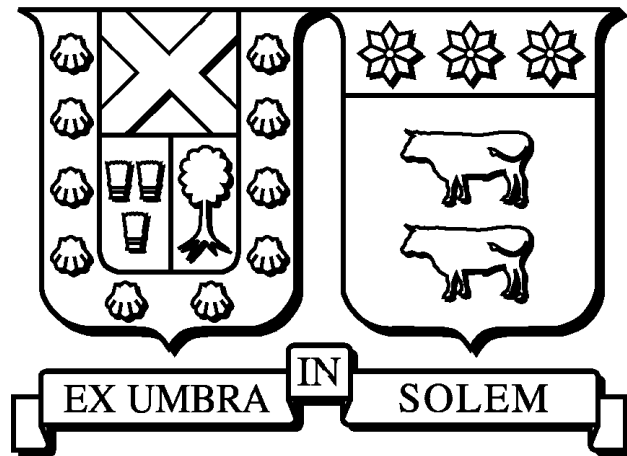


# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

## Un Método De Elementos Finitos Estabilizados De Bajo Orden A Divergencia Nula Para El Problema De Boussinesq Estacionario

---

Memoria presentada por:

**César Ignacio Naranjo Peñaloza**

*Como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil  
Matemático y al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática*

*Profesores Guías:*

Alejandro Allendes Flores

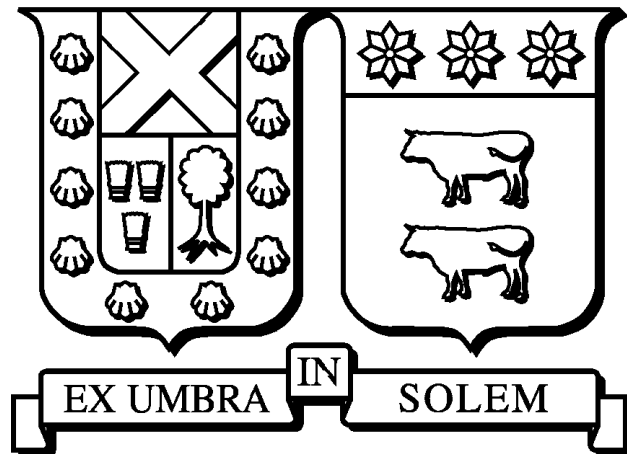
Gabriel Barrenechea

Noviembre 2017



# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

## Un Método De Elementos Finitos Estabilizados De Bajo Orden A Divergencia Nula Para El Problema De Boussinesq Estacionario

---

Memoria presentada por:

**César Ignacio Naranjo Peñaloza**

*Como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil  
Matemático y al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática*

*Profesores Guías:*

Alejandro Allendes Flores

Gabriel Barrenechea

*Examinadores:*

Ricardo Oyarzúa

Michael Karkulik

Noviembre, 2017

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.



TÍTULO DE LA MEMORIA:

Un Método De Elementos Finitos Estabilizados De Bajo Orden A Divergencia Nula Para El Problema De Boussinesq Estacionario.

AUTOR: César Ignacio Naranjo Peñaloza.

TRABAJO DE MEMORIA, presentado como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático de la Universidad Técnica Federico Santa María y el grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes

Firma

Alejandro Allendes Flores

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Gabriel Barrenechea

University of Strathclyde, Scotland.

\_\_\_\_\_

Ricardo Oyarzúa

Universidad del Bío-Bío, Chile.

\_\_\_\_\_

Michael Karkulik

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Valparaíso, Noviembre 2017.



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por su constante apoyo y cariño siempre y especialmente en mi etapa universitaria, especialmente a mis padres por ser además una guía y un ejemplo a seguir, y a la Sarita por llegar a nuestras vidas; al profesor Alejandro por su apoyo, cercanía y paciencia; al profesor Gabriel por su apoyo a pesar de la distancia; al profesor Jaime por cultivar mi interés en la matemática, y a los muchos profesores que fueron importante en mi formación. Finalmente agradezco a mis compañeros de universidad por su fraternidad tanto en lo académico como en lo no tanto.



*A mi familia y amigos.*



## Índice general

<i>Agradecimientos</i> . . . . .	VII
1.. <i>Introducción</i> . . . . .	3
1.1. Resumen de los principales resultados obtenidos . . . . .	10
2.. <i>Preliminares</i> . . . . .	14
2.1. Notación y definiciones . . . . .	14
2.2. Resultados Preliminares . . . . .	18
3.. <i>Marco Teórico</i> . . . . .	22
3.1. Formulación Débil . . . . .	22
3.1.1. Propiedades de estabilidad . . . . .	23
3.1.2. Propiedades de coercividad y condición Inf-Sup . . . . .	25
3.1.3. Existencia y unicidad de solución . . . . .	25
3.2. Problema Discreto . . . . .	28
3.2.1. Propiedades de estabilidad discretas . . . . .	32
3.2.2. Propiedades de coercividad discretas . . . . .	39
3.2.3. Existencia de solución del problema discreto . . . . .	40
3.3. Estimación de Error . . . . .	50
4.. <i>Implementación Numérica</i> . . . . .	61
4.0.1. Algoritmos . . . . .	61
4.1. Esquemas Estabilizados . . . . .	66
4.1.1. Esquemas estabilizados para las ecuaciones de Navier - Stokes . . . . .	67
4.1.2. Esquemas estabilizados para la ecuación de Advección-Difusión . . . . .	68
4.2. Ejemplos numéricos . . . . .	69

4.2.1. Ejemplos con condiciones de frontera Dirichlet . . . . .	72
4.2.2. Ejemplos adicionales . . . . .	93
5.. <i>Conclusiones y trabajo futuro</i> . . . . .	105

## Resumen

En este trabajo se propone una familia de Métodos de Elementos Finitos Mixtos estabilizados para la simulación numérica de un problema generalizado de Boussinesq en dos y tres dimensiones, el cual describe el movimiento de un fluido incompresible sujeto a una fuente de calor, lo que resulta en un problema de Navier-Stokes acoplado con una ecuación de Advección-Difusión. El método utiliza elementos continuos de orden 1 para la velocidad, elementos discontinuos de grado 0 para la presión y elementos continuos de grado 1 para la temperatura. Mediante un post-proceso, es posible obtener un campo de velocidad a divergencia exactamente nula, a través del uso de funciones de Raviart–Thomas, para ser utilizado como campo convectivo en las ecuaciones del problema. El esquema propuesto está basado en métodos estabilizados de bajo orden que permiten el uso de espacios elementos finitos de bajo costo computacional y que son construidos para asegurar una mayor estabilidad en presencia de capas límites. Estas estabilizaciones pueden corresponder a cualquier método estabilizado sujeto a ciertas condiciones y restricciones que se proveen. Se prueba la existencia y estabilidad de soluciones para las soluciones discretas y se obtienen estimaciones de error dependientes del tamaño de la malla para soluciones suficientemente pequeñas y suaves. Finalmente, se realizan pruebas numéricas considerando métodos estabilizados adecuados existentes en la literatura, para validar los análisis y el desempeño de las estimaciones de error, los cuales muestran una buena estabilidad incluso en casos límites.

## Abstract

In this work, a family of Stabilized Finite Element Methods is proposed for the numerical simulation of a generalized Boussinesq problem in two and three dimensions, which describes the motion of an incompressible flow under a heat source, which results in a

Navier-Stokes problem coupled with an Advection-Diffusion Equation. The method use order 1 continuous elements for the velocity, order 0 discontinuous elements for the pressure and order 1 continuous elements for the temperature. Through a post-process, is possible to obtain an exactly divergence-free velocity field through the use of Raviart–Thomas functions, which is used as the advective field in the equations of the problem. The proposed scheme is based on low order stabilized methods which allow the utilization of finite element spaces with a low computational cost which are built to ensure a higher stability when boundary layers appear. This stabilization terms can be taken from any stabilized method satisfying some conditions and restrictions provided in this work. Existence and stability for the discrete solutions are proven and error estimations depending on the mesh size are obtained for small and smooth enough solutions. Finally, numerical tests are done considering suitable stabilized methods from the literature to validate the analysis and the performance of the error estimations, which show a good stability even in limit cases.

# 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se estudiará el problema estacionario para las ecuaciones gobernantes acopladas del flujo de calor y de masa de un fluido viscoso incompresible y no-isotermal, utilizando el modelamiento de Boussinesq Generalizado, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\nu(\theta)\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{g}\theta & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\kappa(\theta)\nabla\theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma, \\ \theta = \theta_D & \text{en } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.0.1)$$

donde:

- $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d = 2$  o  $3$  y con frontera  $\Gamma$ ;
- $\mathbf{u}$ ,  $p$  y  $\theta$  son la velocidad, presión y temperatura del fluido modelado, respectivamente;
- $\nu$  y  $\kappa$  son la viscosidad y la conductividad térmica, respectivamente, ambas dependientes de la temperatura;
- $\mathbf{g}$  es una fuerza externa por unidad de masa dada, usualmente actuando en dirección opuesta a la gravedad;
- y  $\theta_D$  es una temperatura no nula dada en la frontera del dominio.

Estas ecuaciones modelan el comportamiento de un fluido sometido a una fuente de calor, lo cual se traduce en un acoplamiento de una ecuación de Navier-Stokes con una de Advección-Difusión. Estas ecuaciones son consecuencias directas de aplicar las leyes de conservación de la masa, conservación del momento lineal (Segunda Ley de Newton) y la conservación de la energía (Primera Ley de la Termodinámica). Este modelo fue propuesto en 1903 por

---

Joseph Boussinesq [12], y una deducción detallada de éste puede encontrarse en [10].

Este modelo tiene diversas aplicaciones en la industria, tales como sistemas de ventilación, intercambiadores de calor, reactores químicos, enfriamiento de equipos electrónicos, enfriamiento de reactores nucleares; así como también aplicaciones en geofísica y oceanografía, tales como modelamiento de flujos oceánicos, predicción del clima, entre otros. Esto ha motivado un creciente estudio de métodos numéricos para aproximar soluciones de estas ecuaciones durante los últimos años (ver [1, 10, 11, 20–23, 28, 29, 39, 40, 44–47, 49]).

La versión clásica de las ecuaciones de Boussinesq corresponde al caso donde  $\nu$  y  $\kappa$  son constantes positivas, la cual ha sido muy estudiada (ver [1, 10, 44, 45, 49]). Para este modelo se han obtenido resultados de existencia utilizando Teoría del Grado Topológico en [10], y utilizando una formulación variacional mixta-dual en dos dimensiones en [28, 29].

Ahora, existen casos en donde para ciertos fluidos no es posible ignorar la variación de la viscosidad y la conductividad térmica con respecto a la temperatura. Es por ello, que el estudio de (1.0.1) se hace necesario. Este modelo es una generalización; ahora, la viscosidad y la conductividad térmica del fluido son dependientes de la temperatura, es decir,  $\nu = \nu(\theta)$  y  $\kappa = \kappa(\theta)$ .

En [39] se obtienen resultados de existencia de solución débil y fuerte, de unicidad y regularidad bajo ciertas condiciones. Allí, un método de Galerkin combinado con argumentos de punto fijo es utilizado para estudiar dichos resultados. Inspirado en el trabajo previo en [46] los autores proponen un método de elementos finitos mixtos basados en: un espacio de aproximación para el campo de velocidades BDM (Brezzi-Douglas-Marini) de orden  $k$ , que corresponde a un espacio de elementos finitos conformes y que entrega un campo de velocidades solución a divergencia nula; un espacio de elementos discontinuos de orden  $k - 1$  para aproximar las presiones; y elementos continuos a trozos de orden  $k$  para la temperatura. En dicha referencia, se proveen resultados de existencia y unicidad, bajo los usuales supuestos de datos pequeños, y convergencia óptima del esquema de elementos finitos propuesto.

