo rectangular no modifica significativamente el esfuerzo cortante medio en

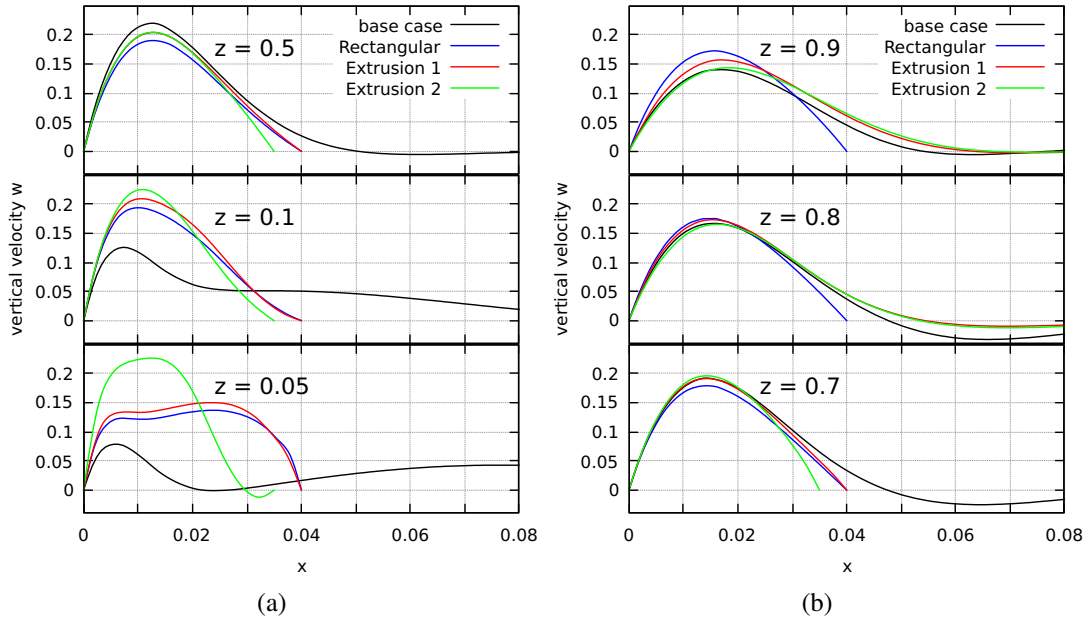


Figura 5.4: Perfiles de velocidad vertical  $w$  a lo largo de la pared caliente para seis alturas diferentes: a) sección aguas arriba; b) sección aguas abajo. Comparación entre el caso base y tres valores de  $H_0$ .

las paredes isotérmicas. Por el contrario, la influencia del obstáculo es más importante en las paredes adiabáticas ya que  $\Gamma_Q \in [0,6; 1,9]$  (ver figura 5.5-b). Se puede ver que si la apertura vertical  $H_0 < \delta_w(z = 0,5)$  ocurre un aumento significativo de  $(\tau)_{z=\{0;1\}}$  (ver figura 5.5-b) mientras que  $(\tau)_{x=\{0;W/H\}}$  disminuye.

### 5.3.1.2. Transferencia de calor

Ahora se estudia en detalle el efecto del tamaño del obstáculo rectangular adiabático en la transferencia de calor. En la figura 5.6 se muestra la evolución de la ganancia relativa de transferencia de calor  $G_{Nu}$  para varios valores de los espacios verticales y horizontales,  $H_0$  y  $W_0$ , respectivamente. Para  $H_0 \geq 0,15$ , cualquiera que sea el valor de  $W_0$ , se obtiene un valor pequeño de la ganancia de la transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle$ , siendo menos de 1%. A medida que  $H_0$  disminuye a  $\delta_w(z = 0,5)$ , la transferencia de calor es superior a 1%;  $\langle G_{Nu} \rangle$  aumenta continuamente y alcanza un máximo local para todos los  $W_0$ . Si la separación entre la pared adiabática y el obstáculo se estrecha,  $H_0 < \delta_w(z = 0,5)$ ,  $\langle G_{Nu} \rangle$  disminuye continuamente probablemente debido a la fricción. También se puede notar que si  $W_0 = \delta_\theta(z = 0,5) = 0,03$ , la ganancia relativa siempre

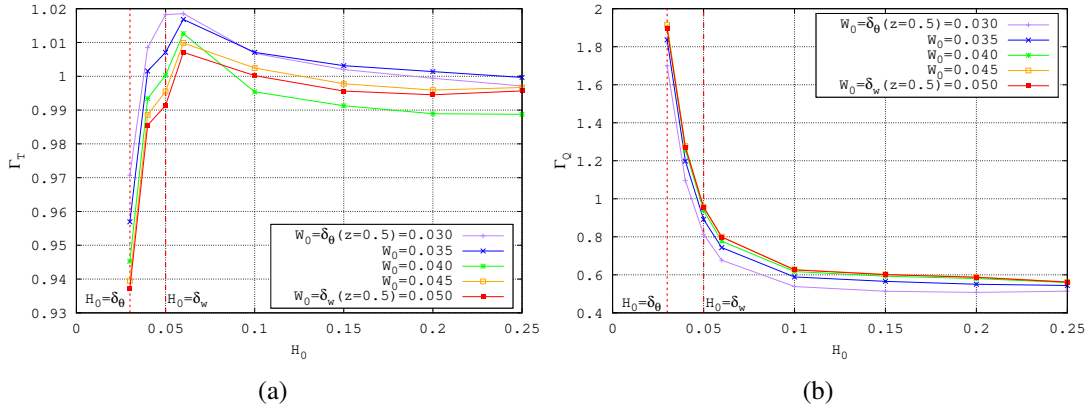


Figura 5.5: Para varios valores de  $H_0$  y  $W_0$ , el esfuerzo cortante: a) en la pared isotérmica  $\Gamma_T = \left( \frac{\tau}{\tau_{bf}} \right)_{x=0,0,25}$ ; b) en la pared adiabática  $\Gamma_Q = \left( \frac{\tau}{\tau_{bf}} \right)_{z=0,1}$ . Los valores de  $H_0$  para el espesor de las capas límites térmica y dinámica,  $\delta_\theta(z = 0,5)$  y  $\delta_w(z = 0,5)$ , se superponen.

es negativa, es decir que la transferencia de calor es menos eficiente que el caso base cualquiera que sea el valor de  $H_0$ , de nuevo probablemente debido al aumento de la pérdida de presión. Finalmente, se puede notar que la transferencia de calor es máxima,  $\langle G_{Nu} \rangle = 2,6\%$ , para  $H_0 = 0,05$  y  $W_0 = 0,04$ . A este caso se le llama desde este punto en adelante el mejor caso rectangular.

En la figura 5.7, para un  $W_0 = 0,04$  fijo y tres valores de  $H_0$ , se muestran los perfiles del número de Nusselt  $Nu(W_0 = 0,04, H_0)$  a lo largo de la pared caliente. El caso base también se presenta para la comparación. Se puede observar que cuando se introduce un pequeño obstáculo rectangular ( $H_0 = 0,25$ ) en el núcleo de la cavidad, el comportamiento de transferencia de calor se modifica sólo ligeramente, cualquiera que sea la elevación  $z$  considerada. En este caso, el perfil del número de Nusselt es cercano al del caso base y el máximo global del número de Nusselt está cerca del fondo de la cavidad ( $z = 0,01$ ). Si la distancia  $H_0$  se reduce 2,5 veces ( $H_0 = 0,10$ ), las modificaciones son más notorias. De hecho, un máximo global siempre está presente cerca de la pared adiabática de la cavidad pero un máximo local aparece a la altura  $z = 0,1$  que corresponde al fondo del obstáculo rectangular. Para  $z \geq 0,05$  y  $z \leq 0,25$ ,  $Nu_{base} < Nu(H_0 = 0,1, W_0 = 0,04)$ . Para  $z \geq 0,25$ ,  $Nu(H_0 = 0,1, W_0 = 0,04)$  es ligeramente más bajo que el caso base. Finalmente, si el espacio entre el obstáculo y la pared adiabática de la cavidad es 2 veces menor (es decir,  $H_0 = 0,05$ ), la transferencia

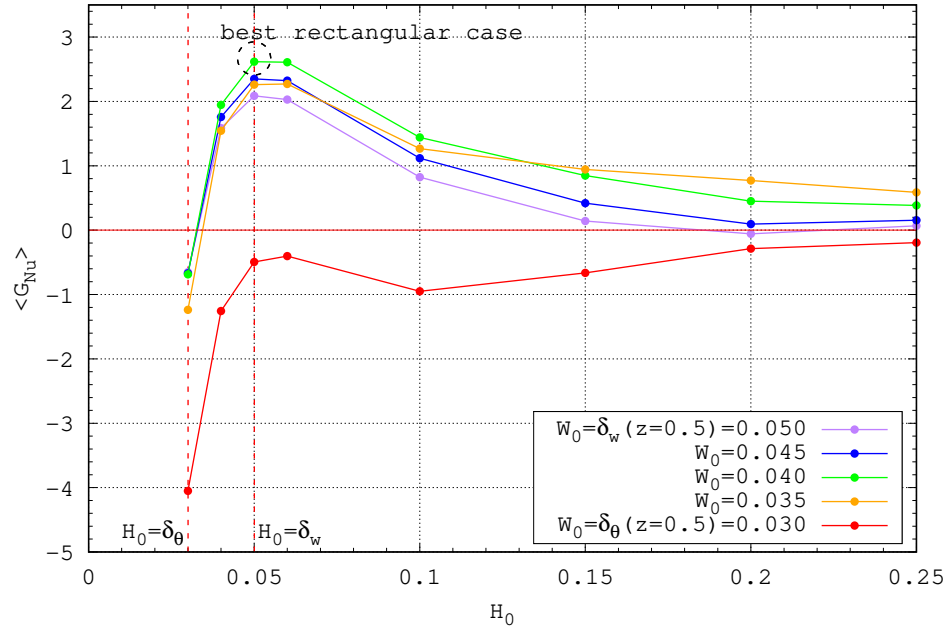


Figura 5.6: Para varios valores de  $H_0$  y  $W_0$ , la ganancia relativa de transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle$ . Se superponen valores de  $H_0$  para el espesor de las capas límite térmica y dinámica,  $\delta_\theta(z = 0,5)$  y  $\delta_w(z = 0,5)$ .

de calor aumenta bastante para  $0,025 < z < 0,25$ , en comparación con el caso base. En particular, se observa un máximo global más alto de Nu en comparación con los otros casos en la altura  $z = H_0 = 0,05$ .

Para evaluar más a fondo la eficiencia de la transferencia de calor a lo largo de la pared isotérmica, en la tabla 5.1 se presenta una comparación local de los números de Nusselt para las diferentes separaciones  $H_0$ . La pared isotérmica se divide en dos partes: sección aguas abajo  $z \leq 0,25$  y sección aguas arriba  $z > 0,25$ . Parece claro que la mejora global de la transferencia de calor se debe a su aumento en la sección aguas arriba (ver  $\langle G_{Nu} \rangle(z \leq 0,25)$  en tabla 5.1). Por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo se ha logrado.

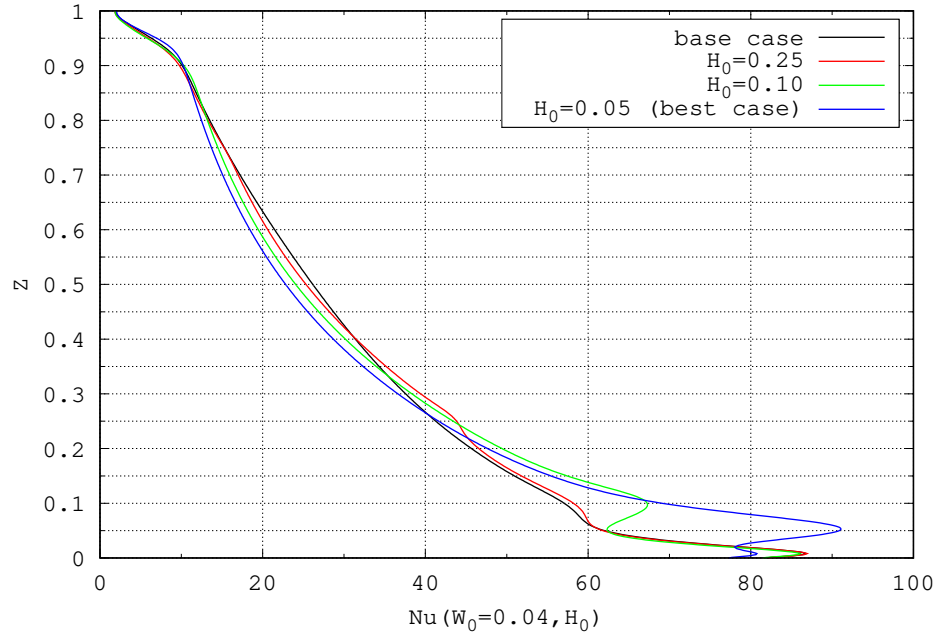


Figura 5.7: Perfiles del número de Nusselt a lo largo de la pared caliente para varios valores de  $H_0$  cuando  $W_0 = 0,04$ . El caso base también se presenta para la comparación.