Más recientemente, nuevos métodos para la resolución numérica de (1.0.1) han sido propuestos en [21–23, 47]. En [47], se propone un método conforme de elementos finitos para la aproximación de la solución de (1.0.1). Allí, se considera una formulación estándar para las

---

ecuaciones relacionadas con el flujo del fluido, y un esquema primal-mixto para la ecuación de advección-difusión. Esto último resulta en la introducción de la derivada normal de la temperatura como incógnita. Allí, se propone cualquier par de elementos inf-sup estables para aproximar la velocidad y la presión, polinomios de orden  $k + 1$  a trozos continuos para la temperatura y polinomios a trozos de orden  $k$  para la incógnita de frontera. En [22], el método anterior es extendido, donde un enfoque aumentado es utilizado para las ecuaciones relacionadas con el flujo del fluido y se mantiene el esquema mixto-primal para la ecuación que modela la temperatura. Esto resulta en la introducción de un tensor de pseudostress dependiente de la presión y de la velocidad y en la eliminación de la presión. Allí, para aproximar las incógnitas son usados espacios de Raviart–Thomas de orden  $k$  para el tensor de pseudostress, polinomios de orden  $k + 1$  a trozos continuos para la velocidad y la temperatura, y polinomios de orden  $k$  a trozos para la incógnita de frontera. Luego, la presión es recuperada a través de un post-proceso. En [21], el modelo anterior es reformulado, usándose un esquema mixto para la ecuación del calor, lo que resulta en la introducción de un vector auxiliar dependiente de la temperatura, su gradiente y la velocidad, y que no necesita incógnitas relacionadas con la frontera. El esquema aumentado para las ecuaciones de fluido es mantenido. En este modelo, espacios de Raviart–Thomas de orden  $k$  son utilizados para aproximar las incógnitas auxiliares, y polinomios de orden  $k + 1$  a trozos son utilizados para aproximar la velocidad y la temperatura. En [23], se muestra que los dos métodos anteriormente expuestos pueden ser reescritos como ecuaciones de operador de punto fijo. Luego, a partir de argumentos clásicos de análisis funcional lineal y no lineal se concluye que ellos están bien puestos.

A pesar de que en los múltiples trabajos mencionados se demuestra convergencia óptima y estabilidad de las soluciones, a partir de los espacios de aproximaciones usados es fácil ver que el costo computacional es alto. Es por ello, que en este trabajo se propone un método de bajo orden. Ahora, la necesidad del uso de espacios de orden relativamente alto es heredada principalmente del problema de Stokes y la conocida condición Inf-Sup.

La solución numérica de sistemas basados en la ecuación de Stokes presentan una gran dificultad, específicamente la necesidad de una condición de compatibilidad para los espacios discretos utilizados para aproximar la velocidad y la presión. Esta es la condición Inf-Sup discreta ([18, 33]), también conocida como la condición de Babuska–Brezzi. Esto implica

restricciones en lo que respecta a la implementación, ya que pares de espacios deseables no cumplen dicha condición. Por un lado, espacios de elementos de igual orden polinomial no satisfacen la condición Inf-Sup discreta. Por otro lado, el par de espacios más simple posible, específicamente, polinomios lineales a trozos continuos para la velocidad y polinomios constantes a trozos para la presión, no satisfacen esta condición tampoco. Variadas soluciones se han propuesto para superar esta restricción, comenzando con las propuestas en [17] y [37], donde términos dependientes de la malla son agregados a la formulación, los cuales no afectan la convergencia y permiten hacer estables pares de espacios que no lo son. Esta nueva formulación recibió el nombre de Método de Elementos Finitos Estabilizados. A principio de la década del 2000, una nueva rama de métodos de elementos finitos estabilizados fue introducida en [8, 26] para la solución numérica de problemas mixtos, llamados *Local Projection Stabilization Methods*(LPS). A diferencia de otros métodos estabilizados, en los métodos LPS los términos estabilizadores no dependen de residuos, en vez de eso, son construidos a partir de fluctuaciones entre las variables y su proyección en algún espacio de dimensión finita determinado. En [13, 14], el método LPS es extendido para ser aplicado a la ecuación de Oseen. En [4, 32], se estableció una relación entre los métodos LPS y el enriquecimiento de los espacios polinomiales con soluciones de problemas locales en cada elemento. Esto resultó en los llamados *Residual Local Projection stabilized methods*(RELPS), donde en la construcción de los términos estabilizadores los residuos son reintroducidos, pero ahora a través de operadores de fluctuación. De esta manera, algunos de los términos extra agregados en un método LPS pueden ser vistos como consecuencia de un proceso de enriquecimiento. Una versión simplificada del método RELPS enfocada en soluciones de bajo orden es dada en [6], y versiones extendidas del método RELPS para las ecuaciones de Oseen y Navier-Stokes son propuestas en [5] y [3], respectivamente. Éste último trabajo se destaca por proponer un método que estabiliza bajos coeficientes de difusión y por ser fácilmente postprocesable, para de esta manera obtener una solución con un campo de velocidades a divergencia nula. Esta es una característica que se buscará aprovechar en el presente trabajo, dado que en el desarrollo de la teoría muchas condiciones e hipótesis se relajan cuando se trabaja con un campo de velocidades a divergencia nula, lo que se suma al hecho de que se recupera dicha propiedad que se tiene para el problema físico.

Por otro lado, es sabido que el método de Galerkin estándar de elementos finitos usualmente

---

produce aproximaciones imprecisas para la soluciones de problemas de convección-difusión. Esto ocurre dado que este método pierde estabilidad y no aproxima de buena manera las soluciones dentro de capas límites. Dicho fenómeno ocurre cuando el término convectivo es dominante (en ecuaciones de advección-reacción-difusión también se tiene la presencia de capas límites cuando el término reactivo es dominante). Una posible solución para este problema es la adición de algún término de difusión numérica de orden  $\mathcal{O}(h)$  a la formulación variacional, con el fin de estabilizar el método de elementos finitos. Dentro de este enfoque se encuentran métodos basados en residuos, tales como: *Streamline Upwind Petrov-Galerkin Method*, o SUPG [36], *Galerkin Least Squares Method*, o GLS [31], *Unusual Stabilized Finite Element Method*, o USFEM [30] y *Residual Free Bubble Approximation*, o RFB [16]. Por otro lado, una alternativa a los métodos estabilizados basados en residuos son métodos que buscan la adición de términos simétricos a la formulación variacional de la ecuación de advección-difusión. Entre estos se encuentran el método *Continuous Interior Penalty*, o CIP [27] y *Edge Stabilization method* [19].

En este trabajo se propone un método de elementos finitos para (1.0.1) que acople métodos estabilizados para la ecuaciones de Navier-Stokes que estabilicen la aparición de capas límites y permitan bajo orden en las aproximaciones de la velocidad y la presión, con métodos estabilizados para la ecuación de Advección-Difusión que estabilicen también la aparición de capas límites. Dada la no linealidad del problema, un algoritmo de punto fijo es implementado, donde un campo de velocidad a divergencia nula es utilizado como campo convectivo, el cual es obtenido a partir de un post-proceso de bajo coste computacional incrustado en cada iteración. Esto permite además entregar en la solución final un campo de velocidad a divergencia nula que recupera de mejor manera características cualitativas de la solución física real.

A continuación se detallará la estructura del presente trabajo, adelantando los resultados más importantes obtenidos, los cuales además son enunciados de manera resumida en la siguiente sección.

En la Sección 1.1 se detallan de manera concisa los principales resultados obtenidos en este trabajo. En el Capítulo 2 se introduce la notación a utilizar a lo largo del presente escrito, y además se presentan algunos resultados preliminares que son utilizados con frecuencia

en este trabajo.

En el Capítulo 3 se hace el estudio teórico del método propuesto para resolver (1.0.1). Para ello, primero en la Sección 3.1 se estudia la formulación débil de (1.0.1), dada por (3.1.1). En esta sección se muestra que las formas que aparecen en (3.1.1) cumplen propiedades habituales de estabilidad y coercividad y la condición inf-sup. A partir de esto se exponen los resultados de [39] y [46] de existencia (Teorema 13) y unicidad para soluciones y datos pequeños (Teorema 14). Este último resultado es se obtiene asumiendo mayor regularidad para las soluciones  $\mathbf{u}$  y  $\theta$  y que sus normas y la norma de  $\mathbf{g}$  están acotadas por un valor suficientemente pequeño. Cabe destacar que esta restricción es usual para problemas relacionados a la ecuación de Navier-Stokes, y es consecuencia de su no-linealidad. Además, se asume la existencia de una extensión de  $\theta_D$  lo suficientemente pequeña (en norma  $L^3$ ), lo cual en la implementación computacional plantea algunas restricciones a la malla para que sea posible construir una extensión que cumpla dicha suposición.

En la Sección 3.2 se propone un problema discreto a resolver para aproximar la solución de (3.1.1). El problema discreto a resolver viene dado por (3.2.6). Este esquema discreto es el resultado de tomar sub-espacios de dimensión finita de los espacios especificados en (3.1.1) para las funciones test y las soluciones del problema. En este trabajo, se utilizan aproximaciones de elementos finitos  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1$ ; es decir, la velocidad y temperatura son aproximadas por funciones continuas lineales en cada elemento, y la presión es aproximada por funciones discontinuas constantes en cada elemento. Además, se agregan términos estabilizadores y se utiliza un campo a divergencia exactamente nula como campo convectivo en las ecuaciones de Navier-Stokes y de Advección-Difusión que forman el problema.

El primer término estabilizador añadido es un término de la forma  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket q \rrbracket$ , el cual estabiliza los saltos de presión para la ecuación de Navier-Stokes. El método asociado es introducido en [6], y permite trabajar con elementos de bajo orden evitando problemas de estabilidad inf-sup. Esto permite la utilización de aproximaciones de elementos finitos  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0$  para la velocidad y la presión.

Además, se agregan términos estabilizadores genéricos  $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $S_\theta(\theta, \psi)$  para las ecuaciones de Navier-Stokes y de Advección-Difusión, respectivamente. Estos términos están pensados para ser tomados de métodos estabilizados que existan en la literatura que per-

---

mitan estabilizar la aparición de capas límites. En la Sección 3.2 se especifican propiedades necesarias para estos términos que son exigidas por la teoría desarrollada.

El campo a divergencia exactamente nula es el dado en (3.2.7), y está basado en el campo propuesto en [4, Ecuación 3.56]. Este es un campo no conforme construido a partir de las funciones base de más bajo orden de Raviart–Thomas, y que en la implementación numérica del método se traduce en un post-proceso de la solución numérica obtenida. En el Teorema 15 se demuestra que dicho campo cumple con ser a divergencia nula en todo el dominio. La utilización de un campo de divergencia nula, además de aproximarse más a la realidad del proceso físico asociado, es crucial para poder facilitar numerosos cálculos a través de este trabajo y relajar propiedades e hipótesis en los resultados obtenidos, especialmente las hipótesis que suelen aparecer y se heredarían del estudio de la ecuación de Advección-Difusión. Por lo tanto, la utilización del campo dado en (3.2.7) nos permite aprovechar estas ventajas a través de un postproceso con un muy bajo coste computacional, conservando los grados de libertad de la aproximación conforme.

Para el problema discreto (3.2.6), se demuestran propiedades de estabilidad y coercividad necesarias de las formas que aparecen en dicha ecuación, para lo cual se definen normas discretas dependientes de la malla. Con esto, se demuestra la existencia de soluciones del problema (3.2.6) (Teorema 23). Para obtener este resultado, el problema (3.2.6) es escrito como un esquema de punto fijo, luego la existencia de solución se obtiene como resultado del Teorema de Punto Fijo de Brower. Este mismo esquema utilizado en la demostración es luego utilizado en la implementación numérica para resolver el sistema de ecuaciones no lineal asociado a (3.2.6). Para poder ocupar el Teorema de Punto Fijo de Brower, es necesario que la normas de los datos estén acotadas por valor suficientemente pequeño.

A continuación, se obtienen resultados para la estimación de error de la solución de (3.2.6). En el Teorema 24 se prueba que para soluciones reales suficientemente suaves y suficientemente pequeñas y datos suficientemente pequeños, el método converge con orden  $\mathcal{O}(h)$ .

Luego, en el Capítulo 4 se detalla la implementación numérica del método presentado. Se presentan esquemas estabilizados existentes a ocupar, demostrando que cumplan las propiedades exigidas en 3.2. Luego, se especifican las soluciones analíticas de los ejemplos numéricos a realizar para probar la convergencia del método. Finalmente, se detallan los

algoritmos numéricos a utilizar y se muestran los resultados las pruebas numéricas realizadas.

Finalmente, en el Capítulo 5 se resumen los principales resultados obtenidos y se enuncian posibles trabajos futuros y mejoras para el método acá expuesto.

### 1.1. Resumen de los principales resultados obtenidos

En esta sección se expondrán los resultados más importantes concernientes a este trabajo. La notación a utilizar es la introducida en la Sección 2.1.