Tabla 5.1: Para varios  $H_0$ , la ganancia relativa de transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle(z)$  en las secciones aguas abajo ( $z \leq 0,25$ ) y aguas arriba ( $z > 0,25$ ) cuando  $W_0$  se fija a 0,04.

$H_0$	$\langle G_{Nu} \rangle(z \leq 0,25)$	$\langle G_{Nu} \rangle(z > 0,25)$	$\langle G_{Nu} \rangle(0 \leq z \leq 1)$
0.25	+0.61 %	-0.22 %	0.39 %
0.20	+1.09 %	-0.64 %	0.45 %
0.15	+2.05 %	-1.20 %	0.85 %
0.10	+3.53 %	-2.08 %	1.44 %
0.05	+6.92 %	-4.30 %	2.62 %
0.03	+9.09 %	-9.77 %	-0.68 %

### 5.3.2. Generación de nuevos flujos secundarios inducidos por extrusión del obstáculo (caso (c) en la figura 5.1)

En esta sección se modifica la mejor geometría del caso rectangular mediante un proceso de extrusión posterior. El objetivo principal es generar nuevas recirculaciones secundarias aguas abajo de las capas límites frías y calientes como las observadas en el trabajo anterior de [1] quien usó una perturbación térmica local para obtenerlas. Para obtener la extrusión óptima, se consideran dos pasos. En primer lugar, se fijan

los espacios  $H_0$  y  $W_0$  mientras que se varían las distancias  $H_1$  (distancia entre la pared adiabática de la cavidad y la superficie del obstáculo horizontal) y  $W_1$  (ancho del obstáculo horizontal después de la extrusión) (ver figura 5.1-c). En un segundo paso, partiendo de la mejor geometría que permitió obtener la mayor transferencia de calor en el primer paso (llamado Extrusión 1), se fijan las distancias obtenidas anteriormente  $H_1$  y  $W_1$  mientras que  $H_0$  y  $W_0$  vuelven a ser variados. Al final del paso dos, el caso más favorable a la transferencia de calor se denomina: Extrusión 2. En lo que sigue se presentan sucesivamente los campos de velocidad y temperatura.

### 5.3.2.1. Dinámica del flujo

En la figura 5.8, se muestran visualizaciones del flujo estacionario usando el método LIC para dos obstáculos extruidos y el mejor caso rectangular obtenido previamente. Para comparar con el mejor caso excitado obtenido por perturbaciones térmicas variables en el tiempo localizadas en paredes calientes y frías, se agrega la figura 5.8-a que presenta los resultados de Thiers et al. [1] (ver Fig. 8-e). De hecho, para el mismo número de Rayleigh, los autores demostraron que una forma eficiente de mejorar la transferencia de calor es perturbar la pared caliente en  $z = 0,7$  y la pared fría en  $z = 0,3$  usando ondas cuadradas locales sincronizadas de amplitud  $\varepsilon = 1$  y frecuencia  $f = 0,403$ . En esta posición de perturbación térmica, la ganancia relativa de transferencia de calor global por ambas perturbaciones es  $\langle G_{Nu} \rangle = 5,5\%$  [1]. En la figura 5.8-a se puede observar que se forma una gran y única zona de recirculación. Además, la capa límite horizontal a lo largo de la pared adiabática es más gruesa que la del flujo base (ver figura 5.3-a). Para aprovechar la modificación de la capa límite aguas abajo y la zona de recirculación, el mejor caso rectangular se extruye gradualmente (ver figura 5.8-b). La figura 5.8-c muestra que cuando se realiza una pequeña extrusión se forma una pequeña recirculación (ver punto A). Por el contrario en la figura 5.8-d, el flujo horizontal se divide en dos partes cuando impacta contra la punta del obstáculo vertical ( $z = 0,95$  o  $z = 0,05$ ): la parte superior del flujo va a la pared isotérmica mientras que la parte inferior sigue la zona de recirculación y regresa a la pared isotérmica (ver la línea de corriente roja en la figura 5.8-d). Como consecuencia, una zona estancada cerca del obstáculo (ver la zona entre la recirculación A y el obstáculo). Así, en la figura 5.8-d, el comportamiento del flujo es más cercano al flujo cuando dos perturbaciones térmicas se introducen simultáneamente en las paredes activas (ver figura 5.8-a). Por lo tanto, se puede esperar una mayor transferencia de calor en comparación con nuestro

mejor caso rectangular.

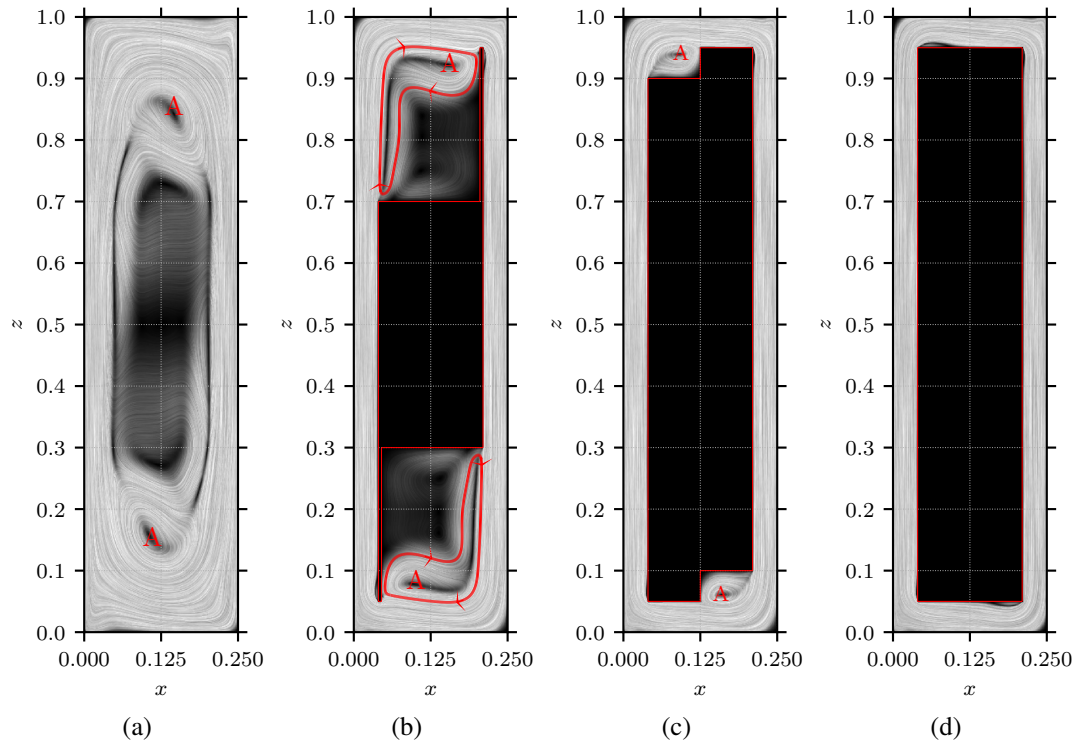


Figura 5.8: Visualización de convolución integral de línea (LIC): a) para una perturbación térmica local (consulte el trabajo anterior [1]) y tres obstáculos donde  $H_0 = 0,05$ ,  $W_0 = 0,04$ ; b) obstáculo 1:  $H_1 = 0,3$ ,  $W_1 = 0,005$ ; c) obstáculo 2:  $H_1 = 0,1$ ,  $W_1 = 0,085$ ; d) El mejor caso rectangular.

En la figura 5.9, los flujos se detallan de una forma más cuantitativa. Se deja de tomar en cuenta el mejor caso excitado. Los perfiles de velocidad vertical a lo largo de la pared caliente para el caso base, el mejor caso rectangular, el caso llamado Extrusión 1 y el caso llamado Extrusión 2 se comparan para seis alturas diferentes  $z \in \{0,05; 0,1; 0,5; 0,7; 0,8; 0,9\}$ . Para cada caso, las distancias  $H_0$ ,  $W_0$ ,  $H_1$  y  $W_1$  se informan en la tabla 5.2. En la sección de aguas arriba ( $z = 0,05$  y  $z = 0,1$ ) y la sección de aguas abajo ( $z = 0,9$ ), es claro que cada obstáculo aumenta el gradiente de velocidad y la velocidad máxima en comparación con el caso base (ver figura 5.9-a). El fluido es forzado a fluir en la sección aguas arriba donde el número de Nusselt tiende a ser más bajo (ver figura 5.7). Sin embargo, en  $z = 0,5$ , el caso base tiene una velocidad máxima más alta. Puede explicarse por el hecho de que en los otros casos la fricción de la pared ha disminuido la energía disponible (ver figura 5.9-a). En la sección aguas

abajo ( $z = 0,7, z = 0,8$  y  $z = 0,9$ ) se puede observar que los perfiles de velocidad son mayores para los casos de obstáculos que para el caso base en el borde de la capa límite ( $x > 0,04$ ). Para el caso de la Extrusión 2, al reducir  $W_0$ , la velocidad máxima vertical aumenta en la sección aguas arriba (ver línea verde en la figura 5.9a-), y más del doble en la altura  $z = 0,05$ .

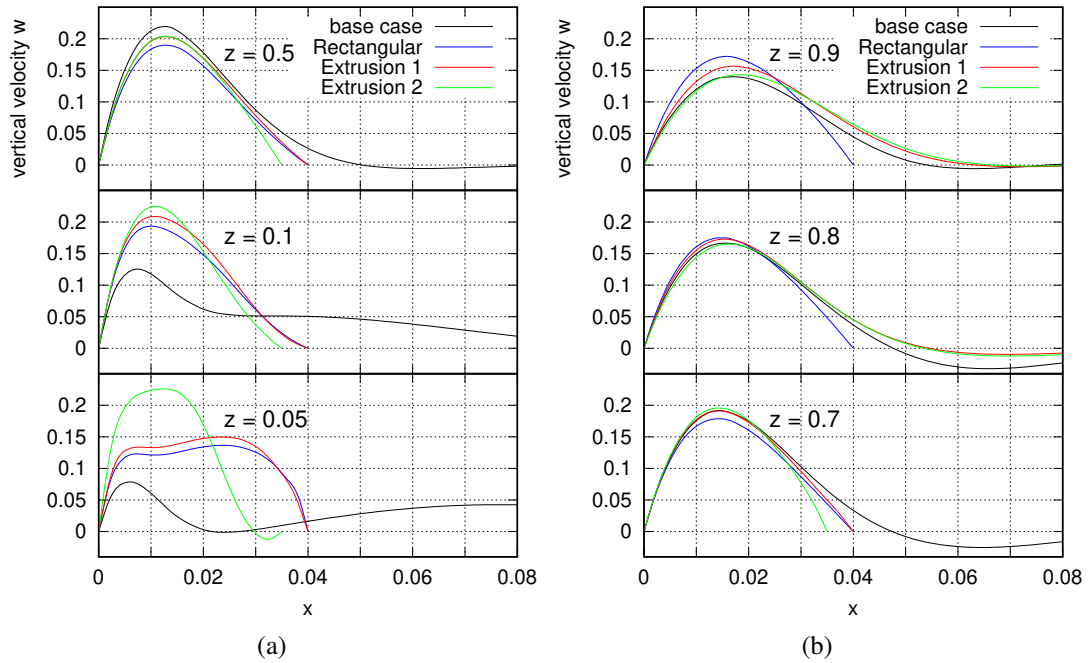


Figura 5.9: Perfiles de velocidad vertical a lo largo de la pared caliente para seis alturas diferentes: a) tramo aguas arriba; b) tramo aguas abajo. Comparación entre el caso base, el mejor caso rectangular ( $H_0 = 0,05, W_0 = 0,04$ ), el obstáculo extruido 1 ( $H_1 = 0,3, W_1 = 0,005$ ) y el obstáculo extruido 2 ( $H_0 = 0,035, W_0 = 0,035$ ).

Tabla 5.2: Para los tres obstáculos, la ganancia relativa de transferencia de calor  $G_{Nu}(z)$  en las partes aguas abajo ( $z \leq 0,25$ ) y aguas arriba ( $z > 0,25$ ).

caso	$H_0$	$H_1$	$W_0$	$W_1$	$\langle G_{Nu} \rangle(z \leq 0,25)$	$\langle G_{Nu} \rangle(z > 0,25)$	$\langle G_{Nu} \rangle(0 \leq z \leq 1)$
Rectangular	0.05	-	0.04	-	+6.92 %	-4.30 %	+2.62 %
Extrusión 1	0.05*	0.3	0.04*	0.005	+7.04 %	-3.37 %	+3.67 %
Extrusión 2	0.035	0.3*	0.035	0.005*	+18.00 %	-13.61 %	+4.39 %

### 5.3.2.2. Transferencia de calor

La ganancia relativa de la transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle$  se representa para varios valores de  $H_1$  y  $W_1$  en la figura 5.10-a. Las distancias  $H_0$  y  $W_0$  se mantienen constantes:

$H_0 = 0,05$  y  $W_0 = 0,04$ . Claramente, todas las geometrías simuladas generan una mejor transferencia de calor que el obstáculo rectangular que es más alto que el caso base. También se puede observar que existe un máximo local de  $\langle G_{Nu} \rangle$  para cada valor de  $W_1$ . Este máximo local aumenta a medida que  $W_1$  disminuye hasta alcanzar un valor máximo global de  $W_1 \rightarrow 0$  y  $H_1 = 0,25$ . En este estudio, el grosor más pequeño considerado es  $W_1 = 0,005$ , que es el 2 % del ancho total del obstáculo. Así, el mejor caso extruido, llamado Extrusión 1, corresponde a una ganancia relativa  $\langle G_{Nu} \rangle = 3,67 \%$ .

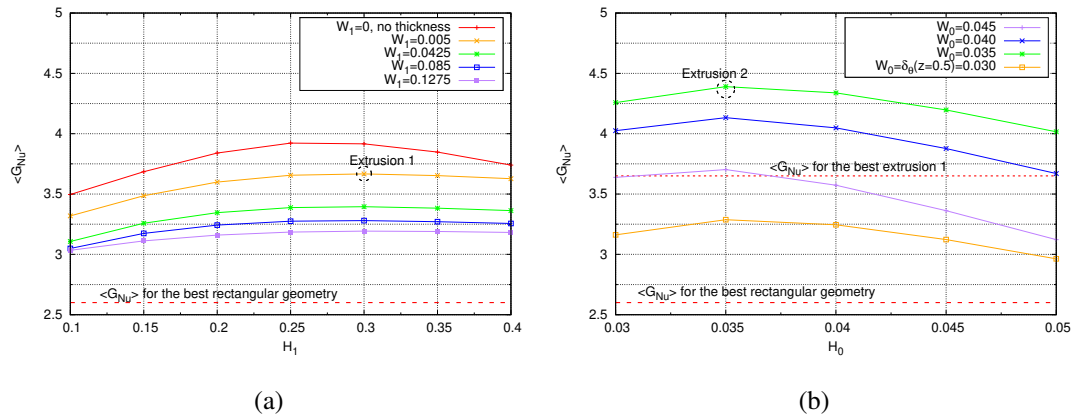


Figura 5.10: Para dos geometrías, la ganancia relativa de transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle$ : a) para varios valores de  $H_1$  y  $W_1$  cuando  $H_0 = 0,05$  y  $W_0 = 0,04$ ; b) para varios valores de  $H_0$  y  $W_0$  cuando  $H_1 = 0,3$ ,  $W_1 = 0,005$ . El valor  $\langle G_{Nu} \rangle$  de la mejor geometría rectangular y la mejor extrusión 1 también se presentan para comparar (líneas discontinuas rojas).

En la Figura 5.11, se presenta la evolución vertical de la ganancia relativa de transferencia de calor,  $G_{Nu}(z)$ , a lo largo de la pared caliente para el caso rectangular, Extrusión 1 y Extrusión 2. Claramente, para el área aguas arriba  $z \in [0; 0,25]$ , los tres obstáculos aumentan la transferencia de calor global: 6,92 % para el caso rectangular, 7,04 % para la Extrusión 1 y 18 % para Extrusión 2 (ver tabla 5.2). Además, se puede observar que cerca de  $z = 0,05$  la ganancia local alcanza hasta 80 % para la extrusión 2. Sin embargo, la transferencia de calor local se reduce,  $G_{Nu}(z) < 0$  para ambas extrusiones cuando  $z \in [0,25; 1]$  y para  $z \in [0,25; 0,9]$  en el caso rectangular. Esto se debe al hecho de que hay más aire frío en contacto con la placa caliente, lo que lleva a un aumento de la transferencia de calor en la sección aguas arriba ( $z \in [0; 0,25]$ ); pero como consecuencia, el ascenso de más aire caliente a lo largo de la placa caliente provoca una disminución de la transferencia de calor en la sección aguas abajo  $z \in [0,25; 0,9]$ . Para

el caso rectangular, cuando  $z \in [0,9; 1]$ , la ganancia vuelve a ser positiva, alcanzando un 10 %. Finalmente, a la altura  $z = 0,7$ , se puede observar que el ensanchamiento repentino disminuye la ganancia para el caso Extrusión 2 contrario al caso rectangular (ver el cambio de pendiente de la curva roja).

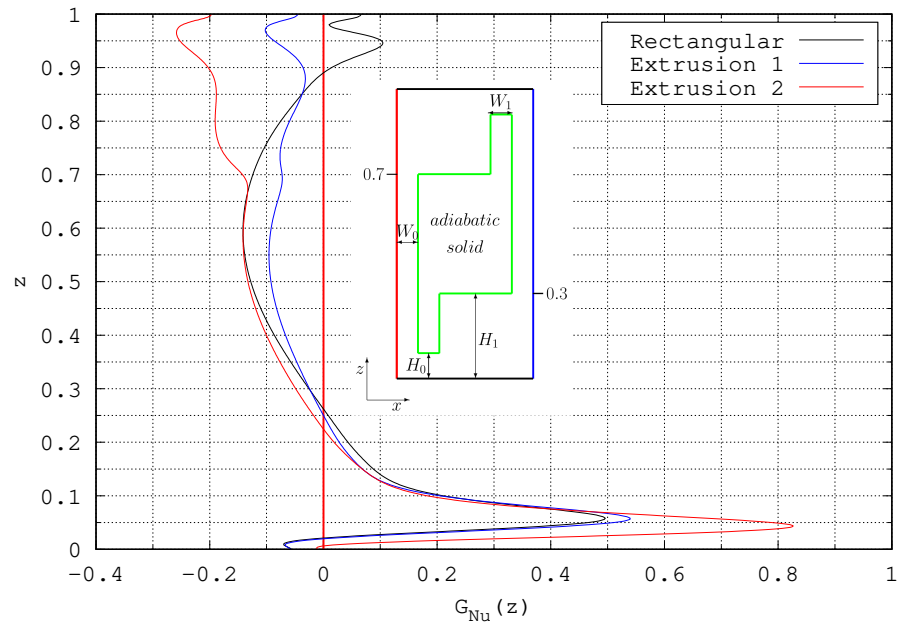


Figura 5.11: Evolución vertical de la ganancia relativa de transferencia de calor,  $G_{Nu}(z)$ , a lo largo de la pared caliente para tres obstáculos: caja rectangular, extrusión 1 y extrusión 2.

### 5.3.3. Efectos de la conductividad térmica

Como se puede notar experimentalmente, los sólidos no son exactamente cuerpos adiabáticos, los efectos de la conductividad térmica de fluidos y sólidos en la transferencia de calor se estudian considerando  $k_r = 10^{-3}$ , 1,0 y  $10^2$  (donde  $k_r$  es la relación entre la conductividad térmica del sólido  $k_s$  y la conductividad térmica del fluido  $k_f$ :  $k_r = k_s/k_f$ ). En la tabla 5.3, se reporta la ganancia relativa de transferencia de calor  $\langle G_{Nu} \rangle$  para los tres obstáculos sólidos. Para  $k_s = 10^{-3}$ , es decir para un sólido débilmente conductor, todos los valores de  $\langle G_{Nu} \rangle$  son iguales o muy próximos a los del caso adiabático. Sin embargo, para  $k_r = 1$  y  $k_r = 10^2$ , está claro que la condición conductiva reduce significativamente la ganancia de transferencia de calor. Para  $k_s = 1$ , que representa una conducción térmica cercana a la del poliestireno, la ganancia disminuye alrededor de 1 % para todas las geometrías sólidas.

Tabla 5.3: Efectos de la geometría y conductividad térmica del obstáculo sólido  $k_s$  sobre la ganancia relativa de transferencia de calor.

$k_s$	$k_r$	$\langle G_{Nu} \rangle_{\text{rectangular}}$	$\langle G_{Nu} \rangle_{\text{extrusion 1}}$	$\langle G_{Nu} \rangle_{\text{extrusion 2}}$
adiabatico	0	2.62 %	3.67 %	4.39 %
conductividad débil	$10^{-3}$	2.62 %	3.67 %	4.38 %
orden del aire	1	2.45 %	3.54 %	3.69 %
conductividad fuerte	$10^2$	-2.51 %	1.15 %	0.58 %

## 5.4. Conclusión

Este trabajo reporta las simulaciones DNS en 2D de un flujo de aire en una cavidad calentada diferencialmente con un ratio de aspecto 4, considerando un número de Rayleigh de  $9 \times 10^7$ . Con el fin de mejorar la transferencia de calor al inicio de las capas límites en las paredes de las isotérmicas, se ensayan tres tipos de obstáculos buscando el tamaño óptimo: rectangulares y dos formas rectangulares recortadas. Usando un obstáculo, en el medio de la cavidad, que comprime la capa límite dinámica en la pared de la isoterma, es posible mejorar la transferencia de calor globalmente hasta 4,39 % en comparación con la transferencia de calor en una cavidad sin obstáculo, gracias a la extrusión sobre el obstáculo rectangular. Esto se debe al aumento de la velocidad aguas abajo de las capas límites en las paredes de las isotermas. Localmente, la ganancia pudo ser superior a los 80 %. Así, la principal conclusión de este trabajo es que la presencia de un obstáculo adiabático aumenta la transferencia de calor en la cavidad de forma pasiva. Finalmente comprobamos que un obstáculo conductor no mejora la transferencia de calor como lo hace uno adiabático. Por el contrario, a medida que aumenta la conductividad térmica del obstáculo, disminuye la transferencia de calor global.

El siguiente paso de este trabajo es una generalización a una cavidad 3D para resaltar las interacciones entre las estructuras de flujo 3D, el obstáculo y la transferencia de calor.

# Capítulo 6

## Uso de un par de actuadores térmicos locales considerando distribuciones no-simétricas

En la investigación de *Thiers et al.* [1] se trabajó con un par de actuadores térmicos locales posicionados de forma centro-simétrica. Además en ambos actuadores se utilizaba la misma frecuencia y fase. De esta forma se buscaba reducir el número de simulaciones y se logró simplificar la metodología. Sin embargo, la investigación no alcanzó a responder qué es lo que sucede cuando los actuadores utilizan condiciones diferentes.

¿Existe una interacción entre diferentes posiciones, fases y/o frecuencias? ¿Se podría mejorar la transferencia de calor de esta forma? En este capítulo se busca responder a estas preguntas. Primero se presenta el problema físico en la sección 6.1 y luego el dominio numérico en 6.2. En la sección 6.3 se analiza la influencia de utilizar distintas posiciones, pero manteniendo una misma frecuencia y fase, y en la sección 6.4 se analiza la influencia al usar diferentes posiciones, frecuencias y fase. Finalmente en la sección 6.5 se hace una conclusión temprana de este capítulo.

### 6.1. Problema físico

Para una configuración  $Ra = 9 \times 10^7$  se superponen perturbaciones térmicas dentro del dominio de las superficies de las paredes activas en  $\Omega_h$  para la pared caliente y

$\Omega_c$  para la pared fría (ver figura 6.1a). Las condiciones de frontera térmicas en estos subdominios se caracterizan mediante

$$\begin{aligned} \theta(x=0, z, t) &= \theta_h + \theta'_h(t, f_h, \phi_h) && \text{para } z \in \Omega_h \\ \theta(x=0,25, z, t) &= \theta_c + \theta'_c(t, f_c, \phi_c) && \text{para } z \in \Omega_c, \end{aligned} \quad (6.1)$$

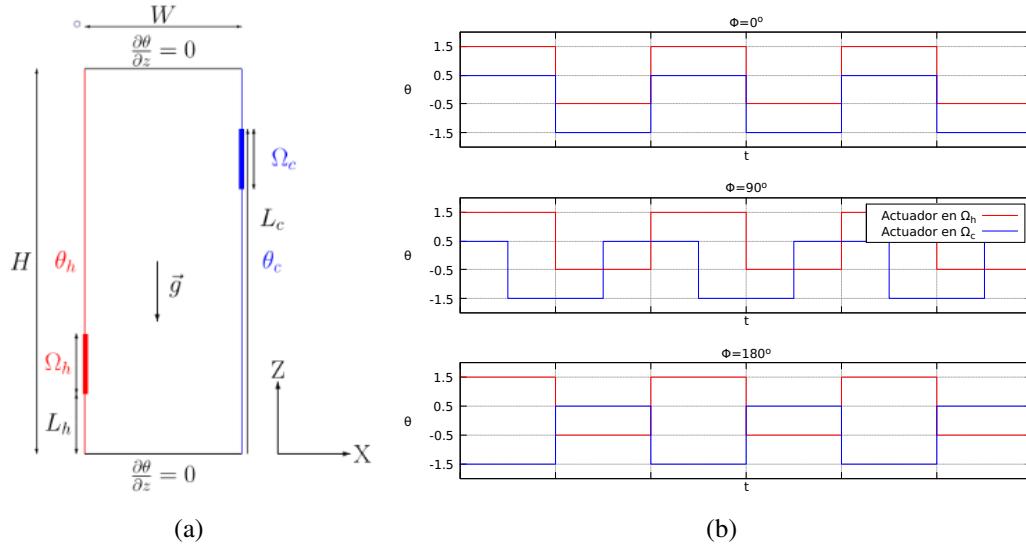


Figura 6.1: Esquema de la cavidad calentada diferencialmente con áreas de perturbación térmica: (A) Sistema de coordenadas, condiciones de contorno y áreas de perturbación en la pared calentada  $\Omega_h$  y en la pared enfriada  $\Omega_c$ ; (B) Evolución temporal de la perturbación de temperatura en  $\Omega_h$  y  $\Omega_c$  donde  $\phi_c$  es el cambio de fase en  $\Omega_c$  con respecto al actuador opuesto.