Los resultados a exponer son concernientes a la resolución del problema (1.0.1), a partir del cual es obtenida la siguiente formulación variacional:

Hallar  $(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{v}, p) &= (\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}, q) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ \mathbf{a}(\theta; \theta, \psi) + \mathbf{c}(\mathbf{u}; \theta, \psi) &= 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \\ \theta &= \theta_D \quad \text{en } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde  $\theta_D \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \nu(\theta) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, & \mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi) &= \int_\Omega \kappa(\varphi) \nabla \theta \cdot \nabla \psi, & \mathbf{c}(\mathbf{w}; \theta, \psi) &= \int_\Omega (\mathbf{w} \cdot \nabla \theta) \psi, \\ \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) &= \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

y donde las funciones  $\nu(\cdot)$  y  $\kappa(\cdot)$  cumplen con

$$0 < \nu_0 \leq \nu(\theta) \leq \nu_1, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega),$$

$$0 < \kappa_0 \leq \kappa(\theta) \leq \kappa_1, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega),$$

$$|\nu(\theta_1) - \nu(\theta_2)| \leq C_{\nu, lip} |\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in H^1(\Omega),$$

$$|\kappa(\theta_1) - \kappa(\theta_2)| \leq C_{\kappa, lip} |\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in H^1(\Omega).$$

Para la formulación débil del problema anterior, se tiene el siguiente resultado de existencia de soluciones (ver [39, Teorema 2.1]).

**Teorema 1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  o  $3$ ), con frontera Lipschitz continua y poligonal  $\Gamma$ ; sean  $\nu, \kappa > 0$ ,  $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$  y  $\theta_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Entonces existe una solución débil de (1.0.1).*

De igual forma, se tiene el siguiente resultado de unicidad para soluciones pequeñas (ver [46, Teorema 2.3]).

**Teorema 2.** *Sea  $(\mathbf{u}, \theta) \in [\mathbf{X} \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)] \times W^{1,\infty}(\Omega)$  una solución del problema (3.1.22), y supóngase que existe  $M > 0$  suficientemente pequeño tal que*

$$\text{máx}\{\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}, \|\theta\|_{W^{1,\infty}}\} \leq M.$$

*Entonces, la solución es única (Una condición para  $M$  es entregada en (3.1.26)).*

Luego, haciendo una elección usual de espacios de elementos finitos, del mayor bajo orden posible, es que se propone un esquema de elementos finitos estabilizados que se lee como sigue: Hallar  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) \\ \quad - (\theta_h \mathbf{g}, \mathbf{v}_h)_\Omega + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0, \\ \mathbf{a}(\theta_h; \theta_h, \psi_h) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \theta_h, \psi_h) + S_\theta(\theta_h, \psi_h) = 0, \\ \theta_h = i_h(\theta_D) \text{ en } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h^0$ , donde,

- $\nu(\cdot)$  y  $\kappa(\cdot)$  cumplen (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) y (3.1.6);
- $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{h,1}$ , donde  $\theta_{h,0} \in H_0^1(\Omega)$  y  $\theta_{h,1}|_{\Gamma 0} = i_h(\theta_D)$ ;
- Los términos dados por las formas  $S_u$  y  $S_\theta$  son términos estabilizadores adecuados

cuyas propiedades son especificadas en la Sección 3.2;

- El término  $\ell$  está dado por

$$\ell(\mathbf{u}_h, p_h) := \mathbf{u}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \partial K} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \boldsymbol{\varphi}_F,$$

donde  $\forall F \in \mathcal{E}_I \cap \partial K$

$$\boldsymbol{\varphi}_F(x)|_K := \pm \frac{|F|}{d|K|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F)$$

es una función de base de Raviart–Thomas.

El esquema anterior, además de ser un esquema estabilizado de bajo orden, es que tiene la propiedad adicional de que el campo dado por  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , el cual es un campo no conforme, es un campo solenoidal, es decir,

$$\operatorname{div}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h)(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Ahora, para esta formulación, se tiene el siguiente resultado de existencia:

**Teorema 3.** *Si se cumple que  $\tilde{C} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \leq \frac{1}{2}$ , entonces existe  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$  solución de (1.1.1).*

Este resultado de existencia es probado utilizando un argumento de punto fijo, el cual es utilizado para implementar computacionalmente el esquema numérico propuesto.

Ahora, para la solución de este esquema numérico se tiene el siguiente resultado respecto a la estimación de error y convergencia, donde se prueba que la solución del método converge a la solución del problema débil con orden  $\mathcal{O}(h)$ :

**Teorema 4.** *Sea  $(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  solución del problema (3.1.1) y  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0(\Omega) \times Q_h(\Omega) \times V_h(\Omega)$  solución de (3.2.6). Supóngase que*

$$\max\{\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)}, \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\} \leq M,$$

con  $M$  suficientemente pequeño (una expresión más específica para  $M$  se puede encontrar en (3.3.29)).

---

Además supóngase que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega)$  y  $\theta \in H^2(\Omega)$ . Entonces existe  $C > 0$  tal que

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\mathcal{F}_h} + \|\theta - \theta_h\|_h \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) + \|\theta\|_{2,\Omega}.$$

Este resultado entrega la convergencia para la solución que entrega directamente el esquema numérico, es decir, que no incluye un campo de velocidades a divergencia nula. Ahora, si se considera como la solución final entregada por el método la solución con velocidad a divergencia nula dada por el campo no conforme  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , se demuestra en este trabajo que la tasa de convergencia no es afectada.

## 2. PRELIMINARES

### 2.1. Notación y definiciones

Sea  $D$  un subconjunto abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , con frontera poligonal. Para todos los espacios de funciones sobre  $D$  a utilizar, se denotará texto en negrita para su contraparte vectorial, y se usará un bajo acento para la contraparte matricial; por ejemplo,  $\mathbf{H}^1(D) = [H^1(D)]^d$  y  $\mathbf{L}^2(D) = L^2(D)^{d \times d}$ .

Se denotará como  $\mathcal{C}(D)$  el espacio de funciones continuas sobre  $D$ . Se utilizará la notación habitual para los espacios de funciones p-integrables sobre  $D$ ,

$$L^p(D) = \left\{ f : \int_D |f|^p \leq \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{y} \quad L^\infty(D) = \left\{ f : \max_D \{|f|\} \leq \infty \right\},$$

dotados de la norma

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left[ \int_D |f|^p \right]^{1/p} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^\infty(D)} = \max_D \{|f|\},$$

respectivamente. Se denotará por  $(\cdot, \cdot)_D$  al producto interno usual en  $L^2(D)$  (así también como para  $\mathbf{L}^2(D)$  y  $\mathbf{L}^2(D)$ ). Se denotará como  $L_0^2(D)$  al espacio de funciones  $L^2(D)$  con media nula, es decir,

$$L_0^2(\mathcal{D}) = \left\{ f \in L^2(\mathcal{D}) : \int_{\mathcal{D}} f = 0 \right\}.$$

También se utiliza la siguiente notación estándar para los espacios de Sobolev,

$$W^{k,p} = \{f \in L^p(D) : D^\alpha f \in L^p(D), \forall \alpha \in \mathbb{N}^k : |\alpha| \leq k\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

dotados con la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(D)} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(D)}^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{y} \quad \|f\|_{W^{k,\infty}(D)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(D)}.$$

Cuando  $p = 2$ , estos espacios pueden ser dotados de una estructura de espacios de Hilbert. En dicho caso, se utiliza la siguiente notación estándar:

$$H^k(D) := W^{k,2}(D)$$

Para estos espacios, se preferirá denotar como  $\|\cdot\|_{k,D}$  la norma respectiva (tanto para el caso escalar como para el caso vectorial). Notar también que si  $k = 0$ , entonces  $H^0(D) = L^2(D)$ . Para este caso, se preferirá también denotar la norma del espacio como  $\|\cdot\|_{0,D}$ .

Se define también para estos espacios una seminorma dada por

$$|f|_{k,D} = \left[ \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{0,D}^2 \right]^{1/2}.$$

El conjunto de funciones en  $H^1(D)$  con traza (*tr*) nula se denotarán como

$$H_0^1(D) = \{f \in H^1(D) : tr(f) = 0\}.$$

Además, se utilizarán los siguientes espacios de Hilbert vectoriales

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\text{div}; D) &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(D) : \nabla \cdot \mathbf{w} \in L^2(D)\}, \\ \mathbf{H}_0(\text{div}; D) &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\text{div}; D) : \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma\}, \\ \mathbf{H}_0(\text{div}^0; D) &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\text{div}; D) : \nabla \cdot \mathbf{w} \equiv 0 \text{ en } D\}. \end{aligned}$$

Estos espacios son dotados con la norma

$$\|\mathbf{w}\|_{\text{div},D}^2 = \|\mathbf{w}\|_{0,D}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{w}\|_{0,D}^2.$$

A continuación se introduce la notación relacionada a la nomenclatura de elementos finitos. Sea  $\Omega$  un dominio abierto y acotado en  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), con frontera  $\Gamma$  Lipschitz y poligonal. Se denotará como  $\mathbf{n}$  al vector normal unitario exterior a  $\Gamma$ . Sea  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia de particiones regulares de  $\bar{\Omega}$ , conformada por elementos  $K$ , triangulares si  $d = 2$ , tetraédricos si  $d = 3$ . Para una partición (o malla)  $\mathcal{T}_h$  fija se tiene:

- $\mathcal{E}$  denota el conjunto de ejes(2D)/caras(2D) de la partición,  $\mathcal{E}_I \subset \mathcal{E}$  denota el conjunto de ejes(2D)/caras(2D) interiores de la partición;
- $\lambda_i$  denota la función base lineal a trozos asociada al vértice  $\mathbf{x}_n$  de la partición, caracterizada por la condición  $\lambda_n(\mathbf{x}_m) = \delta_{nm}$ , donde  $\delta_{nm}$  denota el delta de Kronecker;
- $h$  denota el tamaño de la partición, dado por  $h = \max\{diam(K), K \in \mathcal{T}_h\}$ .

Para un elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene

- $\partial K$  denota la frontera de  $K$  y  $\mathcal{E}_K$  al conjunto de ejes(2D)/caras(3D) que conforman  $\partial K$ ;
- $\mathbb{P}^l(K)$  denota a los polinomios de grado igual o menor que  $l$  en  $K$ ;
- $\Omega_K$  denota al conjunto de elementos de  $\mathcal{T}_h$  que comparten al menos un nodo con  $K$  (también conocido como el “*patch*” de  $K$ );
- $|K|$  denota el área(2D)/volumen(3D) de  $K$ ,  $h_k = diam(K)$  denota el diámetro de  $K$ ,  $\mathbf{n}_F^K$  denota el vector normal unitario a un eje(2D)/cara(3D)  $F \subset \partial K$  exterior con respecto a  $K$  (ver Figuras 2.1 y 2.2).

Para un eje(2D)/cara(3D)  $F \in \mathcal{E}$  se tiene:

- $|F|$  denota el largo(2D)/área(3D) de  $F$ ,  $h_F = diam(F)$  denota el diámetro de  $F$ ;
- $\Omega_F$  denota el conjunto de elementos en  $\mathcal{T}_h$  cuyas fronteras contienen a  $F$  (también conocido como el “*patch*” de  $F$ );
- $\mathbf{t}_F^K$  denota al vector tangencial unitario al eje(2D)  $F$  en sentido anti-horario respecto a  $K$ , y a cualquier vector unitario contenido en el mismo plano que contiene a las cara(3D)  $F$  (ver Figura 2.1);

- $[[v]]$  denota el salto de  $v$  a través de  $F \in \mathcal{E}_{K^+} \cap \mathcal{E}_{K^-}$ , definido fijando un vector normal para cada  $F \in \mathcal{E}_I$ , basado en la Figura 2.3, como

$$[[v]] = v|_{K^+} - v|_{K^-}. \quad (2.1.1)$$

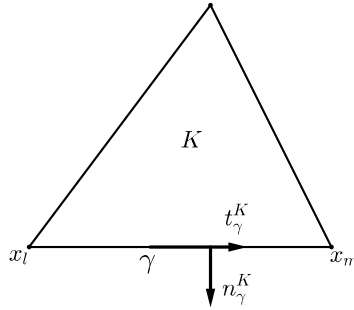


Fig. 2.1: Localización y orientación del vector tangente y del vector normal unitarios a un eje  $F$  en un elemento triangular  $K$ .

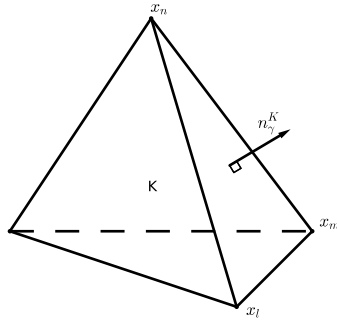


Fig. 2.2: Localización y orientación del vector normal unitario a una cara  $F$  en un elemento tetraédrico  $K$ .

A partir de las definiciones previas, se introducen los siguientes espacios de elementos finitos:

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h^0 &:= \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap H_0^1(\Omega), \\ Q_h &:= \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_K \in \mathbb{P}^0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

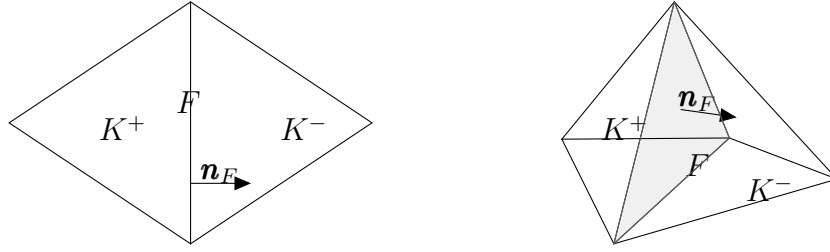


Fig. 2.3: Orientación de la normal fijada para  $F = \mathcal{E}_{K^+} \cap \mathcal{F}_{E^-}$ , escogiendo el vector normal  $\mathbf{n}_F$  que apunta de  $K^+$  a  $K^-$ .

También se definen el siguiente espacio quebrado (*broken spaces*)

$$H_0^1(\mathcal{T}_h) := \{v : v \in H_0^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

$C$  denotará una constante genérica, cuyo valor no depende del tamaño de la malla  $h$  y en general este valor no es el mismo en cada aparición de esta constante.

Se denotará como  $\Pi_h$ , a la proyección  $L^2$  ortogonal sobre el espacio de funciones constantes a trozos, la cual cumple con

$$(f - \Pi_h(f), q)_\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ con } q|_K \in \mathbb{P}^0(K) \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

y por lo tanto satisface

$$\Pi_h(f)|_K = \frac{1}{|K|} \int_K f, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.1.2)$$

Finalmente, el operador

$$i_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$$

denota al interpolador nodal de Lagrange, para los nodos dados por la triangulación  $\mathcal{T}_h$ , el cual satisface [15, Teorema 4.4.20], y a su extensión obvia a funciones vectoriales.

## 2.2. Resultados Preliminares

En esta sección se exponen algunos resultados ya existentes en la literatura, los cuales se ocuparan con frecuencia a lo largo de este trabajo.

Los siguientes teoremas proporcionan desigualdades locales para cualquier elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**Teorema 5** (Teorema de trazas locales). *Sea  $v \in H^1(K)$ . Entonces existe  $C > 0$  independiente de  $h_K$  tal que*

$$\|v\|_{0,\partial K} \leq C \left( h_K^{-1} \|v\|_{0,K}^2 + h_K |v|_{1,K}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2.1)$$

*Demostración.* Ver [15, Ecuación 10.3.8]. □

**Teorema 6** (Desigualdades inversas). *Sea  $l, m \in \mathbb{N}$  y  $v \in \mathbb{P}^m(K)$ . Entonces existe  $C > 0$  independiente de  $h_K$  tal que para todo  $0 \leq l \leq m$  se cumple*

$$|v|_{m,K} \leq C h_K^{l-m} |v|_{l,K}. \quad (2.2.2)$$

*Demostración.* Ver [52, Teorema 1.12] □

Los siguientes teoremas proporcionan estimaciones útiles del error asociado a la aplicación de operadores de interpolación y de proyecciones ortogonales.

**Teorema 7.** *Sea  $v \in H^2(K)$ . Entonces existe  $C > 0$  independiente de  $h$  tal que*

$$\|v - i_h(u)\|_{0,K} + h |v - i_h(u)|_{0,K} \leq C h^2 \|v\|_{2,K}. \quad (2.2.3)$$

*Demostración.* Ver [15, Teorema 4.4.20] □

**Teorema 8.** *Sea  $q \in H^1(\Omega)$  y  $\Pi_h$  definido en (2.1.2). Entonces existen  $C_1, C_2 > 0$  independientes de  $h$  tal que*

$$\|q - \Pi_h(q)\|_{0,\Omega} \leq C_1 h |q|_{1,\Omega}. \quad (2.2.4)$$

$$\left[ \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F \|\llbracket q - \Pi_h(q) \rrbracket\|_{0,F}^2 \right]^{1/2} \leq C_2 h |q|_{1,\Omega}. \quad (2.2.5)$$

*Demostración.* La desigualdad (2.2.4) es una consecuencia directa de la desigualdad óptima

de Poincaré [7, 43, 48]. Ahora, para demostrar (2.2.5) nótese que

$$\sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F \|[q - \Pi_h(q)]\|_{0,F}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|q - \Pi_h(q)\|_{0,\partial K}^2.$$

Utilizando (2.2.1) en la desigualdad anterior, permite concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F \|[q - \Pi_h(q)]\|_{0,F}^2 &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \left( h_K^{-1} \|q - \Pi_h(q)\|_{0,K}^2 + h_K |q - \Pi_h(q)|_{1,K}^2 \right) \\ &= C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \|q - \Pi_h(q)\|_{0,K}^2 + h_K^2 |q|_{1,K}^2 \right], \end{aligned}$$

luego, utilizando (2.2.4) se tiene

$$\sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F \|[q - \Pi_h(q)]\|_{0,F}^2 \leq C \left[ C_1^2 h^2 |q|_{1,\Omega}^2 + h^2 |q|_{1,\Omega}^2 \right].$$

Con esto se tiene el resultado. □

El siguiente teorema establece la desigualdad de Cauchy-Schwarz para una forma bilineal simétrica semidefinida positiva definida sobre un espacio vectorial real.

**Teorema 9.** *Sea  $X$  un espacio vectorial real y  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, simétrica y semidefinida positiva. Entonces se satisface*

$$B(x, y)^2 \leq B(x, x)B(y, y), \tag{2.2.6}$$

para todo  $x, y \in X$ .

*Demostración.* Si  $y = 0_X$ , (2.2.6) se satisface de manera trivial. Entonces, en adelante se considera  $y \neq 0_X$ .

Ahora,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  se tiene

$$0 \leq B(x + \lambda y, x + \lambda y) = B(x, x) + 2\lambda B(x, y) + \lambda^2 B(y, y).$$

---

Entonces, tomando  $\lambda = -B(x, y)/B(y, y)$ , se tiene

$$0 \leq B(x, x) - 2\frac{B(x, y)}{B(y, y)}B(x, y) + \frac{B(x, y)^2}{B(y, y)^2}B(y, y).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &\leq B(x, x)B(y, y) - 2B(x, y)^2 + B(x, y)^2 \\ &\leq B(x, x)B(y, y) - B(x, y)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, reordenando términos, se tiene (2.2.6). □

### 3. MARCO TEÓRICO

Como es usual para la mayoría de las EDPs, y sobre todo para los problemas basados en las ecuaciones de Navier-Stokes, no existe una manera analítica de obtener una solución de (1.0.1). Es por ello que es necesario realizar un análisis matemático teórico que permita la implementación de un método numérico. Para la resolución de EDPs elípticas, este análisis comienza con la obtención y estudio de una formulación débil del problema original. Esto es seguido de la obtención y estudio de un problema discretizado basado en esta última, el cual permite encontrar soluciones en espacios de dimensión finita que aproximan la solución de la formulación variacional. Finalmente, se hace un análisis de error respecto a estas soluciones discretas, lo cual permite obtener los órdenes de convergencia asociados a los métodos numéricos basados en el problema discreto mencionado.

#### 3.1. Formulación Débil

Como es usual en el estudio de EDPs elípticas, a partir de multiplicar las ecuaciones en (1.0.1) por funciones suficientemente suaves, de hacer integración por partes y de argumentos de densidad, se obtiene el siguiente problema variacional: *Hallar*  $(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{v}, p) &= (\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}, q) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ \mathbf{a}(\theta; \theta, \psi) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \theta, \psi) &= 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \\ \theta &= \theta_D \quad \text{en } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

donde  $\theta_D \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \cap \mathcal{C}(\Gamma)$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu(\theta) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, & \mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi) &= \int_{\Omega} \kappa(\varphi) \nabla \theta \cdot \nabla \psi, & \mathbf{c}(\mathbf{w}; \theta, \psi) &= \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \theta) \psi, \\ \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

y donde las funciones  $\nu(\cdot)$  y  $\kappa(\cdot)$  cumplen con

$$0 < \nu_0 \leq \nu(\theta) \leq \nu_1, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega), \text{ c.t.p en } \Omega, \tag{3.1.3}$$

$$0 < \kappa_0 \leq \kappa(\theta) \leq \kappa_1, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega), \text{ c.t.p en } \Omega, \tag{3.1.4}$$

$$|\nu(\theta_1) - \nu(\theta_2)| \leq C_{\nu, lip} |\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in H^1(\Omega), \text{ c.t.p en } \Omega, \tag{3.1.5}$$

$$|\kappa(\theta_1) - \kappa(\theta_2)| \leq C_{\kappa, lip} |\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in H^1(\Omega), \text{ c.t.p en } \Omega. \tag{3.1.6}$$

Para demostrar la existencia de soluciones de (3.1.1), es natural contar con resultados de estabilidad para todas las formas en (3.1.2), además de resultados de coercividad o estabilidad inf-sup según corresponda, y propiedades usuales de las formas convectivas  $\mathcal{C}$  y  $\mathbf{c}$  cuando consideran un campo convectivo a divergencia nula. Estos resultados son enunciados en las siguientes secciones.

### 3.1.1. Propiedades de estabilidad

A continuación, en el siguiente lema se demuestran propiedades para las formas que aparecen en (3.1.2).

**Lema 10.** *Sea  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$  y  $\theta, \psi, \varphi \in H^1(\Omega)$ . Entonces, se satisface*

$$|\mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \nu_1 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \tag{3.1.7}$$

$$|\mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi)| \leq \kappa_1 \|\theta\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}, \tag{3.1.8}$$

$$|\mathcal{B}(\mathbf{v}, q)| \leq d \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}, \tag{3.1.9}$$

$$|\mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_c \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \tag{3.1.10}$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{w}; \theta, \psi)| \leq C_c \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}, \quad (3.1.11)$$

$$|(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega| \leq C_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \quad (3.1.12)$$

donde  $C_c$  y  $C_c$  son constantes positivas. Además, para  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\psi, \theta_1, \theta_2 \in H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , se tiene

$$|\mathcal{A}(\theta_1; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{A}(\theta_2; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_{\nu, lip} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \quad (3.1.13)$$

$$|\mathbf{a}(\theta_1; \theta, \psi) - \mathbf{a}(\theta_2; \theta, \psi)| \leq C_{\kappa, lip} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}. \quad (3.1.14)$$

La demostración de estas propiedades se puede encontrar en [46] y se basa en la aplicación de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Hölder, la continuidad Lipschitz de  $\nu$  y  $\kappa$  en (3.1.5) y (3.1.6), y de [33, Lema IV.2.1]. Para más detalles, ver [33, Sección I.5.1] y [33, Sección IV.2.1].

Ahora, se introduce el kernel

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0\}.$$

Claramente,  $\mathbf{X} \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ . Entonces, integrando por partes se se tiene

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}, \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{w}; \psi, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}. \quad (3.1.16)$$

Además se pueden obtener las siguientes propiedades equivalentes a las dos anteriores

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathcal{C}(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}, \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{w}; \theta, \psi) = -\mathbf{c}(\mathbf{w}; \psi, \theta), \quad \forall \theta \in H^1(\Omega), \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}. \quad (3.1.18)$$

Estas propiedades pueden ser vistas en detalle en [33].

### 3.1.2. Propiedades de coercividad y condición Inf-Sup

A continuación, se presentan propiedades de coercividad para la forma  $\mathcal{A}$  y  $\mathbf{a}$  y la condición Inf-Sup para la forma  $\mathcal{B}$ .

**Lema 11.** *Existen constantes  $C_{co,\mathcal{A}}$  y  $C_{co,\mathbf{a}}$  positivas tales que para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  y  $\varphi \in H^1(\Omega)$  se cumple*

$$|\mathcal{A}(\varphi; \mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq C_{co,\mathcal{A}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad (3.1.19)$$

$$|\mathbf{a}(\varphi; \psi, \psi)| \geq C_{co,\mathbf{a}} \|\psi\|_{1,\Omega}^2. \quad (3.1.20)$$

Finalmente, la forma bilineal  $\mathcal{B}$  satisface la condición inf-sup,

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq C_{i-s} \|q\|_{0,\Omega}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (3.1.21)$$

donde  $C_{i-s} > 0$  sólo depende del dominio  $\Omega$ . Nuevamente, la demostración de estas propiedades puede encontrarse en [33, Sección I.5.1].