donde  $\theta'_h$  y  $\theta'_c$  son las perturbaciones térmicas superpuestas en los subdominios  $\Omega_h$  y  $\Omega_c$ . Las perturbaciones tienen forma de ondas cuadradas  $\theta'(t, f, \phi) = \varepsilon \times \text{sgn}[\sin(2\pi f t + \phi)]$  y consideran una amplitud  $\varepsilon = 1$  como se informa en [1]. La perturbación térmica en la pared caliente  $\theta'_h$  se intercala entre los valores  $\theta = -0,5$  y  $\theta = 1,5$ , mientras que la perturbación térmica en la pared fría  $\theta'_c$  cambia entre  $\theta = -1,5$  y  $\theta = 0,5$ . Para una misma frecuencia se puede ver en la figura 6.1b diferentes combinaciones entre  $\theta'_h$  y  $\theta'_c$  cuando se varía el desfase. Por otra parte la posición de los subdominios  $\Omega_h$  y  $\Omega_c$  se describe mediante las alturas  $L_h$  y  $L_c$  (ver figura 6.1a), i.e

$$\begin{aligned}\Omega_h(L_h) &= \{x = 0; L_h \leq z \leq L_h + 0,05\} \\ \Omega_c(L_c) &= \{x = 0,125; L_c - 0,05 \leq z \leq L_c\}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

## 6.2. Dominio Numérico

El modelo numérico se describe en la sección 4.2. En este caso la malla no está limitado por sólidos al interior de la cavidad por lo tanto se trabaja con un mallado numérico más refinado para considerar posible escalas pequeñas generadas por los actuadores térmicos. El dominio computacional esta hecho de  $7 \times 20$  elementos espectrales. Verticalmente los elementos están posicionados de tal forma que los subdominos  $\Omega_h$  y  $\Omega_c$  se localizan en el borde de un solo elemento. Horizontalmente los elementos se distribuyen usando una función tangente hiperbólica para que los elementos sean más finos cerca de las paredes activas, tal que

$$(N_x)_j = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{\tanh \left[ \frac{\gamma_x}{2} \left( \frac{2(j-1)}{N_x} - 1 \right) \right]}{\tanh(\gamma_x/2)} \right)\tag{6.3}$$

donde  $\gamma_x$  es el parámetro de concentración fijado a 2,5. Este mallado es una versión refinada de la malla utilizada en [1] con tal de asegurar la validación de la malla en el caso de los actuadores térmicos locales.

En este capítulo se busca analizar el efecto al incorporar actuadores térmicos de forma no-simétrica con tal de observar si existe una influencia térmica o dinámica entre ambos. Primero se observa la influencia al considerar diferentes posiciones manteniendo las demás configuraciones de forma idéntica, y luego se evalúan las diferentes posiciones considerando diferentes frecuencias y desfases.

## 6.3. Influencia de distribución no-simétrica

Como punto base de referencia se considera al mejor caso observable en [1] es decir  $\Omega_h$  y  $\Omega_c$  se posicionan en  $L_h = 0,7$  y  $L_c = 0,3$  respectivamente utilizando una misma frecuencia ( $f_h = f_c = 0,403$ , llamada también frecuencia natural  $f^* = 0,403$ ) y fase ( $\varphi_h = \varphi_c = 0$ ). Para ello se analiza el comportamiento dinámico y térmico de los

resultados.

En un primer análisis se fija el actuador de la pared caliente ( $\Omega_h$ ) en  $L_h = 0,7$ , mientras que el actuador de la pared fría ( $\Omega_c$ ) varía de posición entre  $z = 0,9$  y  $z = 0,1$ . En la figura 6.2 se muestran visualizaciones LIC cuando  $L_c = 0,7 ; 0,5 ; 0,3$ , donde  $L_c = 0,3$  corresponde al caso con distribución simétrica y en la figura 6.2a se presenta el LIC del caso base. Se observa de las figuras 6.2b y c que el número de recirculaciones aumenta en la sección aguas abajo del actuador térmico, mientras que en la sección aguas arriba no se observan diferencias significativas, de hecho en los cuatro casos considerados la sección superior permanece no-perturbada. Es decir que la influencia dinámica de los actuadores ocurre en su mayoría aguas abajo del excitador. Pareciera ser que los actuadores térmicos provocan una zona de recirculación propia dentro de una distancia aproximada de 0.25 en dirección del flujo a partir de la posición  $L_c$  (ver punto A en las figuras 6.2b y c). En la figura 6.2a se puede ver que en la sección inferior las zonas de recirculación propias del caso base no desaparecen, y no es hasta que  $L_c = 0,3$  (ver figura 6.2d) que se superpone la recirculación A provocado por el actuador térmico.

Según la posición de los actuadores cada configuración tiene un caso simétrico donde se intercambian las distancias  $L_h$  y  $L_c$  tal que  $L'_h = L_c$  y  $L'_c = L_h$ . En la figura 6.3 se comparan los perfiles de velocidad vertical de dos casos simétricos entre si con tal de observar si existe equivalencia dinámica con respecto a la velocidad promedio. Para comprobar directamente la simetría del perfil uno de los casos utiliza coordenadas  $(x, z)$  y el contrario utiliza  $(0,25 - x, 1 - z)$ . En ambos casos se obtiene que existe una gran correlación independientemente de las distintas alturas consideradas. Para tener una mejor confirmación se evalúa el resultado de  $G_{Nu}$  de los casos pareados.

En la figura 6.3 se compara el  $G_{Nu}$  de los casos inversos, observándose que los resultados son prácticamente idénticos. Por lo tanto en las secciones siguientes se puede mantener fijo uno de los actuadores activos, mientras se hace la posición del otro y el resultado será igualmente válido para el caso inverso.

## 6.4. Influencia posición, frecuencia y fase

Con la intención de buscar nuevas formas de buscar una resonancia entre actuadores locales, se realizan varias simulaciones para diferentes posiciones, frecuencias y fases

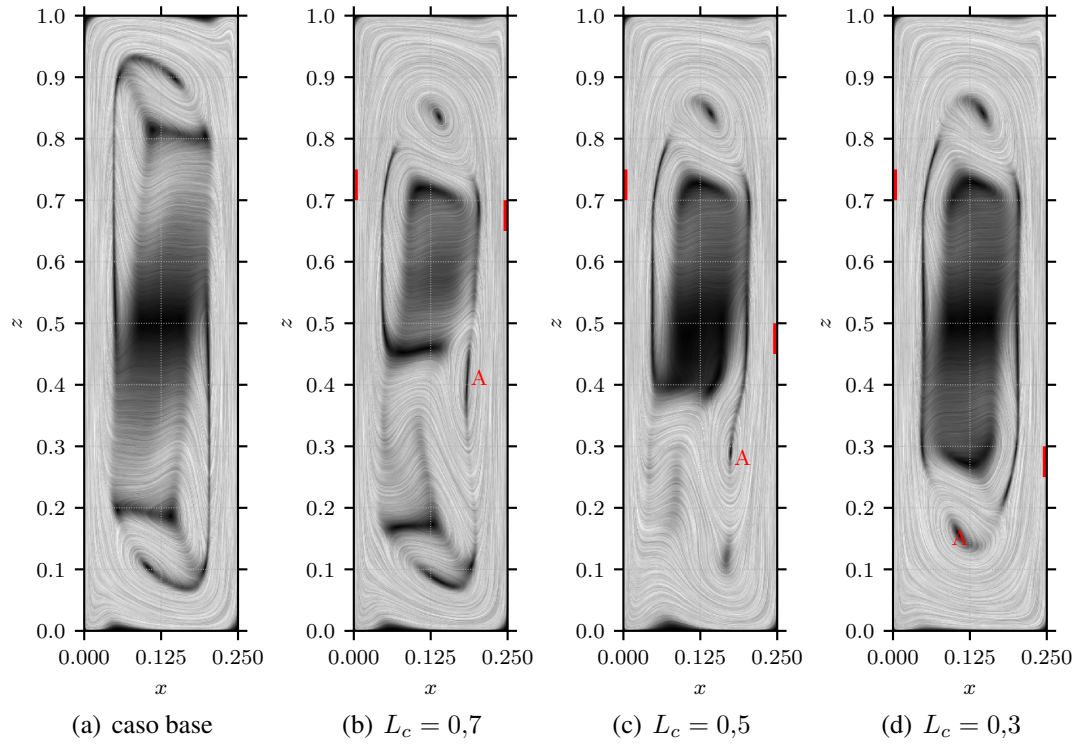


Figura 6.2: Visualización LIC para tres valores de  $L_c$  fijando  $L_h = 0,7$ . Se indica la posición de los actuadores en las paredes activas. El caso base también se presenta para comparación.

de un actuador ( $\Omega_c$ ) mientras que el opuesto ( $\Omega_h$ ) permanece fijo en  $L_h = 0,7$  con  $f_c = 0,403$  y  $\phi_c = 0^\circ$ . En las figuras 6.5a y b se muestran las ganancias de Nusselt para los diferentes casos. Se usa como referencia la frecuencia natural de la cavidad  $f^* = 0,403$  indicado en [1]. Una vez más el valor máximo se obtiene cuando  $\Omega_c$  se coloca en  $L_c = 0,3$  con  $f_c = 0,403$  y  $\phi_c = 0^\circ$  dando como resultado  $G_{Nu} = 5,5\%$  el cual es resultado indicado originalmente por Thiers et al. [1].

En la figura 6.5-a se observa que cuando  $\Omega_c$  está posicionado en  $L_c = 0,5$  y  $L_c = 0,6$ , el caso con  $\phi_c = 180^\circ$  mejora la ganancia de Nusselt en comparación con  $\phi_c = 0^\circ$ , pero disminuye la ganancia en  $L_c = 0,1$  y  $L_c = 0,3$ . Las diferencias entre  $\phi_c = 0^\circ$  y  $\phi_c = 180^\circ$  en esas diferentes alturas tienen una influencia sobre las zonas de recirculación, como se explica a continuación. En cuanto al caso  $\phi_c = 90^\circ$  la curva tiende a estar entre las otras dos, excepto cuando se posiciona  $\Omega_c$  sobre  $L_c = 0,8$ , donde la ganancia de Nusselt se reduce en comparación.

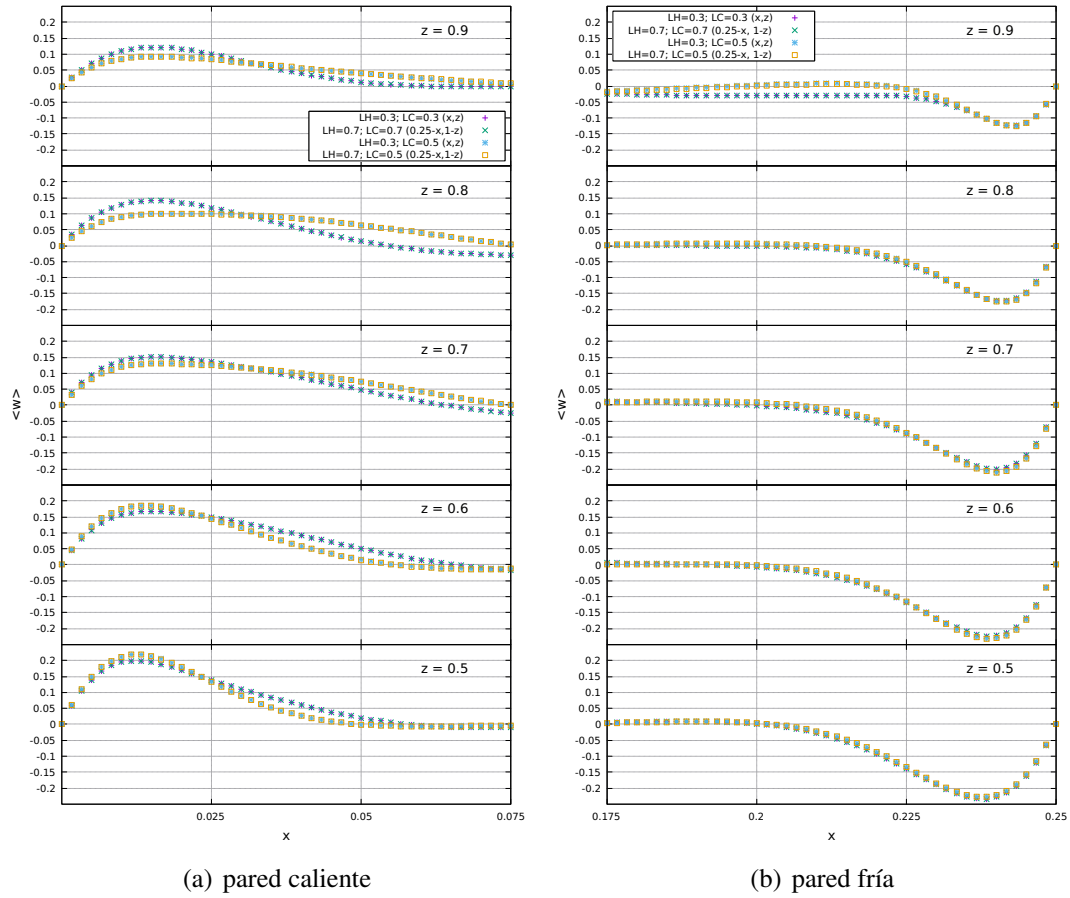


Figura 6.3: Perfiles de velocidad vertical (no-simétricos) para distintas alturas en: (a) pared caliente y (b) pared fría. Se considera el caso invertido en dos simulaciones para comparar nivel de correlación entre los perfiles.