### 3.1.3. Existencia y unicidad de solución

En esta sección se exponen resultados concernientes a la existencia y unicidad de solución para el problema (3.1.1). Estos resultados son obtenidos en [46] y [39], basándose principalmente en argumentos de punto fijo para la demostración de existencia, y en la hipótesis de datos y soluciones pequeñas para la demostración de unicidad, utilizando las propiedades mostradas anteriormente en esta sección para las formas definidas en (3.1.2). Estos resultados trabajan sobre el problema resultante de restringir (3.1.1) al kernel  $\mathbf{X}$  en : *Hallar  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X} \times H^1(\Omega)$  tales que  $\theta|_{\Gamma} = \theta_D$  y:*

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\theta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_{\Omega} = 0, \\ \mathbf{a}(\theta; \theta, \psi) + \mathbf{c}(\mathbf{u}; \theta, \psi) = 0, \end{cases} \quad (3.1.22)$$

para todo  $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{X} \times H_0^1(\Omega)$ . La equivalencia entre ambos problemas se sigue de [33, Teorema IV.1.4], que se cumple cuando se satisfacen (3.1.19) y (3.1.21). Es decir, si

$(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  es una solución de (3.1.1), entonces  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  y  $(\mathbf{u}, \theta)$  es también una solución de (3.1.22). Del mismo modo, si  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X} \times H^1(\Omega)$  es una solución de (3.1.22), entonces existe una única presión  $p \in L_0^2(\Omega)$  tal que  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  es solución de (3.1.1).

El resultado de existencia del problema reducido (3.1.22) es estudiado con detalle en [39], donde la herramienta principal usada es la escritura de la temperatura  $\theta$  como

$$\theta = \theta_0 + \theta_1, \quad (3.1.23)$$

donde  $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$  y  $\theta_1 \in H^1(\Omega)$ , de modo que

$$\theta_1|_{\Gamma} = \theta_D.$$

En el siguiente Lema ([39, Lema 4.1]), se prueba que la extensión  $\theta_1$  puede ser escogida tan pequeña como se requiera.

**Lema 12.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  o  $3$ , con frontera Lipschitz continua. Si  $\theta_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ , entonces para todo  $\varepsilon$  positivo y  $1 \leq p \leq 6$  si  $d = 3$  o cualquier número finito  $p \geq 1$  si  $d = 2$ , existe una extensión  $\theta_1 \in H^1(\Omega)$  de  $\theta_D$  tales que  $\|\theta_1\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ .*

A partir de lo anterior, estimaciones a priori de las soluciones de (3.1.22) son obtenidas, las cuales vienen dadas por

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq 2 \frac{C \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}}{\nu_0 \kappa_0} \|\theta_1\|_{1,\Omega} (\kappa_0 + \kappa_1) \equiv F_1 \|\theta_1\|_{1,\Omega}, \\ \|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq \|\theta_1\|_{1,\Omega} \left( 1 + \frac{2\kappa_1}{\kappa_0} \right) \equiv F_2 \|\theta_1\|_{1,\Omega}. \end{cases} \quad (3.1.24)$$

A partir de estas estimaciones, se obtiene en [39, Teorema 2.1] el siguiente teorema:

**Teorema 13.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  o  $3$ ), con frontera Lipschitz continua; sean  $\nu$  y  $\kappa$  satisfaciendo 3.1.3 y 3.1.4 respectivamente,  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $\theta_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Entonces existe una solución débil de (1.0.1).*

La prueba de este Teorema usa como argumento principal la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Brower, donde la elección del conjunto acotado, convexo y cerrado para la aplicación de dicho teorema se basa en las estimaciones obtenidas en (3.1.24).

Es importante remarcar que las mismas líneas de demostración del teorema anterior son adaptadas para la posterior prueba de existencia de solución de la discretización del problema, como se verá en la Sección 3.2.

La unicidad de solución para soluciones pequeñas es obtenida también en [39, Sección 7], sin embargo son requeridas supuestos de suavidad adicionales para el dominio. En el siguiente teorema se muestra el resultado obtenido en [46, Teorema 2.3], donde dichos supuestos son relajados.

**Teorema 14.** *Sea  $(\mathbf{u}, \theta) \in [\mathbf{X} \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)] \times W^{1,\infty}(\Omega)$  una solución del problema (3.1.22), y supóngase que existe  $M > 0$  suficientemente pequeño tal que*

$$\text{máx}\{\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}, \|\theta\|_{W^{1,\infty}}\} \leq M. \quad (3.1.25)$$

*Entonces, la solución es única (Una condición para  $M$  es entregada en (3.1.26)).*

La prueba de este teorema es mostrada con detalle en [46], donde la condición (3.1.25) se obtiene con

$$M < \text{mín} \left\{ \frac{C_{co,\mathbf{a}}}{K + C_{\kappa,lip}}, \frac{C_{co,\mathcal{A}}}{C_c C_\infty + K} \right\}, \quad (3.1.26)$$

donde  $K := (C_g + C_{\nu,lip} + C_c C_\infty)/2$ .

### 3.2. Problema Discreto

Para la discretización de (3.1.1), se van a considerar términos estabilizadores abstractos que más adelante serán reemplazados a partir de esquemas estabilizados existentes en la literatura para las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de Advección-Difusión.

En primer lugar, para las ecuaciones de Navier-Stokes se considerarán los términos estabilizadores  $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket q \rrbracket$ , para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, q$  suficientemente suaves, los cuales estabilizan las ecuaciones asociadas a la conservación de momento y de masa, respectivamente, y donde

$$\tau_F = \frac{h_F}{12}. \quad (3.2.1)$$

En este caso,  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  corresponde al lado derecho de la ecuación de conservación de momento.

El término  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket q \rrbracket$  permite el uso de una aproximación discontinua constante a trozos para la presión, el cual es introducido en [6]. Más adelante, este término permitirá la obtención de un campo de velocidad de divergencia exactamente nula. La forma  $S_u$  debe ser bilineal, simétrica y semidefinida positiva, por lo cual como consecuencia del Teorema 9 ésta cumple para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  suficientemente suaves la siguiente propiedad del tipo Cauchy-Schwarz,

$$|S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq S_u(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}. \quad (3.2.2)$$

En segundo lugar, para la ecuación de Advección-Difusión se considera el término estabilizador  $S_\theta(\theta, \psi)$ , para todo  $\theta, \psi$  suficientemente suaves. La forma  $S_\theta$  debe ser bilineal, simétrica y semidefinida positiva, por lo cual como consecuencia del Teorema 9 ésta cumple para todo  $\theta, \psi$  suficientemente suaves la siguiente propiedad del tipo Cauchy-Schwarz,

$$|S_\theta(\theta, \psi)| \leq S_\theta(\theta, \theta)^{1/2} S_\theta(\psi, \psi)^{1/2}. \quad (3.2.3)$$

Además, estas formas deben cumplir para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  y  $\psi \in H^2(\Omega)$

$$S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq Ch^2 \|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}^2 \text{ y } S_\theta(\psi, \psi) \leq Ch^2 \|\psi\|_{2,\Omega}^2, \quad (3.2.4)$$

$$S_u(\mathbf{v} - i_h \mathbf{v}, \mathbf{v} - i_h \mathbf{v}) \leq Ch^2 \|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}^2 \text{ y } S_\theta(\psi - i_h \psi, \psi - i_h \psi) \leq Ch^2 \|\psi\|_{2,\Omega}^2. \quad (3.2.5)$$

Estas propiedades se cumplen en general para la mayoría de los métodos estabilizados existentes en la literatura para las ecuaciones de Navier-Stokes y de Advección-Difusión.

Considerando lo anterior, el problema discreto a tratar es: *Hallar*  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) \\ \quad - (\theta_h \mathbf{g}, \mathbf{v}_h)_\Omega + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0, \\ \mathbf{a}(\theta_h; \theta_h, \psi_h) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \theta_h, \psi_h) + S_\theta(\theta_h, \psi_h) = 0, \\ \theta_h = i_h(\theta_D) \text{ en } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h^0$ , donde,

- $\nu(\cdot)$  y  $\kappa(\cdot)$  cumplen (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) y (3.1.6),

■

$$\ell(\mathbf{u}_h, p_h) := \mathbf{u}_h + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \boldsymbol{\varphi}_F, \quad (3.2.7)$$

donde  $\forall F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K$

$$\boldsymbol{\varphi}_F(x)|_K := \pm \frac{|F|}{d|K|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) \quad (3.2.8)$$

es una función de base de Raviart–Thomas, donde  $\mathbf{x}_F$  corresponde al nodo opuesto al eje/cara  $F$  y los signos  $\pm$  son escogidos a partir de la normal fijada en cada eje/cara, como se muestra en la Figura 2.3 (+ si  $K$  corresponde a  $K^+$ , o  $-$  en caso contrario), y

- $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{h,1}$ , donde  $\theta_{h,0} \in H_0^1(\Omega)$  y  $\theta_{h,1}|_\Gamma = i_h(\theta_D)$ .

El operador  $\ell$  en el esquema numérico se traduce en un post-proceso de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, entregando un campo de velocidad a divergencia nula, lo cual se explicita en el siguiente teorema.

**Teorema 15.** *Sea  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$  solución de (3.2.6). Sea el operador  $\ell$  dado por (3.2.7).*

Entonces,

$$\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) = 0, \text{ en } \Omega.$$

*Demostración.* Tomando  $\mathbf{v}_h = 0 \in V_h^0$  en la primera ecuación de (3.2.6), se tiene

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0, \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Utilizando la definición de  $\mathcal{B}$  en (3.1.2) en la ecuación anterior, se tiene

$$(q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0. \quad (3.2.9)$$

Ahora, sea  $q \in Q_h$ . Entonces, considerando la definición de  $\ell$  en (3.2.7) se tiene

$$(\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h), q)_\Omega = (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q)_\Omega + \left( \nabla \cdot \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \boldsymbol{\varphi}_F, q \right)_\Omega.$$

Luego, reemplazando la ecuación (3.2.9) en lo anterior se obtiene

$$(\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h), q)_\Omega = - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_F, q \right)_K. \quad (3.2.10)$$

Ahora, nótese que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_F(\mathbf{x}) = \pm \frac{|F|}{d|K|} \nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) = \pm \frac{d|F|}{d|K|} = \pm \frac{|F|}{|K|}.$$

Entonces, utilizando lo anterior y que  $q|_K \in \mathbb{P}^0(K)$  en (3.2.10), desarrollando algebraicamente, considerando la Figura 2.3 y (2.1.1), se obtiene

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h), q)_\Omega &= - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \pm \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \frac{|F|}{|K|} q|_K |K| \\ &= - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \pm \tau_F |F| \llbracket p_h \rrbracket q|_K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}'_K} \tau_F |F| [\llbracket p_h \rrbracket q|_K - \llbracket p_h \rrbracket q|_{K'}] \\
&= - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q \rrbracket \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h^\perp$ . Ahora, se probará que  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h$ . En efecto, notar que  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|_K \in \mathbb{P}^1(K)$  para todo  $K \in \mathcal{T}_h$ . Por lo tanto,  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h)|_K \in \mathbb{P}^0(K)$ .

Además, utilizando el Teorema de la Divergencia, que  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^0$  y (3.2.8), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) &= \int_\Gamma \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n} \\
&= \int_\Gamma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} + \int_\Gamma \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \boldsymbol{\varphi}_F \cdot \mathbf{n} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \frac{|F|}{d|K|} \int_{\Gamma \cap \partial K} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Como  $F \in \mathcal{E}_I$ , entonces  $\mathbf{x}_F \in \Gamma$ . Luego, si  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , se tiene que  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) = 0.$$

Entonces,  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \cap Q_h^\perp$ , lo que implica que  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) = 0$  en  $\Omega$ .  $\square$

El campo  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  dado en (3.2.7) es no conforme en el sentido que no pertenece a  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . Sin embargo, sí pertenece a  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ , dado que es suma de una función continua lineal a trozos y una función perteneciente al espacio generado por las funciones base de Raviart–Thomas, las cuales permiten generar aproximaciones conformes del espacio  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ . De esta manera, la divergencia que se considera no es la restringida a cada elemento, sino la divergencia global.

Es importante remarcar que no es posible la obtención de un campo conforme continuo lineal a trozos a divergencia nula, a menos que polinomios de mayor grado sean utilizados para aproximar la velocidad. Por lo tanto, el método aquí utilizado es bastante ventajoso,

al permitir aprovechar los beneficios de la utilización de un campo a divergencia nula conservando los grados de libertad de la aproximación conforme, donde el precio a pagar es una modificación de coste computacional bajísimo del campo de velocidad.

Al igual que en la Sección 3.1, es necesario contar con resultados de estabilidad y coercividad para los términos que aparecen en (3.2.6), pero esta vez se consideran normas discretas dependientes de la malla que facilitan la obtención de dichos resultados, los cuales son necesarios para la demostración de existencia de solución y la posterior estimación de error.

### 3.2.1. Propiedades de estabilidad discretas

En esta sección se presentarán propiedades de estabilidad para los términos que aparecen en (3.2.6), para lo cual se definen las siguientes normas para todo  $(\mathbf{v}, q)$  y  $\theta$  suficientemente suaves:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}^2 &= \nu_0 |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket q \rrbracket\|_{0,F}^2, \\ \|\theta\|_{T(\mathcal{T})}^2 &= \kappa_0 \|\theta\|_{1,\Omega}^2 + S_\theta(\theta, \theta). \end{aligned}$$

Previo a obtener resultados de estabilidad con estas normas discretas, es necesario contar con el lema siguiente, donde se presentan más propiedades de  $\ell(\cdot)$ .

**Lema 16.** Sean  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_h$ ,  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $p \in Q_h$  y  $q \in [1, 6]$ . Entonces existen constantes  $\bar{C}_q$  y  $C$  positivas tal que

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{v}, p)|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq \bar{C} \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket p \rrbracket\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2.11)$$

$$\|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{L^q(\Omega)} \leq \bar{C}_q \|\mathbf{u}, p\|_{N(\mathcal{T})}. \quad (3.2.12)$$

*Demostración.* Para demostrar (3.2.11), se considera (3.2.7), la desigualdad  $(a + b)^2 \leq$

$2a^2 + 2b^2$  y la desigualdad de Yensen y el hecho que  $\tau_F = h_F/12$  para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{v}, p)|_{1,K}^2 &\leq 2 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \left\| \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \llbracket p \rrbracket \nabla \varphi_F \right\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq 2 \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (d+1) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F^2 \llbracket p \rrbracket^2 \|\nabla \varphi_F\|_{0,K}^2 \right). \end{aligned}$$

Como  $\nabla \varphi_F = \frac{|F|}{d|K|} I$ , donde  $I$  es la matriz identidad  $d \times d$ , se tiene,

$$\|\nabla \varphi_F\|_{0,K}^2 = \frac{|F|^2}{d^2 |K|^2} |K| \leq C_1 \frac{h_K^{2d-2}}{h_K^d} = C_1 h_F^{d-2}.$$

Entonces, a partir de lo anterior y del hecho que  $\tau_F = h_F/12$ , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{v}, p)|_{1,K}^2 &\leq 2 \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (d+1) C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F^2 \llbracket p \rrbracket^2 h_F^{d-2} \right) \\ &\leq 2 \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (d+1) \frac{C_1}{12} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \llbracket p \rrbracket^2 h_F^{d-1} \right). \end{aligned}$$

Además, como  $p|_K \in \mathbb{P}^0(K)$  para todo  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene

$$\int_F \llbracket p \rrbracket^2 \sim h_F^{d-1} \llbracket p \rrbracket^2. \quad (3.2.13)$$

Entonces, a partir de (3.2.13) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{v}, p)|_{1,K}^2 &\leq 2 \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (d+1) \frac{C_1}{12} C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket^2 \right) \\ &\leq \bar{C} \left( |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket p \rrbracket\|_{0,F}^2 \right), \end{aligned}$$

con lo que se tiene (3.2.11).

Ahora, para probar (3.2.12), se considera el siguiente resultado (ver [46, Ecuación 3.12])

válido para todo  $\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$

$$\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq C_q \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{w}_h\|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \|[\![\mathbf{w}_h]\!] \|_{0,F}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2.14)$$

donde  $q \in [1, \infty)$  si  $d = 2$  y  $q \in [1, 6]$  si  $d = 3$ .

Utilizando el resultado anterior y (3.2.11) se tiene

$$\begin{aligned} \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} &\leq C_q \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \ell(\mathbf{u}, p)\|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \|[\![\ell(\mathbf{u}, p)]\!] \|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_q \left( \bar{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[\![p]\!] \|_{0,F}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \|[\![\ell(\mathbf{u}, p)]\!] \|_{0,F}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.2.7) y el hecho que  $[\![\mathbf{u}]\!] = 0$  (dado que  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ ) para obtener

$$\begin{aligned} \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} &\leq C_q \left( \bar{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[\![p]\!] \|_{0,F}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \left\| \left[ \left[ \sum_{F' \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_{F'} [\![p]\!] \boldsymbol{\varphi}_{F'} \right] \right] \right\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Además, no es difícil ver que

$$\sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \left\| \left[ \left[ \sum_{F' \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_{F'} [\![p]\!] \boldsymbol{\varphi}_{F'} \right] \right] \right\|_{0,F}^2 \leq C \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \sum_{F' \in \mathcal{E}_I \cap \Omega_F} \tau_{F'}^2 [\![p]\!]^2 \|[\![\boldsymbol{\varphi}_{F'}]\!] \|_{0,F}^2.$$

Entonces, reemplazando en (3.2.15) el resultado anterior se tiene

$$\begin{aligned} \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} &\leq C_q \left( \bar{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket p \rrbracket\|_{0,F}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + C \sum_{F \in \mathcal{E}_I} h_F^{-1} \sum_{F' \in \mathcal{E}_I \cap \Omega_F} \tau_{F'}^2 \llbracket p \rrbracket^2 \|\llbracket \boldsymbol{\varphi}_{F'} \rrbracket\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Ahora, notar que utilizando la desigualdad de Yensen y la regularidad de la malla se tiene

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{F'}\|_{0,F}^2 = \left\| \sum_{i=1}^d \left[ \frac{|F|}{d|K|} \lambda_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_F) \right] \right\|_{0,F}^2 \leq C_2 \left\| \frac{h_F^{d-1} h_F}{h_F^d} \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i \right\|_{0,F}^2 \leq C_2 h_F^{d-1}.$$

Así, considerando la regularidad de la malla y lo anterior en (3.2.16), que  $\tau_F = h_F/12$ , y (3.2.13), se obtiene

$$\begin{aligned} \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} &\leq C_q \left( \bar{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket p \rrbracket\|_{0,F}^2 \right) + CC_2 C_R \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F^2 \llbracket p \rrbracket^2 h_F^{d-2} \right)^{1/2} \\ &\leq C_q \left( \bar{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|\llbracket p \rrbracket\|_{0,F}^2 \right) + CC_2 C_R \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \llbracket p \rrbracket^2 h_F^{d-1} \right)^{1/2} \\ &= C_q \tilde{C} \left( |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq \bar{C}_q \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})},$$

con  $\bar{C}_q = C_q \tilde{C} (\text{máx}\{1/\nu_0, 1\})^{1/2}$ . □

En el siguiente lema se proveen propiedades de continuidad para los términos que aparecen en (3.2.6).

**Lema 17.** *Existen constantes  $\tilde{C}_g$  y  $\tilde{C}_a$  positivas tales que para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h^0$ ,  $q \in Q_h$ ,  $\psi \in V_h$ ,  $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\varphi \in H^1(\Omega)$  y  $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$  se cumple*

$$|(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega| \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta\|_{T(\mathcal{T})}, \quad (3.2.17)$$

$$|\mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi) + S_\theta(\theta, \psi)| \leq \tilde{C}_a \|\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.2.18)$$

*Demostración.* Para demostrar (3.2.17), en lado izquierdo se aplica la desigualdad de Hölder, luego la inyección de Sobolev, luego la desigualdad de Poincaré, y finalmente las definiciones de  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  y  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  y se tiene

$$\begin{aligned} |(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega| &\leq \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \|\theta\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_{emb}^2 \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_{emb}^2 \tilde{C}_p \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_{emb}^2 \tilde{C}_P \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \nu_0^{-1/2} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})} \kappa_0^{-1/2} \|\theta\|_{T(\mathcal{T})}, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{C}_P = (1 + C_P^2)^{1/2}$ , y  $C_p$  es la constante de Poincaré.

Luego, se tiene la desigualdad (3.2.17) con  $\tilde{C}_g = C_{emb}^2 \tilde{C}_p \nu_0^{-1/2} \kappa_0^{-1/2}$ .

Finalmente, para demostrar (3.2.18), en el lado izquierdo se aplica desigualdad triangular, la propiedad (3.1.4), la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.2.3) y luego la definición de la norma  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  y se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi) + S_\theta(\theta, \psi)| &\leq \kappa_1 \|\nabla \theta\|_{0,\Omega} \|\nabla \psi\|_{0,\Omega} + S_\theta(\theta, \theta)^{1/2} S_\theta(\psi, \psi)^{1/2} \\ &\leq \kappa_1 \|\theta\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} + S_\theta(\theta, \theta)^{1/2} S_\theta(\psi, \psi)^{1/2} \\ &\leq \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \|\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})} + \|\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})} \\ &\leq \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_0} + 1\right) \|\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}, \end{aligned}$$

con lo que se prueba (3.2.18) con  $\tilde{C}_a = \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + 1$ .  $\square$

En los siguientes dos lemas se obtienen resultados de estabilidad para las formas  $\mathcal{C}$  y  $\mathbf{c}$ , en donde se asume que  $\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}, p) = 0$ , como ocurre cuando  $\mathbf{u}$  y  $p$  son soluciones de (3.2.6). Las desigualdades entregadas en el primer lema permite la obtención del resultado de existencia para el problema discreto, en cambio las desigualdades entregadas en el segundo lema serán utilizadas más adelante en la sección de estimación de error.

**Lema 18.** *Existen constantes  $\tilde{C}_c$  y  $\tilde{C}_c$  positivas tales que para todo  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_h^0$ ,  $\theta, \psi \in V_h$ ,*

$q \in Q_h$  y  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \cap \{(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h : \nabla \cdot \ell(\mathbf{v}, q) = 0\}$  se cumple

$$|\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}, \quad (3.2.19)$$

$$|\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| \leq \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.2.20)$$

*Demostración.* Para demostrar la desigualdad (3.2.19), se utiliza (3.1.17) considerando que  $\ell(\mathbf{u}, p)$  es de divergencia nula, y se aplica la desigualdad de Hölder en el lado izquierdo de (3.2.19)

$$|\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| = |-\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \quad (3.2.21)$$

Ahora, se reemplaza (3.2.12) en (3.2.21) y luego se utiliza la definición de  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  para obtener

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| &\leq \bar{C}_6 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \\ &\leq \bar{C}_6 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \nu_0^{-1/2} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene (3.2.19) con  $\tilde{C}_c = \nu_0^{-1/2} \bar{C}_6$ .

De manera similar se puede obtener la desigualdad (3.2.20). Para esto, se utiliza (3.1.18) considerando que  $\ell(\mathbf{u}, p)$  es de divergencia nula, y se aplica la desigualdad de Hölder en el lado izquierdo de (3.2.20), para así obtener

$$|\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| = |-\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \psi, \theta)| \leq \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{0,\Omega} \|\theta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \quad (3.2.22)$$

Ahora, se utiliza (3.2.12) en (3.2.22) y la definición de  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$ , y se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| &\leq \bar{C}_6 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\nabla \psi\|_{0,\Omega} \|\theta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \\ &\leq \bar{C}_6 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \kappa_0^{-1/2} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene (3.2.20) con  $\tilde{C}_c = \kappa_0^{-1/2} \bar{C}_6$ .  $\square$

**Lema 19.** Sean  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h$ ,  $\psi \in V_h$ ,  $(\mathbf{u}, p) \in \{(\mathbf{z}, t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times [L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)] :$

$\nabla \cdot \ell(\mathbf{z}, t) = 0\}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$  y  $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Entonces existen constantes  $\tilde{C}_{c2}$  y  $\tilde{C}_{c2}$  positivas tales que

$$|\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq \tilde{C}_{c2} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}, \quad (3.2.23)$$

$$|\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| \leq \tilde{C}_{c2} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.2.24)$$

*Demostración.* La obtención de ambas desigualdades se consigue de manera muy similar a lo hecho para obtener (3.2.19) y (3.2.20).