Cuando  $\phi_c = 0$  es fijo (figura 6.5-b) y las diferencias entre los casos ocurren en la selección de la frecuencia  $f_c$  no hay otra simulación con  $G_{Nu}$  sobre 5% y las curvas cambian considerablemente en comparación con el caso de  $f_c = f^*$ . Mientras que la curva con  $f_c = f^*$  disminuye desde el mejor desempeño ubicando  $\Omega_c$  en  $L_c = 0,3$  hasta su peor desempeño en  $L_c = 0,7$ . La variación de las otras tres curvas parece menos radical pero sin llegar a mayores ganancias. No obstante a  $L_c = 0,7$  las otras tres configuraciones son más eficientes en cuanto a la transferencia de calor.

En las figuras 6.6-a, b y c se comparan las líneas de corriente promedio entre una configuración  $\phi_c = 0^\circ$  y  $\phi_c = 180^\circ$  cuando  $L_c = \{0,1; 0,3; 0,5\}$  donde la diferencia

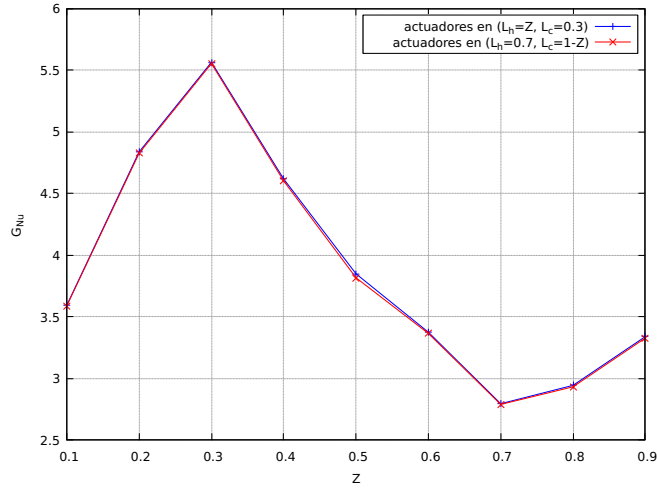
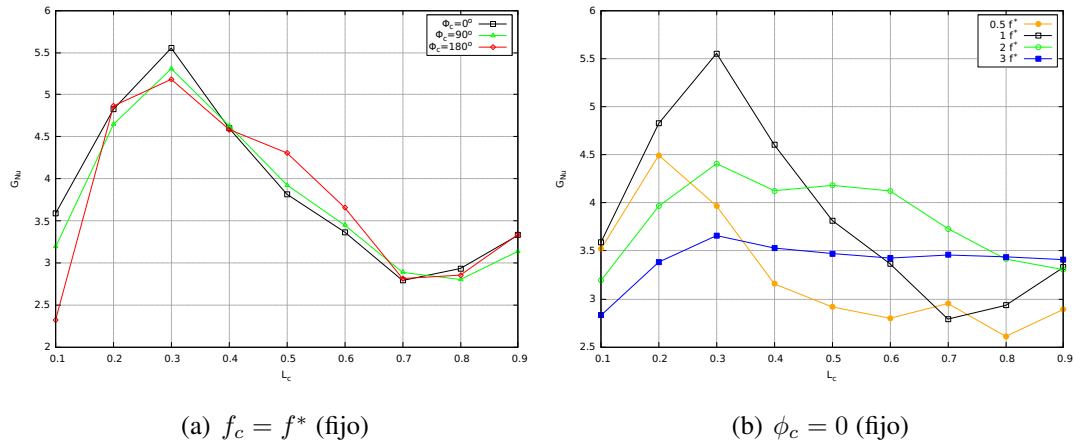


Figura 6.4: Ganancia relativa de transferencia de calor en  $Ra_H = 9 \times 10^7$  para varias posiciones del área de perturbación cuando  $\Omega_h$  se fija en  $L_h = 0,7$  (en la pared caliente) y  $\Omega_c$  se fija en  $L_c = 0,3$  (en la pared fría).



(a)  $f_c = f^*$  (fijo)

(b)  $\phi_c = 0$  (fijo)

Figura 6.5: Ganancia relativa de transferencia de calor en  $Ra_H = 9 \times 10^7$  mientras se fija  $L_h = 0,7$  para varias posiciones del área de perturbación cuando (a) se consideran diferentes fases en  $\Omega_c$  y (b) se consideran diferentes frecuencias en  $\Omega_c$ .  $f^*$  es la frecuencia natural de la cavidad indicado en [1] con valor  $f^* = 0,403$ .

de  $G_{Nu}$  entre ambos casos es mayor según la figura 6.5-a. En la figura 6.6-d se muestra un esquema de referencia con las zonas de recirculación del mejor caso de *Thiers et al.* Estas recirculaciones se señalan según su altura desde la letra A hasta la E, donde C es la recirculación en el centro de la cavidad.

En la figura 6.6-a se muestra una diferencia en la sección inferior, donde para am-

bas simulaciones la trayectoria de las líneas de corriente parece mostrar una zona de recirculación sin desarrollar que restringe la circulación de parte del flujo alrededor del borde inferior de la cavidad. El área de la zona de recirculación C aumenta cuando se considera una fase de  $\phi_c = 180^\circ$  y la zona de recirculación B se mueve hacia arriba. Como muestran los resultados, estos cambios contribuyen a la reducción de la ganancia de transferencia de calor.

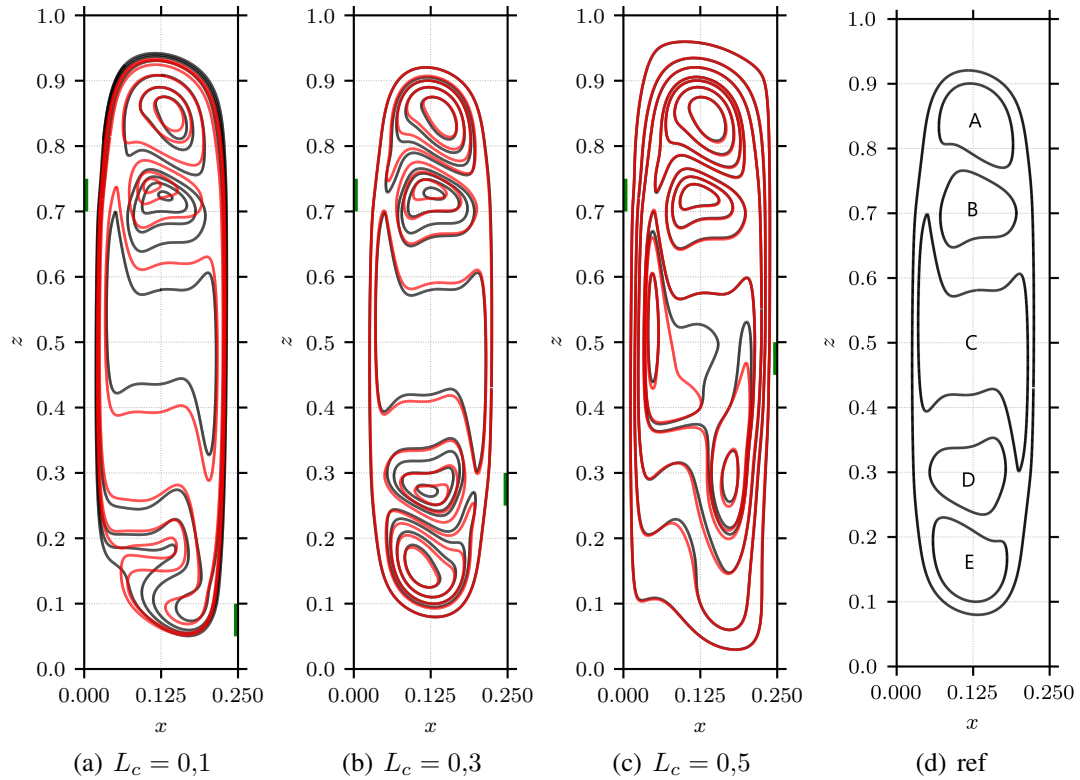


Figura 6.6: Líneas de corriente en  $Ra_H = 9 \times 10^7$  para varias posiciones del área de perturbación cuando  $L_h$  se fija en 0,7. La curva oscura indica una configuración  $\phi_c = 0^\circ$  y la curva roja indica la configuración  $\phi_c = 180^\circ$ . En verde se indica la posición de los actuadores en las paredes activas.

Las líneas de corriente promedio en la figura 6.6-b parecen muy similares, pero las zonas de recirculación se alejan ligeramente del centro cuando las fases de los actuadores son opuestas, como si la zona de recirculación más pequeña B y D estuvieran empujando a la otra hacia afuera. Una vez más, cuando las zonas de recirculación se ubican más alejadas del centro, la ganancia  $G_{Nu}$  se reduce. Finalmente en la figura 6.6-c el cambio de fase  $\Omega_c$  tiene un efecto sobre la forma de la zona de recirculación

en el núcleo (zona C indicada en figura 6.6-d). La variación de la recirculación en el núcleo cuando  $\phi_c = 180^\circ$  disminuye la transferencia de calor que ocurre entre diferentes secciones del fluido, permitiendo una mayor transferencia de calor entre las paredes activas cuando se comparan estos dos casos en la figura 6.5-a.

En la figura 6.7-a, b, c y d muestran diferentes LIC para el flujo promedio en  $L_c = 0,3$  para distintas frecuencias en  $\Omega_c$ . En la parte superior el flujo no se modifica claramente cuando se cambia la frecuencia, observándose que ni  $f_c$  tiene impacto sobre el flujo en la pared opuesta. En la parte inferior, las zonas de recirculación cambian de posición y ángulo sin desaparecer nunca por completo. Es interesante notar que el resultado más efectivo (figura 6.7-b con  $G_{Nu} = 5,5\%$ ) tiene una zona de recirculación ubicada más arriba que los otros casos. Se vuelve a señalar el hecho de que cuando la zona de recirculación E está más cerca del centro contribuye a aumentar la ganancia de transferencia de calor en este caso.

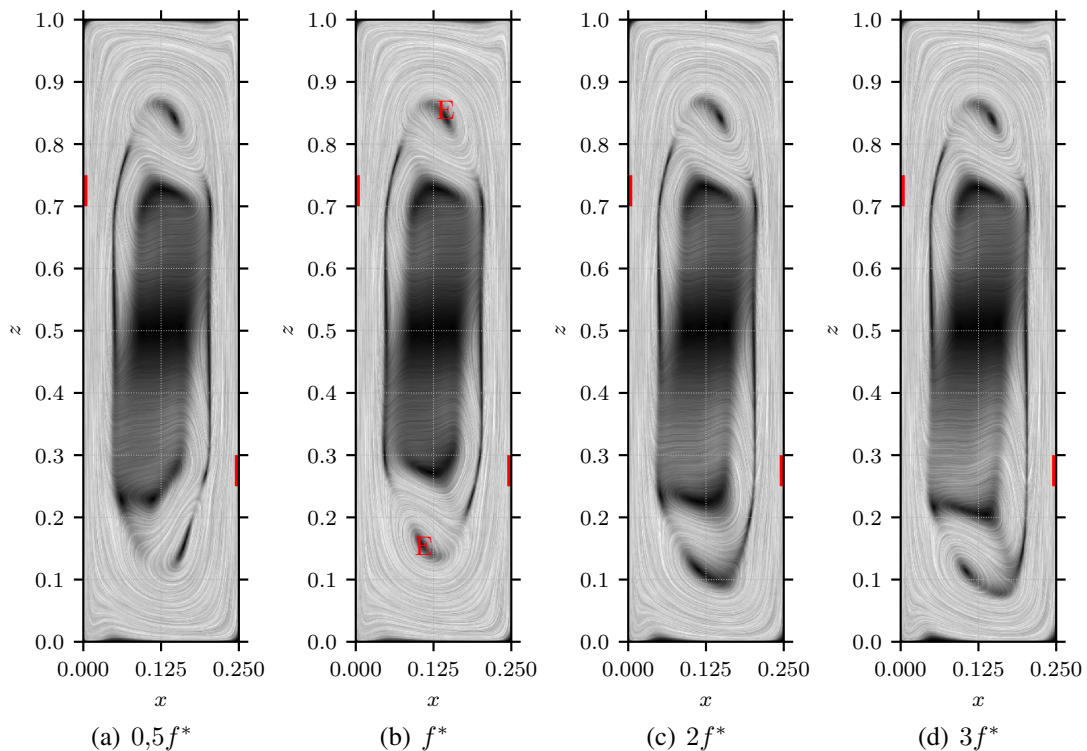


Figura 6.7: Visualización de convolución integral de línea (LIC) para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en  $L_c = 0,3$  y un desfase  $\phi_c = 0^\circ$ . En rojo se indica la posición de los actuadores en las paredes activas.