A partir del uso de las ecuaciones (3.1.17) y (3.1.18) y la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| &\leq \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{0,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} |v|_{1,\Omega}, \\ |\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| &\leq \|\ell(\mathbf{u}, p)\|_{0,\Omega} \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} |\psi|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Entonces, a partir de la definición de las normas y la desigualdad (3.2.12), con  $q = 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}, \mathbf{v})| &\leq \nu_0^{-1/2} \bar{C}_2 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}, \\ |\mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}, p); \theta, \psi)| &\leq \kappa_0^{-1/2} \bar{C}_2 \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Luego, se tienen las desigualdades (3.2.23) y (3.2.24) con  $\tilde{C}_{c2} = \nu_0^{-1/2} \bar{C}_2$  y  $\tilde{C}_{c2} = \kappa_0^{-1/2} \bar{C}_2$ , donde la constante  $\bar{C}_2$  está dada en 3.2.12.  $\square$

Además, a partir de (3.1.5) y (3.1.6) se tiene que los términos elípticos en (3.2.6) son Lipschitz continuos con respecto al primer argumento, lo cual es establecido en el Lema que sigue.

**Lema 20.** Sean  $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  y  $\psi \in V_h$ . Entonces se cumple

$$|\mathcal{A}(\psi_1; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{A}(\psi_2; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_\nu C_{\nu, lip} \|\psi_1 - \psi_2\|_{T(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}, \quad (3.2.25)$$

$$|\mathbf{a}(\psi_1; \theta, \psi) - \mathbf{a}(\psi_2; \theta, \psi)| \leq C_\kappa C_{\kappa, lip} \|\psi_1 - \psi_2\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.2.26)$$

*Demostración.* La demostración de las desigualdades (3.2.25) y (3.2.26) se desarrollan de

manera similar. Para la expresión (3.2.25), se utiliza la desigualdad (3.1.5), y luego la desigualdad de Hölder, y se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(\psi_1; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{A}(\psi_2; \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq C_{\nu, lip} \int_{\Omega} |\psi_1 - \psi_2| |\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}| \\ &\leq C_{\nu, lip} \|\psi_1 - \psi_2\|_{0, \Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

A partir de las definiciones de las normas  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  y  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  se tiene

$$|\mathcal{A}(\psi_1; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{A}(\psi_2; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_{\nu, lip} \nu_0^{-1/2} \kappa_0^{-1/2} \|\psi_1 - \psi_2\|_{T(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1, \infty}} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}.$$

De esta manera, se tiene el resultado (3.2.25) con  $C_\nu = (\nu_0 \kappa_0)^{-1/2}$ .

Para demostrar la desigualdad (3.2.26) se procede de manera muy similar, y se tiene el resultado con  $C_\kappa = \kappa_0^{-1}$ .  $\square$

### 3.2.2. Propiedades de coercividad discretas

A continuación se presentan propiedades de coercividad para los términos que aparecen en (3.2.6).

**Lema 21.** *Para todo  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h$ ,  $\psi \in V_h^0$  y  $\theta \in V_h$  se cumple*

$$\mathcal{A}(\theta; \mathbf{v}, \mathbf{v}) + S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket q \rrbracket^2 \geq \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}^2, \quad (3.2.27)$$

$$\mathbf{a}(\theta; \psi, \psi) + S_\theta(\psi, \psi) \geq \tilde{C}_{co, \theta} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}^2, \quad (3.2.28)$$

donde  $\tilde{C}_{co, \theta}$  es una constante positiva.

*Demostración.* El resultado (3.2.27) sigue de utilizar la propiedad (3.1.3) y la definición de la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  en el lado izquierdo. Por su parte, el resultado (3.2.28) sigue de utilizar la propiedad (3.1.4), la definición de la norma  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  y la desigualdad de Poincaré en el lado izquierdo, con constante  $\tilde{C}_{co, \theta} = \min\{1, \tilde{C}_p^{-1}\}$ .  $\square$

### 3.2.3. Existencia de solución del problema discreto

En esta sección se provee un resultado de existencia de solución para el problema (3.2.6). Para ello, es necesario el siguiente lema que entrega estimaciones a priori para la velocidad, presión y temperatura discretas:

**Lema 22.** *Sea  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$  solución de (3.2.6). Asímbase que*

$$\tilde{C} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.2.29)$$

con

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{C}_g \tilde{C}_c}{\tilde{C}_{co,\theta}},$$

entonces existen constantes  $C_u$  y  $C_\theta$  dependientes sólo de  $\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}$  y las constantes definidas en la Sección 3.2.1 y la Sección 3.2.2, tales que

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq C_u \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}, \quad \|\theta_h\|_{T(\mathcal{T})} \leq C_\theta \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.2.30)$$

*Demostración.* Se toma la función test  $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_{h,0})$  en (3.2.6) y se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, p_h) + \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, p_h) \\ & + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket^2 = (\theta_h \mathbf{g}, \mathbf{u}_h)_\Omega, \\ & \mathbf{a}(\theta_h; \theta_h, \theta_{h,0}) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \theta_h, \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_h, \theta_{h,0}) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, simplificando términos, expresando  $\theta_h$  como  $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{h,1}$ , y ocupando las propiedades (3.1.15) y (3.1.16), se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket^2 = (\theta_{h,0} \mathbf{g}, \mathbf{u}_h)_\Omega + (\theta_{h,1} \mathbf{g}, \mathbf{u}_h)_\Omega \\ & \mathbf{a}(\theta_h; \theta_{h,0}, \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_{h,0}, \theta_{h,0}) = -\mathbf{a}(\theta_h; \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) - \mathbf{c}(\ell(\mathbf{u}_h, p_h); \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) - S_\theta(\theta_{h,1}, \theta_{h,0}). \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

En la primera ecuación de (3.2.31), se utiliza (3.2.27) al lado izquierdo, y se toma valor absoluto, se utiliza la desigualdad triangular y la propiedad (3.2.17) al lado derecho, y se

obtiene

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})}^2 \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \left( \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \right).$$

Luego,

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \right). \quad (3.2.32)$$

En la segunda ecuación de (3.2.31), se utiliza (3.2.28) en el lado izquierdo, y en el lado derecho se toma valor absoluto, se utiliza desigualdad triangular y las desigualdades (3.2.18) y (3.2.20), y se obtiene

$$\tilde{C}_{co,\theta} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})}^2 \leq \tilde{C}_a \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Luego,

$$\|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})} \leq \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \left( \tilde{C}_a \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \right). \quad (3.2.33)$$

Reemplazando (3.2.32) en (3.2.33), y luego reordenando términos, se tiene

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \\ & \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \right) \\ & \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_g \tilde{C}_c \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado el supuesto (3.2.29) se tiene

$$\frac{1}{2} \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}.$$

De esta manera, se prueba que

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq C_u \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}, \quad \text{con } C_u = 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right). \quad (3.2.34)$$

Además, utilizando la desigualdad triangular, la desigualdad (3.2.33), la cota (3.2.34) reor-

denando términos, y utilizando el supuesto (3.2.29), se tiene

$$\begin{aligned}
& \|\theta_h\|_{T(\mathcal{T})} \\
& \leq \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \\
& \leq \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \\
& \leq \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_c 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \\
& \leq \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \left( \frac{\tilde{C}_g \tilde{C}_c}{\tilde{C}_{co,\theta}} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \\
& \leq \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} + \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\theta_h\|_{T(\mathcal{T})} \leq C_\theta \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}, \quad \text{con } C_\theta = 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right). \quad (3.2.35)$$

Con esto se finaliza la demostración.  $\square$

Este resultado entrega lo necesario para obtener el siguiente resultado, donde nuevamente es utilizado un argumento de punto fijo (como ya se había realizado en la demostración de existencia de soluciones del problema variacional).

**Teorema 23.** *Si se cumple el supuesto (3.2.29), entonces existe  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$  solución de (3.2.6).*

*Demostración.* Para la demostración del teorema, se ocupará el teorema de punto fijo de Brower. Para esto es necesario definir un operador adecuado que sea continuo y tal que para un conjunto convexo acotado y cerrado  $M$  cumpla  $\mathcal{L}(M) \subset M$

Se va a considerar el operador

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h & \rightarrow \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h \\
\mathcal{L}(\mathbf{z}_h, t_h, \varphi_h) & = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)
\end{aligned}$$

dado por

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\varphi_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}_h, t_h); \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) \\ + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = (\varphi_h \mathbf{g}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \\ \mathbf{a}(\varphi_h; \theta_h, \psi_h) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}_h, t_h); \theta_h, \psi_h) + S_\theta(\theta_h, \psi_h) = 0, \\ \theta_h = i_h(\theta_D) \text{ en } \Gamma, \end{cases} \quad (3.2.36)$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$ . Notar que un punto fijo del operador  $\mathcal{L}$  corresponde a una solución del problema (3.2.6).

Se define el conjunto

$$M = \left\{ (\mathbf{z}, t, \varphi) : \nabla \cdot \ell(\mathbf{z}, t) = 0, \|\mathbf{z}, t\|_{N(\mathcal{T})} \leq C_u \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}, \|\varphi\|_{T(\mathcal{T})} \leq C_\theta \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \right\},$$

donde  $C_u$  y  $C_\theta$  están dados por (3.2.34) y (3.2.35), respectivamente.

Para utilizar el Teorema de punto fijo de Brower, la prueba se dividirá en 3 pasos.

**Paso 1:** Demostrar que  $\mathcal{L}$  está bien definido.

Notar que (3.2.36) está conformado por dos problemas desacoplados. El primero corresponde a un problema de Oseen estabilizado, y el segundo a un problema de advección-difusión estabilizado. En ambos casos el campo convectivo es  $\ell(\mathbf{z}_h, t_h)$ , el cual es de divergencia nula en  $\Omega$  cuando el dominio de  $\mathcal{L}$  es  $M$ . Por lo tanto, ambos problemas tienen solución y entonces  $\mathcal{L}$  está bien definido.

**Paso 2:** Demostrar que  $\mathcal{L}$  aplica  $M$  en  $M$ .

Sea  $(\mathbf{z}, t, \varphi) \in M$  tal que  $\mathcal{L}(\mathbf{z}, t, \varphi) = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$ . Tomando  $(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{u}_h, p_h)$  en la primera ecuación de (3.2.36) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varphi; \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}, t); \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, p_h) + \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, p_h) + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket^2 \\ = (\varphi \mathbf{g}, \mathbf{u}_h)_\Omega. \end{aligned}$$

Dado que  $\ell(\mathbf{z}, t)$  es de divergencia nula, se utiliza (3.1.15) y las propiedades (3.2.27) y

(3.2.17) y se tiene

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})}^2 \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \|\varphi\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Como  $(\mathbf{z}, t, \varphi) \in M$ , se tiene

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})}^2 \leq \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} C_\theta \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Simplificando términos y utilizando la definición de  $C_\theta$  dada en (3.2.35) se tiene

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq \tilde{C}_g 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} (\tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta}) \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Observando la definición de  $C_u$  en (3.2.34), se tiene

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})} \leq C_u \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Ahora, tomando  $\varphi = \theta_{h,0}$  en la segunda ecuación en (3.2.36) se tiene

$$\mathbf{a}(\varphi; \theta_h, \theta_{h,0}) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta_h, \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_h, \theta_{h,0}) = 0.$$

Expresando  $\theta_h$  como  $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{h,1}$  se tiene

$$\mathbf{a}(\varphi; (\theta_{h,0} + \theta_{h,1}), \theta_{h,0}) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); (\theta_{h,0} + \theta_{h,1}), \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_{h,0} + \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) = 0,$$

Reagrupando términos,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varphi; \theta_{h,0}, \theta_{h,0}) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta_{h,0}, \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_{h,0}, \theta_{h,0}) &\leq \\ -\mathbf{a}(\varphi; \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) - \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) - S_\theta(\theta_{h,1}, \theta_{h,0}). \end{aligned}$$

Como  $\ell(\mathbf{z}, t)$  es de divergencia nula, se puede utilizar (3.1.16). De esta manera, utilizando (3.2.28) al lado izquierdo y tomando valor absoluto en el lado derecho, utilizando (3.2.18) y (3.2.20), y finalmente utilizando el hecho que  $(\mathbf{z}, t, \varphi) \in M$  se obtiene

$$\tilde{C}_{co,\theta} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{T})}^2 \leq |\mathbf{a}(\varphi; \theta_{h,1}, \theta_{h,0}) + S_\theta(\theta_{h,1}, \theta_{h,0})| + |\mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta_{h,1}, \theta_{h,0})|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{C}_a \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} + \tilde{C}_c \|(\mathbf{z}, t)\|_{N(\mathcal{F})} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \\
&\leq \tilde{C}_a \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} + \tilde{C}_c C_u \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos, y luego reemplazando con la definición de  $C_u$  dada en (3.2.34), agrupando términos de manera conveniente y utilizando la hipótesis dada en (3.2.29) se tiene

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{co,\theta} \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} &\leq \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_c C_u \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_c 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq \left( \tilde{C}_a + 2 \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \left( \frac{\tilde{C}_c \tilde{C}_g}{\tilde{C}_{co,\theta}} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta_{h,1}\|_{L^3(\Omega)} \right) \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq \left( \tilde{C}_a + \left( \tilde{C}_a + \tilde{C}_{co,\theta} \right) \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} \leq \left( 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \quad (3.2.37)$$

Finalmente, utilizando desigualdad triangular y (3.2.37), y revisando la definición de  $C_\theta$  en (3.2.35), se tiene

$$\begin{aligned}
\|\theta_h\|_{T(\mathcal{F})} &\leq \|\theta_{h,0}\|_{T(\mathcal{F})} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq \left( 2\tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} + \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq 2 \left( \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_a + 1 \right) \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})} \\
&\leq C_\theta \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{F})}.
\end{aligned}$$

Para completar esta parte de la prueba, resta ver que

$$\nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) = 0, \text{ en } \Omega. \quad (3.2.38)$$

Esto es consecuencia de que toda solución  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  de la primera ecuación de (3.2.36) debe cumplir la relación (3.2.38), por lo demostrado en el Teorema 15.