Para visualizar la influencia térmica de un actuador a otro se muestra en las figuras 6.8-6.9 la raíz cuadrada media de las fluctuaciones de temperatura para ocho casos diferentes, pero manteniendo el actuador en la placa caliente en la misma ubicación, frecuencia y fase. En la placa fría está claro que para diferentes frecuencias la distribución de la temperatura cambia drásticamente (en una escala logarítmica). La diferencia más evidente ocurre entre las figuras 6.8-a y 6.8-d donde el espacio de influencia de  $\theta_{\text{rms}}$  disminuye en la pared fría cuando se usa la frecuencia más alta. Sin embargo, una vez más, parece que no hay una influencia significativa de un actuador a otro porque, independientemente de la ubicación o la frecuencia de la perturbación en la pared fría, la distribución de temperatura en el actuador fijo permanece prácticamente inalterada.

## 6.5. Conclusión

Mediante esta investigación se logró complementar el trabajo de Thiers et al. [1] incluyendo casos que no estaban incluidos en dicha investigación. Para ello se consideraron posiciones no-simétricas entre los dos actuadores térmicos y diferentes frecuencias y fases. Se concluyó que efectivamente existe una influencia entre ambos excitadores pues al hacer variar la fase de uno de los actuadores térmicos la transferencia de calor global disminuía levemente. El mejor caso sigue ocurriendo cuando ambos actuadores se encuentran a una misma fase. Por otra parte se observó que el efecto del cambio de frecuencia sobre uno de los actuadores no alcanza a influenciar al actuador opuesto (ver figuras 6.8 y 6.9) por lo tanto el mejor caso ocurre cuando se aprovecha la mejor posición y frecuencia de forma local en ambas paredes activas. Lo cual resulta en una posición simétrica con respecto al centro y una misma frecuencia tal como se indica originalmente en la investigación de Thiers et al.

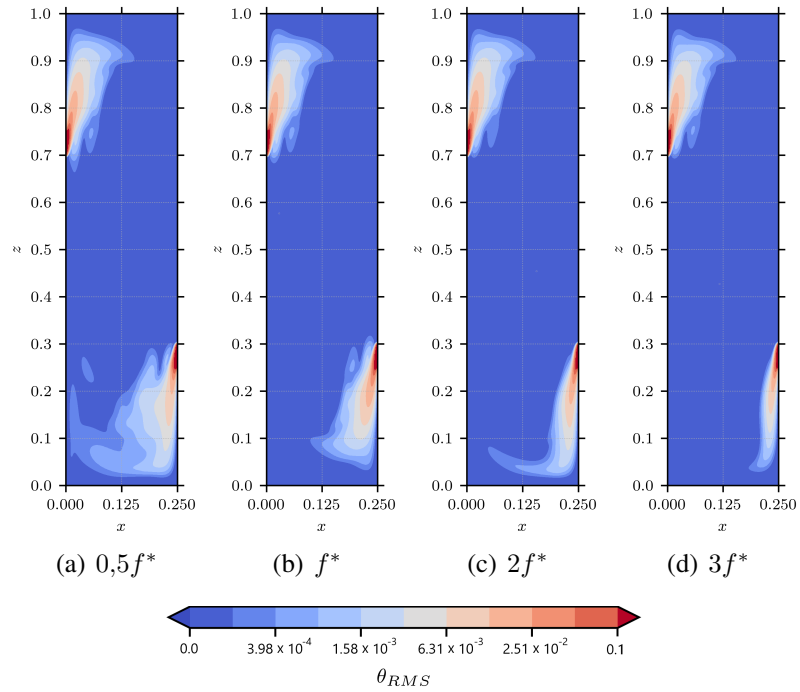


Figura 6.8: Raíz cuadrática media de la fluctuación de temperatura para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en  $L_c = 0,3$ .

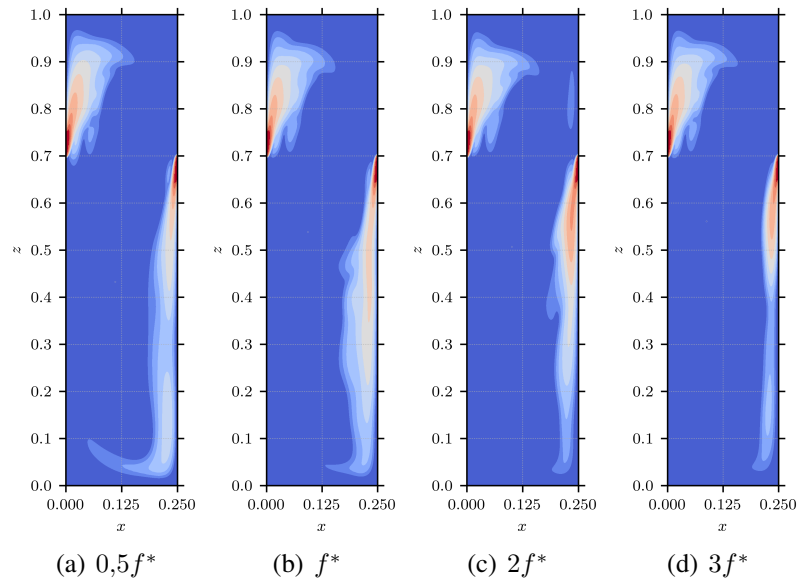


Figura 6.9: Raíz cuadrática media de la fluctuación de temperatura para diferentes frecuencias del actuador en la pared fría posicionado en  $L_c = 0,7$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones Finales

El trabajo consistió de una aplicación CFD sobre una cavidad diferencialmente calentada (CDC). El objetivo principal era buscar como mejorar la transferencia de calor global, para ello se consideraron dos enfoques diferentes. En el primero se optó por integrar un actuador pasivo al centro de la cavidad para eliminar la zona de estancamiento central, y luego se extrajo una sección para generar una zona de recirculación secundaria. En un segundo enfoque se investigó el comportamiento de un par de actuadores activos iguales a los descritos en la investigación de *Thiers et al.* [1], pero considerando distribuciones no-simétricas entre si. Este análisis no estaba incluido en la investigación original y los resultados aquí descritos permiten hacer un complemento de los datos ya publicados.

Al incluir un obstáculo adiabático en el centro de la cavidad se observó que existe una zona en la que es posible aprovechar mejor la transferencia de calor global. En el caso base (sin modificación) el flujo en las cercanías de las paredes activas tiende a concentrarse a la mitad de la altura, pero al forzar su tránsito por los extremos se logró alcanzar una mejora del 2,6 % con respecto al número de Nusselt en la pared activa. Se observó que existe un tamaño ideal del obstáculo y al seguir aumentando su altura hay una disminución abrupta de la transferencia de calor tal como se observaba en la investigación de *House et al.* [18] y *Bhave et al.* [27]. En términos locales se logró aumentar la transferencia de calor en un 6,92 % en el primer cuarto del trayecto sobre la pared activa y luego hay un decaimiento del -4,30 % sobre el trayecto restante.

Luego al extraer una sección del obstáculo se logró inducir un nuevo flujo secun-

dario que separa al flujo entre una sección que hace contacto con la pared isotérmica, y otra sección que vuelve a hacer contacto con la capa límite. Esto permitió reducir la fricción entre el flujo y el obstáculo y como resultado se alcanzó una mejora de la transferencia de calor global de un 4,39 %. Localmente se alcanzó a obtener una mejora del 80 % en el lugar donde el flujo hace su primer contacto con la pared isotérmica.

Para los casos principales se incorporaron distintas conductividades para el obstáculo. Para conductividades pequeñas se obtuvieron resultados prácticamente idénticos a los casos adiabáticos, pero para conductividades mayores la transferencia de calor se redujo significativamente alrededor del 1 %, por lo tanto el incremento de la conductividad no mejora la transferencia de calor en este caso.

El segundo enfoque de los actuadores activos consideró tanto distribuciones no-simétricas entre el par de excitadores y diferencias entre las frecuencias y fases de cada uno. La idea principal fue buscar interacciones que se pudieran aprovechar para mejorar la transferencia de calor. En primera instancia se observó el nivel de simetría de los perfiles de velocidad cuando se intercambiaba la posición entre los actuadores. Se comprobó que efectivamente existe una simetría con respecto a los términos promedios y la ganancia de la transferencia era idéntica en ambos casos.

Al analizar la influencia de la diferencia de fases entre los excitadores térmicos para posiciones no-simétricas se observó que existe un efecto sobre las posiciones de las zonas de recirculación y además se vio afectada negativamente la ganancia de la transferencia de calor dando cuenta que efectivamente existe una interacción entre los excitadores. Sin embargo no se pudo aprovechar de forma positiva. Por otra parte, al variar las frecuencias entre los actuadores hubo una reducción de la transferencia de calor mínima de un 1 % y una máxima 3 %. También, se analizó las variaciones de temperatura sobre la cavidad y se llegó a la conclusión que independientemente de la posición y frecuencia de los excitadores no hay un acople entre el espacio de influencia de los excitadores sobre este campo, y por lo tanto se puede decir que la mejor forma de aprovechar la transferencia de calor es optando por el mejor desempeño individual de cada excitador, lo cual resulta en una distribución simétrica entre si y usando una misma frecuencia tal como se observó en la investigación original de *Thiers et al.* [1].

El trabajo incluye un segmento didáctico que contempla parte del aprendizaje realizado durante el programa de magíster. Durante el desarrollo de la investigación se obtuvo una mejor comprensión de las diferentes metodologías para buscar mejorar la

transferencia de calor global. Si bien inicialmente el objetivo ha sido buscar un desempeño térmico el futuro de la investigación considera la opción de utilizar el esquema desarrollado para estudiar las estructuras de los flujos al interior de la CDC.

De forma preliminar se ha buscado combinar los métodos descritos en este trabajo y se ha obtenido una mejora de la transferencia de calor de alrededor del 10 % lo cual da cuenta del potencial que existe en esta investigación.

Como futuras perspectivas se considera complementar los resultados al realizar simulaciones en 3 dimensiones. Por otra parte, se considera el análisis del efecto que tiene un obstáculo extruído en la cavidad cuando se tienen diferentes ratios de aspectos. También se plantea combinar ambos enfoques para incrementar en conjunto la transferencia de calor global.

# Apéndice A

## Anexo

### A.1. Método de los pesos residuales

Consideramos una ecuación diferencial usando la función  $u(x, t)$  en el dominio  $\Omega$

$$\mathbb{L}(u) = 0 . \tag{A.1}$$

Se supone que  $u(x, t)$  es desconocido y queremos encontrar una aproximación  $u^\delta(x, t)$  de la forma

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} \hat{u}_i(x) \Phi_i(x) . \tag{A.2}$$

donde  $N_{\text{dof}}$  es el número de grados de libertad asociado directamente al número de nodos<sup>1</sup>. Al aplicar esta aproximación sobre la ecuación diferencial  $\mathbb{L}$  se obtendrá un residual  $R$  distinto de 0.

$$\mathbb{L}(u^\delta) = R(u^\delta) \tag{A.3}$$

El método de los pesos residuales consiste en determinar los coeficientes  $\hat{u}_i(x, t)$  haciendo restricciones sobre  $R$  mediante un producto interno sobre el dominio  $\Omega$  defi-

---

<sup>1</sup>En el caso 1D se tiene que  $N_{\text{dof}} = N$ , donde  $N$  es el número de nodos

nido como

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (\text{A.4})$$

La restricción es que el producto interno entre  $R$  y una función de peso  $v_j$  (también llamada función test) debe ser igual a 0, es decir

$$(v_j, R) = 0 \quad j = 1, \dots, N_{\text{dof}} \quad (\text{A.5})$$

La elección de  $v_j$  dependerá del método que se esté empleando. En la tabla A.1 se describen diferentes formas que puede tomar  $v_j$  según cada método.

Tabla A.1: Funciones test  $v_j(x)$  usado en el método de los pesos residuales y el método producido.

<b>Función test</b>	<b>Tipo de método</b>
$v_j(x) = \delta(x - x_j)$	Colocación
$v_j(x) = \frac{\partial R}{\partial \bar{u}_j}$	Mínimos cuadrados
$v_j(x) = x^j$	Método de los momentos
$v_j(x) = \Phi_j$	Galerkin
$v_j(x) = \Phi_i (\neq \Phi_j)$	Petrov-Galerkin

## A.2. Método de Galerkin 1D

En términos simples el método de Galerkin consiste en utilizar el método de los pesos residuales (sección A.1) y definir la función  $v_j(x)$  como

$$v_j(x) = \Phi_j(x) , \quad (\text{A.6})$$

es decir se utilizan las mismas funciones que describen la aproximación de la función principal  $u^\delta(x)$  para denotar a la función test de peso. A modo didáctico se utiliza como referencia la ecuación de Helmholtz en 1D para definir la ecuación diferencial

$$\mathbb{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + f = 0 , \quad (\text{A.7})$$

y se consideran las condiciones de frontera

$$u(0) = g_D \quad , \quad \frac{\partial u(l)}{\partial x} = g_N .$$

El dominio de la ecuación 1D es el dominio abierto  $\Omega$  que se describe como

$$\Omega = \{x \mid 0 < x < l\} = ]0, l[ \quad (\text{A.8})$$

El primer paso en el método de Galerkin consiste en multiplicar la ecuación diferencial  $\mathbb{L}(u)$  por la función de peso  $v_j$  e integrar sobre el dominio  $\Omega$  obteniéndose

$$\int_0^l v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \int_0^l \lambda v u dx + \int_0^l v f dx = 0 . \quad (\text{A.9})$$

Al integrar por partes la ecuación anterior queda como

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^l \lambda v u dx = \int_0^l v f dx + \left[ v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^l \quad (\text{A.10})$$

a partir de la ecuación anterior definimos

$$a(v, u) = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^l \lambda v u dx \quad f(v) = \int_0^l v f dx + \left[ v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^l .$$

Por lo tanto la ecuación A.10 puede expresarse como

$$a(v, u) = f(v) . \quad (\text{A.11})$$

La función  $a(v, u)$  vendría a ser la energía de deformación. Se le conoce como espacio de energía  $E(\Omega)$  al espacio de todas las funciones que tengan una energía de deformación finita dentro de  $\Omega$

$$E(\Omega) = \{u \mid a(v, u) < \infty\} \quad (\text{A.12})$$

Asociado a este espacio está la norma de energía

$$\|u\|_E = \sqrt{a(v, u)}. \quad (\text{A.13})$$

Por otra parte se llama espacio de prueba  $\chi$  a aquellas funciones  $u(x)$  que están dentro del espacio de energía y que satisfacen la condición de Dirichlet

$$\chi = \{u \mid u \in E(\Omega), u(0) = g_D\} \quad (\text{A.14})$$

De forma similar se llama espacio de peso  $\nu$  a aquellas funciones que cumplen con

$$\nu = \{v \mid v \in E(\Omega), v(0) = 0\} \quad (\text{A.15})$$

Ahora podemos definir la formulación débil de la ecuación diferencial como:

$$\text{Encontrar } u \in \chi \text{ tal que } a(v, u) = f(v), \quad \forall v \in \nu$$

Para denotar un número discreto de soluciones se indica  $\chi$  ( $\chi^\delta \subset \chi$ ) y  $\nu$  ( $\nu^\delta \subset \nu$ ), así que la formulación queda:

$$\text{Encontrar } u^\delta \in \chi^\delta \text{ tal que } a(v^\delta, u^\delta) = f(v^\delta), \quad \forall v^\delta \in \nu^\delta$$

En la aproximación de Galerkin se usan las mismas funciones para definir  $u^\delta$  y  $v^\delta$ , pero por construcción  $v^\delta$  es 0 sobre la condición de Dirichlet mientras que  $u^\delta$  cumple con la condición de frontera. Para corregir el problema se realiza una nueva descripción de  $u^\delta$

$$u^\delta = u^H + u^D, \quad (\text{A.16})$$

tal que  $u^H$  es 0 sobre la condición de Dirichlet y comparte las funciones con  $v^\delta$ , mientras que  $u^D$  define la condición de Dirichlet para  $u^\delta$ .

Finalmente la formulación de Galerkin del problema sería:

$$\text{Encontrar } u^\delta \in \chi^\delta \text{ tal que}$$

$$a(v^\delta, u^H) = f(v^\delta) - a(v^\delta, u^D), \quad \forall v^\delta \in \mathcal{V}^\delta$$

### A.3. Mapeo paramétrico

Al aplicar el método de Galerkin estamos buscando una aproximación de la solución  $u(x, t)$  de la forma  $u^\delta(x, t)$  tal como se señala en la ecuación A.2. Otra descripción posible es de la forma

$$u^\delta = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \hat{u}_i \Phi_i(x) \quad (\text{A.17})$$

donde  $N_{\text{dof}}$  es el número de grados de libertad y  $\Phi_i$  es un modo **global** el cual se describe a lo largo de todo el dominio  $\Omega$  tal como se puede observar en la figura A.1. En este caso el dominio  $\Omega$  se divide en tres subdominios:  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .

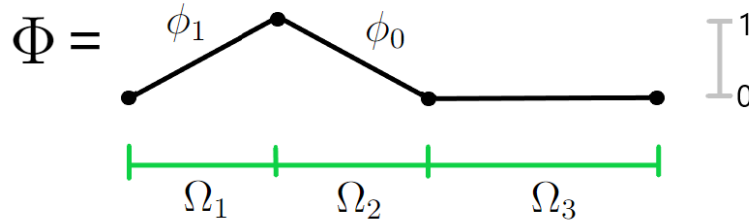


Figura A.1: Ejemplificación de modo global y modos locales considerando tres subsecciones.

En la figura A.1 el modo **global** se define sobre los 3 subdominios. Sin embargo cada sección se corresponde con un modo **local**  $\phi_i$  que solo existe al interior de un subdominio en particular tal que

$$\Phi = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \phi_i \quad (\text{A.18})$$

Para generalizar la descripción de un subdominio **local** y lineal (como los que se observan en la figura A.1) consideramos un dominio estándar  $\Omega_{\text{st}}$  con una coordenada **local** estandarizada  $\xi$  que varía entre los valores -1 y 1 ( $\Omega_{\text{st}} = \{\xi \mid -1 < \xi < 1\}$ ) y definimos los modos **locales** lineales como

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} \quad \phi_1 = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} . \quad (\text{A.19})$$

La idea detrás de este concepto es poder transformar las coordenadas **globales**  $x$  en coordenadas locales **locales**  $\xi$  para definir un método homogéneo que permita resolver el problema, es decir que sin importar la forma que tenga el elemento (1D en este caso) se posea un procedimiento de resolución consistente.

La transformación correspondiente es  $\chi^e(\xi)$  y se define

$$x = \chi^e(\xi) = \frac{1+\xi}{2}x_{e-1} + \frac{1-\xi}{2}x_e = \phi_1(\xi)x_{e-1} + \phi_0(\xi)x_e , \quad (\text{A.20})$$

donde  $e$  hace referencia al número del elemento espectral. A esta expresión se le conoce como **mapeo paramétrico**. El inverso de este mapeo es (i.e. para pasar de coordenadas **locales** hacia las coordenadas **globales**)

$$\xi = (\chi^e)^{-1}(x) = 2\frac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}} - 1, \quad x \in \Omega^e . \quad (\text{A.21})$$

## A.4. Ensamblaje global

La aproximación de  $u^\delta$  con respecto a los modos **globales** y **locales** es

$$u^\delta = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \hat{u}_i \Phi_i(x) = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \sum_{p=0}^P \phi_p^e(\xi) \hat{u}_p^e , \quad (\text{A.22})$$

donde  $P$  es el orden polinomial del orden de expansión con  $\phi_p^e(\xi) = \phi_p([\chi^e]^{-1}(x))$  y  $N_{\text{el}}$  es el número de subdominios. Sin embargo existen muchos más coeficientes de expansiones locales  $\hat{u}_p^e$  que coeficientes de expansiones globales  $\hat{u}_i$ , y por lo tanto se requieren que existan ciertas restricciones para que haya una relación clara entre ambos tipos de coeficientes. Para el modo lineal representado en la figura A.1 se debe hacer cumplir que el modo **global** sea continuo en todo el dominio  $\Omega$ , lo que implica que debe haber una igualdad de modos **locales**, entonces

$$\hat{u}_1^1 = \hat{u}_0^2 = \hat{u}_1 . \quad (\text{A.23})$$

El proceso de llevar los coeficientes de expansiones **locales** hacia los coeficientes de expansión **globales** se le llama **ensamblaje global**. Para hacer una descripción más general de este procedimiento se denota  $\hat{u}_g$  al vector con todos los coeficientes globales,  $\hat{u}^e$  el vector con los coeficientes locales (para el ejemplo de la figura A.1  $\hat{u}^e = [\hat{u}_0^e, \hat{u}_1^e]$ ), y  $\hat{u}_l$  el vector con todos los coeficientes locales  $\hat{u}_l = [\hat{u}^1, \hat{u}^2, \dots, \hat{u}^{N_{el}}]^T$ .

La construcción de los coeficientes **locales** desde los coeficientes **globales** se realiza a partir de una matriz  $A$  llamada **matriz de ensamblaje** tal que

$$\hat{u}_l = A\hat{u}_g , \quad (\text{A.24})$$

donde  $A$  es una matriz bien esparcida con una gran cantidad de 1, en su interior que relacionan los coeficientes de expansión como se muestra en la ecuación A.23.

El **ensamblaje global** se realiza de forma recíproca construyendo los coeficientes **globales** a partir de los coeficientes **locales** utilizando la traspuesta de la matriz  $A$  tal que

$$\hat{u}_g = A^T\hat{u}_l . \quad (\text{A.25})$$

## A.5. Cuadratura de Gauss

Al trabajar con herramientas numéricas no nos es posible resolver de forma analítica una integral de forma. Por lo tanto se debe utilizar una **integración numérica** o también llamada **cuadratura de Gauss** que representa una sumatoria finita tal que

$$\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} \omega_i u(\xi_i) , \quad (\text{A.26})$$

donde  $\omega_i$  son los llamados **pesos de cuadratura** y  $\xi_i$  es una abscisa definida para  $i = \{0, \dots, Q - 1\}$  con  $Q$  el número de puntos totales tal que  $-1 < \xi_i < 1$ . Existen diferentes tipos de **cuadraturas** pero se hará atención especial a la **cuadratura de**

### Gauss.

En particular el integrando  $u(\xi)$  de la ecuación A.26 se representa mediante polinomios de Lagrange con  $Q$  puntos distribuidos en  $\xi_i$  tal que

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{Q-1} u(\xi_i)h_i(\xi) + \varepsilon(u), \quad (\text{A.27})$$

donde  $\varepsilon(u)$  es el error. Al introducir esta noción en la ecuación A.26 se obtiene

$$\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi = \sum_{i=0}^{Q-1} \omega_i u(\xi_i) + R(u), \quad (\text{A.28})$$

donde

$$\omega_i = \int_{-1}^1 h_i(\xi)d\xi \quad (\text{A.29})$$

$$R(u) = \int_{-1}^1 \varepsilon(u)d\xi. \quad (\text{A.30})$$

Si  $u(\xi)$  es un polinomio de orden  $Q - 1$  o menos entonces la solución de la cuadratura es exacta. En el caso de un mayor orden aún sería posible obtener una solución exacta siempre que haya un posicionamiento correcto de los nodos  $\xi_i$ . A estos métodos se les llaman **cuadraturas de Gauss**. Existen 3 tipos: **Cuadratura de Gauss** que solo considera abscisa interiores, **cuadratura de Gauss-Radau** que considera una abscisa con nodos interiores y uno en el borde y **cuadratura de Gauss-Legendre-Lobatto (GLL)** con nodos en el interior y en ambos extremos.

## A.6. Integración y diferenciación en expansiones multidimensionales

Todas las funciones en dos o tres dimensiones pueden representarse como producto de dos o tres funciones que se definan en una sola dimensión. Es decir, que en el caso de trabajar con polinomios de Lagrange los modos correspondientes se pueden definir

como

$$\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h_p(\xi_1) h_q(\xi_2) h_r(\xi_3) \quad (\text{A.31})$$

Para efectos de este trabajo se considerará integración y diferenciación solo en dominios estructurados, es decir que los subdominios elementales  $\Omega^e$  tendrán forma de cuadrilátero en el caso 2D y forma hexaédrica en forma 3D. Los dominios estandarizados para tres dimensiones se definen

$$\Omega_{\text{st}} = Q^3 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}. \quad (\text{A.32})$$

### A.6.1. Integración multidimensional (cuadratura de Gauss)

En lo que sigue el análisis se realizará para dos dimensiones, pero claramente la idea puede ser extrapolada a tres dimensiones. Con respecto a la cuadratura de Gauss la diferencia con respecto al caso 1D descrito en una sección anterior consiste en que se necesitará una sumatoria adicional con tal de discretizar las integrales sobre las diferentes direcciones

$$\begin{aligned} \int_{Q^2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right\} d\xi_2 \\ &\simeq \sum_{i=0}^{Q_1-1} \omega_i \left\{ \sum_{j=0}^{Q_2-1} \omega_j u(\xi_1, \xi_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

### A.6.2. Diferenciación numérica

Las diferenciaciones presentadas en esta sección solo son válidas para regiones estructuradas, i.e. subdominios elementales con forma cuadrática (2D) o hexaédrica (3D).

#### A.6.2.1. Diferenciación en 1D

Para describir la diferenciación primero debemos definir el tipo de expansión a utilizar (polinomios de Lagrange  $h_p$ ) y entender como funcionan sus propiedades al aplicar

la diferenciación. Para esto último utilizaremos a modo de ejemplo el caso simplificado en 1D. la solución discretizada se define

$$u^\delta(\xi) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \phi_p(\xi) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p h_p(\xi) , \quad (\text{A.34})$$

donde  $h_p$  es un polinomio de Lagrange de grado  $P$  que pasa por  $P + 1$  puntos. Y tiene la notable propiedad  $h_p(\xi_i) = \delta_{pi}$ , es decir que los nodos del polinomio representan el valor de la aproximación notado  $u_p$ , i.e.

$$u_p = u^\delta(\xi_p) .$$

Es un concepto diferente al coeficiente de expansión, pero claramente se relacionan directamente

$$\begin{aligned} u_1 &= u^\delta(\xi_1) \\ &= \hat{u}_1 h_1(\xi_1) + \hat{u}_2 h_2(\xi_1) + \dots + \hat{u}_3 h_3(\xi_1) \\ &= \hat{u}_1 \delta_{11} + \hat{u}_2 \delta_{21} + \dots + \hat{u}_P \delta_{P1} \\ &= \hat{u}_1 \cdot 1 + \hat{u}_2 \cdot 0 + \dots + \hat{u}_P \cdot 0 \\ &= \hat{u}_1 . \end{aligned}$$

Entonces se puede hacer la siguiente afirmación. Es claro que el coeficiente de expansión es constante en el espacio y solo depende del modo al que acompañe. En consecuencia  $u_i$  tampoco depende del espacio. Esto es claro de observar cuando uno se ve que un valor puntual de la solución no existe en otro punto del espacio. Por lo tanto se puede decir con seguridad que la derivada  $\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}$  es igual a 0. Entonces por regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi} = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \frac{\partial h_p(\xi)}{\partial \xi} . \quad (\text{A.35})$$

Para efectos prácticos de CFD, y a pesar del análisis previo es común definir una

pseudo-diferenciación de  $u_i$  notada  $u'_i$  tal que

$$\sum_{p=0}^P u_p \frac{\partial h_p(\xi)}{\partial \xi} = \sum_{p=0}^P u'_p h_p, \quad (\text{A.36})$$

donde en definitiva  $u'_p$  es

$$u'_p = \sum_{q=0}^P u_q \frac{\partial h_q}{\partial \xi}(\xi_p). \quad (\text{A.37})$$

En otras palabras lo que se está haciendo es utilizar la misma función  $h_p$  para interpolar  $u'_p$ . Este método es útil cuando se quiere representar el término convectivo  $u^\delta(\xi) \frac{\partial u^\delta}{\partial \xi}(\xi)$  dentro de la ecuación de Navier-Stokes. De esta forma en los puntos  $\xi_i$  se tiene

$$\begin{aligned} u^\delta(\xi_i) \frac{\partial u^\delta}{\partial \xi}(\xi_i) &= \left( \sum_{p=0}^P u_p h_p(\xi_i) \right) \left( \sum_{q=0}^P u'_q h_q(\xi_i) \right) \\ &= \left( \sum_{p=0}^P u_p \delta_{pi} \right) \left( \sum_{q=0}^P u'_q \delta_{qi} \right) \\ &= u_i u'_i. \end{aligned}$$

Así el término convectivo global quedaría definido como

$$u^\delta(\xi) \frac{\partial u^\delta}{\partial \xi}(\xi) = \sum_{p=0}^P u_p u'_p h_p(\xi). \quad (\text{A.38})$$

### A.6.2.2. Diferenciación en 2D

Como se vió anteriormente el modo en 2D puede representarse como producto de dos polinomios de Lagrange definidos para 1D, es decir

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} h_p(\xi_1) h_q(\xi_2) . \quad (\text{A.39})$$

donde

$$u_{pq} = u^\delta(\xi_{1p}, \xi_{2q})$$

es la evaluación de  $u^\delta$  sobre los nodos. La derivada parcial de  $u^\delta$  en dirección  $\xi_1$  sería

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \frac{\partial h_p(\xi_1)}{d\xi_1} h_q(\xi_2) . \quad (\text{A.40})$$

Cabe mencionar que por propiedad de los polinomios de Lagrange el valor de gradiente es nulo cuando se evalúa sobre el nodo  $p$  y es no nulo en los demás (excepto en los bordes).

### A.6.2.3. Diferenciación en una región elemental

Al transformar el espacio **global** hacia un espacio **local** la diferenciación tendrá que forzosamente cambiar de dirección, es decir pasar desde  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  hacia  $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$  y para ello se deberá aplicar la regla de la cadena. El operador  $\nabla$  para coordenadas **globales** y coordenadas **locales** en 2 dimensiones se define como

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.41})$$

Si conocemos la forma de la transformación  $\chi^e(x)$  es posible obtener la diferenciación de  $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}$ . Sin embargo en esta sección se busca expresar las derivadas parciales  $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$  de forma general. Para esto consideramos

$$du(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2 . \quad (\text{A.42})$$

Si en vez de  $du$  utilizamos las nociones de  $dx_1$  y  $dx_2$  la expresión anterior queda descrita por

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} .$$

Al igual como si estuviéramos buscando una expresión de  $(\chi^e)^{-1}$ , invertimos la expresión anterior para obtener

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.43})$$

Guardamos esta expresión y por otra parte aplicamos la regla de la cadena directamente sobre  $[d\xi_1, d\xi_2]^T$  obteniéndose

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.44})$$

Por lo tanto al comparar las últimas 2 expresiones se tiene que

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}.$$

Ahora es posible reemplazar estas igualdades sobre la ecuación A.41 y todas las derivadas parciales tienen la forma  $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$  o  $\frac{\partial}{\partial \xi_2}$ .

# Bibliografía

- [1] N Thiers, R Gers, and O Skurtys. Heat transfer enhancement by localised time varying thermal perturbations at hot and cold walls in a rectangular differentially heated cavity. *International Journal of Thermal Sciences*, 151:106245, 2020.
- [2] Patrick Le Quere and T Alziary de Roquefort. Transition to unsteady natural convection of air in vertical differentially heated cavities: Influence of thermal boundary conditions on the horizontal malls. In *International Heat Transfer Conference Digital Library*. Begel House Inc., 1986.
- [3] Shihe Xin and Patrick Le Quéré. Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 304:87–118, 1995.
- [4] FX Trias, M Soria, A Oliva, and CD Pérez-Segarra. Direct numerical simulations of two-and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 586:259–293, 2007.
- [5] Didier Saury, Nicolas Rouger, Francis Djanna, and François Penot. Natural convection in an air-filled cavity: Experimental results at large rayleigh numbers. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38(6):679–687, 2011.
- [6] Shihe Xin and Patrick Le Quéré. Stability of two-dimensional (2d) natural convection flows in air-filled differentially heated cavities: 2d/3d disturbances. *Fluid Dynamics Research*, 44(3):031419, 2012.
- [7] Libo Qian, Suizheng Qiu, Dalin Zhang, Guanghui Su, and Wenxi Tian. Numerical research on natural convection in molten salt reactor with non-uniformly distribu-

- ted volumetric heat generation. *Nuclear engineering and design*, 240(4):796–806, 2010.
- [8] Hyun Jung Kim, Byoung Hoon An, Jinil Park, and Dong-Kwon Kim. Experimental study on natural convection heat transfer from horizontal cylinders with longitudinal plate fins. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(2):593–599, 2013.
- [9] S Amraqui, A Mezrhab, and C Abid. Combined natural convection and surface radiation in solar collector equipped with partitions. *Applied Solar Energy*, 47(1):36–47, 2011.
- [10] Leila Moosavi, Norhayati Mahyuddin, Norafida Ab Ghafar, and Muhammad Azam Ismail. Thermal performance of atria: An overview of natural ventilation effective designs. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 34:654–670, 2014.
- [11] PR Ashill. *Flow control: Passive, active, and reactive flow management m. gad-el-hak cambridge university press, the edinburgh building, cambridge cb2 2ru, uk. 2000. 421pp. illustrated.£ 60. isbn 0-521-77006-8. The Aeronautical Journal*, 105(1045):150–150, 2001.
- [12] JL Lage, A Bejan, et al. The resonance of natural convection in an enclosure heated periodically from the side. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(8):2027–2038, 1993.
- [13] Ho Sang Kwak, Kunio Kuwahara, and Jae Min Hyun. Resonant enhancement of natural convection heat transfer in a square enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(18):2837–2846, 1998.
- [14] Btissam Abourida, Mohammed Hasnaoui, and Samira Douamna. Convection naturelle dans une cavité carrée avec des parois verticales soumises à des températures périodiques. *Revue générale de thermique*, 37(9):788–800, 1998.
- [15] François Penot, Olivier Skurtys, and Didier Saury. Preliminary experiments on the control of natural convection in differentially-heated cavities. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(10):1911–1919, 2010.

- [16] Paul Chorin, Florian Moreau, and Didier Saury. Heat transfer modification induced by a localized thermal disturbance in a differentially-heated cavity. *International Journal of Thermal Sciences*, 125:101–110, 2018.
- [17] Said Shakerin, Mark Bohn, and RI Loehrke. Natural convection in an enclosure with discrete roughness elements on a vertical heated wall. *International journal of heat and mass transfer*, 31(7):1423–1430, 1988.
- [18] John M House, Christoph Beckermann, and Theodore F Smith. Effect of a centered conducting body on natural convection heat transfer in an enclosure. *Numerical Heat Transfer*, 18(2):213–225, 1990.
- [19] Jiang-Tao Hu, Xiu-Hong Ren, Di Liu, Fu-Yun Zhao, and Han-Qing Wang. Conjugate natural convection inside a vertical enclosure with solid obstacles of unique volume and multiple morphologies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 95:1096–1114, 2016.
- [20] Abdelfattah El Mansouri, M Hasnaoui, A Amahmid, and M Alouah. Numerical analysis of conjugate convection-conduction heat transfer in an air-filled cavity with a rhombus conducting block subjected to subdivision: Cooperating and opposing roles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 150:119375, 2020.
- [21] ERG Eckert, JP Hartnett, and TF Irvine. Flowvisualization studies of transition to turbulence in freeconvection flow. *ASME paper*, 60:250, 1960.
- [22] M Yousaf and Shoaib Usman. Natural convection heat transfer in a square cavity with sinusoidal roughness elements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90:180–190, 2015.
- [23] Syeda Humaira Tasnim and Michael R Collins. Numerical analysis of heat transfer in a square cavity with a baffle on the hot wall. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 31(5):639–650, 2004.
- [24] Man Yeong Ha and Mi Jung Jung. A numerical study on three-dimensional conjugate heat transfer of natural convection and conduction in a differentially heated cubic enclosure with a heat-generating cubic conducting body. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(23):4229–4248, 2000.

- [25] M El Abdallaoui, M Hasnaoui, and A Amahmid. Lattice-boltzmann modeling of natural convection between a square outer cylinder and an inner isosceles triangular heating body. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 66(9):1076–1096, 2014.
- [26] Man Yeong Ha, In-Kyu Kim, Hyun Sik Yoon, Kyung Soo Yoon, Jae Ryong Lee, S Balachandar, and Ho Hwan Chun. Two-dimensional and unsteady natural convection in a horizontal enclosure with a square body. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, 41(2):183–210, 2002.
- [27] Prasad Bhave, Arunn Narasimhan, and DAS Rees. Natural convection heat transfer enhancement using adiabatic block: optimal block size and prandtl number effect. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(21-22):3807–3818, 2006.
- [28] Donald D Gray and Aldo Giorgini. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5):545–551, 1976.
- [29] Adrian Bejan. *Convection heat transfer*. John wiley & sons, 2013.
- [30] Anthony T Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3):468–488, 1984.
- [31] P Fischer, J Kruse, J Mullen, H Tufo, J Lottes, and S Kerkemeier. Nek5000: Open source spectral element cfd solver. Argonne National Laboratory, Mathematics and Computer Science Division, Argonne, IL, see <https://nek5000.mcs.anl.gov/index.php/MainPage>, 2, 2008.
- [32] George Em Karniadakis, George Karniadakis, and Spencer Sherwin. *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press on Demand, 2005.
- [33] Vincent Rezaeiravesh. Jansson, Peplinski and Schlatter. *Theory, implementation and optimization of nek5000*. 2021.
- [34] GE Karniadakis, ET Bullister, and AT Patera. A spectral element method for the solution of the two dimensional time dependent incompressible navier stokes

- equations, finite elements methods for nonlinear problems. In Europe-US Symposium, 1985.
- [35] Paul F Fischer. An overlapping schwarz method for spectral element solution of the incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 133(1):84–101, 1997.
- [36] Paul F Fischer, Francis Loth, Seung E Lee, Sang-Wook Lee, David S Smith, and Hisham S Bassiouny. Simulation of high-reynolds number vascular flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(31-32):3049–3060, 2007.
- [37] Pierre Belleoud, Didier Saury, Patrice Joubert, Denis Lemonnier, and Francis Djanna. Experimental investigations in an air-filled differentially-heated cavity at large rayleigh numbers. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 395, page 012119. IOP Publishing, 2012.
- [38] E Gadoin, P Le Quéré, and O Daube. A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries: application to natural convection in enclosures. *International Journal for Numerical methods in fluids*, 37(2):175–208, 2001.
- [39] Brian Cabral and Leith Casey Leedom. Imaging vector fields using line integral convolution. In *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 263–270, 1993.
- [40] Jarke J Van Wijk. Spot noise texture synthesis for data visualization. In *Proceedings of the 18th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 309–318, 1991.
- [41] William T Freeman, Edward H Adelson, and David J Heeger. Motion without movement. *ACM Siggraph Computer Graphics*, 25(4):27–30, 1991.
- [42] Charles K Chui. *An introduction to wavelets*, volume 1. Academic press, 1992.