De esta manera, se ha demostrado que  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in M$ .

**Paso 3:** Demostrar la continuidad del operador  $\mathcal{L}$ .

Para ello, considérese la sucesión  $\{(\mathbf{z}_m, t_m, \varphi_m)\}$  convergente a  $(\mathbf{z}, t, \varphi)$  y sean la sucesión  $\{(\mathbf{u}_m, p_m, \theta_m)\}$  y  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  dados por

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}_m, t_m, \varphi_m) = (\mathbf{u}_m, p_m, \theta_m), \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.2.39)$$

y,

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, t, \varphi) = (\mathbf{u}, p, \theta). \quad (3.2.40)$$

Se demostrará que  $(\mathbf{u}_m, p_m, \theta_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\mathbf{u}, p, \theta)$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$ . Se considera la primera ecuación de (3.2.36), y a su evaluación en (3.2.40) se le resta su evaluación dada por (3.2.39) para  $m$ , y se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\varphi; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{A}(\varphi_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}, t); \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{v}, p - p_m) \\ & + \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, q) + S_u(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, v) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p - p_m \rrbracket \llbracket q \rrbracket = ((\varphi - \varphi_m) \mathbf{g}, \mathbf{v})_\Omega. \end{aligned}$$

Se escogen como funciones test  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_m$  y  $q = p - p_m$ , y se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\varphi; \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) - \mathcal{A}(\varphi_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}, t); \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) - \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) \\ & + S_u(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p - p_m \rrbracket \llbracket p - p_m \rrbracket = ((\varphi - \varphi_m) \mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m)_\Omega. \end{aligned}$$

Se suman y restan los términos  $\mathcal{A}(\varphi_m; \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m)$  y  $\mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m)$  y se considera el hecho que  $\ell(\cdot)$  es lineal y la definición de  $\mathcal{A}$  en (3.1.2) para obtener

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\nu(\varphi) - \nu(\varphi_m)) \nabla \mathbf{u} : \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \int_\Omega \nu(\varphi_m) \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) : \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) \\ & + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m); \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) \\ & + S_u(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p - p_m \rrbracket \llbracket p - p_m \rrbracket = ((\varphi - \varphi_m) \mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m)_\Omega. \end{aligned}$$

Utilizando (3.1.15) y reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(\varphi_m) \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) : \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + S_u(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p - p_m \rrbracket \llbracket p - p_m \rrbracket \\ &= - \int_{\Omega} (\nu(\varphi) - \nu(\varphi_m)) \nabla \mathbf{u} : \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m) - \mathcal{C}(\ell(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m); \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m) \\ &+ ((\varphi - \varphi_m) \mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Se toma valor absoluto en la igualdad anterior, en el lado izquierdo se utiliza (3.2.27) y en el lado derecho se utiliza desigualdad triangular, (3.2.25), (3.2.19) y (3.2.17), y se obtiene

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, p - p_m)\|_{N(\mathcal{T})}^2 \leq C_{\nu} \nu_{\text{ip}} \|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, p - p_m)\|_{N(\mathcal{T})} \\ &+ \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, p - p_m)\|_{N(\mathcal{T})} \\ &+ \tilde{C}_{\mathbf{g}} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{T})} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, p - p_m)\|_{N(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Simplificando términos, se tiene

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m, p - p_m)\|_{N(\mathcal{T})} \leq C_{\nu} \nu_{\text{ip}} \|\varphi - \varphi_m\|_h \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \\ &+ \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + \tilde{C}_{\mathbf{g}} \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Como  $\|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{T})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  y  $\|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{T})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , entonces

$$(\mathbf{u}_m, p_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\mathbf{u}, p).$$

Ahora, se toma la segunda ecuación de (3.2.36), y a su evaluación en (3.2.40) se le resta su evaluación dada por (3.2.39) para  $m$ , y se obtiene

$$\mathbf{a}(\varphi; \theta, \psi) - \mathbf{a}(\varphi_m; \theta_m, \psi) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta, \psi) - \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \theta_m, \psi) + S_{\theta}(\theta - \theta_m, \psi) = 0.$$

Se escogen como funciones test  $\psi = \theta - \theta_m$  y se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}(\varphi; \theta, \theta - \theta_m) - \mathbf{a}(\varphi_m; \theta_m, \theta - \theta_m) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}, t); \theta, \theta - \theta_m) \\ & - \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \theta_m, \theta - \theta_m) + S_{\theta}(\theta - \theta_m, \theta - \theta_m) = 0. \end{aligned}$$

Se suman y restan los términos  $\mathbf{a}(\varphi_m; \theta, \theta - \theta_m)$  y  $\mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \theta, \theta - \theta_m)$ , se utiliza la

definición de  $\mathbf{a}$  en (3.1.2) y se considera el hecho que  $\ell(\cdot)$  es lineal para obtener

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\kappa(\varphi) - \kappa(\varphi_m)) \nabla \theta \cdot \nabla (\theta - \theta_m) + \int_{\Omega} \kappa(\varphi_m) \nabla (\theta - \theta_m) \cdot \nabla (\theta - \theta_m) \\ & + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m); \theta, \theta - \theta_m) + \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z}_m, t_m); \theta - \theta_m, \theta - \theta_m) \\ & + S_{\theta}(\theta - \theta_m, \theta - \theta_m) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando (3.1.16) y reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \kappa(\varphi_m) \nabla (\theta - \theta_m) \cdot \nabla (\theta - \theta_m) + S_{\theta}(\theta - \theta_m, \theta - \theta_m) \\ & = - \int_{\Omega} (\kappa(\varphi) - \kappa(\varphi_m)) \nabla \theta \cdot \nabla (\theta - \theta_m) - \mathbf{c}(\ell(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m); \theta, \theta - \theta_m). \end{aligned}$$

Se toma valor absoluto en la igualdad anterior, en el lado izquierdo se utiliza (3.2.28) y en el lado derecho se utiliza desigualdad triangular, (3.2.26) y (3.2.20), y se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{co,\theta} \|\theta - \theta_m\|_{T(\mathcal{I})}^2 & \leq C_{\kappa} C_{\kappa, lip} \|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{I})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\theta - \theta_m\|_{T(\mathcal{I})} \\ & + \tilde{C}_{\mathbf{c}} \|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{I})} \|\theta\|_{L^3(\Omega)} \|\theta - \theta_m\|_{T(\mathcal{I})}. \end{aligned}$$

Simplificando términos, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{co,\theta} \|\theta - \theta_m\|_{T(\mathcal{I})} & \leq C_{\kappa} C_{\kappa, lip} \|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{I})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ & + \tilde{C}_{\mathbf{c}} \|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{I})} \|\theta\|_{L^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como  $\|(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m, t - t_m)\|_{N(\mathcal{I})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  y  $\|\varphi - \varphi_m\|_{T(\mathcal{I})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , entonces

$$\theta_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \theta.$$

Esto completa la prueba.  $\square$

Es importante remarcar que tanto para el Lema 22 y el Teorema 23 es fundamental el cumplimiento de la hipótesis dada por (3.2.29). Notar que en el caso de dimensión infinita ( $\theta|_{\Gamma} = \theta_D$ ), (3.2.29) se satisface como consecuencia del Lema 12, sin embargo esto no es necesariamente cierto para el caso discreto. Esto dependerá de la extensión  $\theta_{h,1}$  de  $i_h(\theta_D)$  escogida. En [46, Sección 4] se estudian posibles extensiones de  $i_h(\theta_D)$ , las cuales gracias

a las estimaciones (3.2.30) permiten obtener resultados de continuidad de las soluciones con respecto a  $\theta_D$ . Sin embargo, al igual que en dicho trabajo, para los cálculos numéricos la extensión considerada es la dada por la función continua lineal a trozos que es igual al interpolador nodal de  $\theta_D$  en los elementos adyacentes a  $\Gamma$ , y que es nula en el resto del dominio. De esta manera, para una malla suficientemente fina en la cercanía de la frontera se satisface (3.2.29).

### 3.3. Estimación de Error

En esta sección se presenta un resultado de convergencia para el método descrito en este trabajo, la cual más adelante será verificada a través de los ejemplos numéricos realizados. El Teorema 24 provee una estimación de error dependiente de la malla de las aproximaciones dadas por (3.2.6), para soluciones de (3.1.1) suficientemente suaves y pequeñas, la cual entrega el orden de convergencia que tiene el método. Es decir, bajo las condiciones mencionadas, se obtiene una cota para la norma del error de la solución, la cual depende linealmente de  $h$ .

Previo a la obtención del Teorema 24, es necesario notar que a partir de (3.2.4) y de las desigualdades (3.2.2) y (3.2.3) se tiene las siguientes desigualdades para los términos estabilizadores válidas para todo  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h$ ,  $\theta \in H^2(\Omega)$  y  $\psi \in V_h$ :

$$|S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|(\mathbf{v}, q)\|_{N(\mathcal{T})}, \quad (3.3.1)$$

$$|S_\theta(\theta, \psi)| \leq Ch \|\theta\|_{2,\Omega} S_\theta(\psi, \psi)^{1/2} \leq Ch \|\theta\|_{2,\Omega} \|\psi\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.3.2)$$

De esta manera, el teorema siguiente entrega el resultado de estimación de error de la solución entregada por el método propuesto.

**Teorema 24.** *Sea  $(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  solución del problema (3.1.1) y  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$  solución de (3.2.6). Supóngase que*

$$\max\{\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)}, \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\} \leq M, \quad (3.3.3)$$

con  $M$  suficientemente pequeño (una expresión más específica para  $M$  se puede encontrar en (3.3.29)).

Además supóngase que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega)$  y  $\theta \in H^2(\Omega)$ . Entonces existe  $C > 0$  tal que

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{N(\mathcal{T})} + \|\theta - \theta_h\|_{T(\mathcal{T})} \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} + \|\theta\|_{2,\Omega}). \quad (3.3.4)$$

*Demostración.* Sea  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  solución de (3.1.1) y sea  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$  solución de (3.2.6). Por simplicidad, se escribe  $\mathbf{e}^u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ ,  $e^p = p - p_h$  y  $e^\theta = \theta - \theta_h$ . Estos errores serán

descompuestos en

$$\begin{cases} \mathbf{e}^u = \boldsymbol{\eta}^u + \mathbf{e}_h^u, & \text{donde } \boldsymbol{\eta}^u := \mathbf{u} - i_h(\mathbf{u}) \text{ y } \mathbf{e}_h^u := i_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_h, \\ e^p = \eta^p + e_h^p, & \text{donde } \eta^p := p - \Pi_h(p) \text{ y } e_h^p := \Pi_h(p) - p_h, \\ e^\theta = \eta^\theta + e_h^\theta, & \text{donde } \eta^\theta := \theta - i_h(\theta) \text{ y } e_h^\theta := i_h(\theta) - \theta_h, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

donde  $i_h$  es el respectivo interpolador al espacio de elementos finitos. De esta manera, no es difícil ver que  $(\mathbf{e}_h^u, e_h^p, e_h^\theta) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h \times V_h$ .

De esta manera, utilizando la propiedad (3.2.27) para  $\mathbf{e}_h^u$  y  $e_h^p$  y (3.1.2), luego sumando y restando el término  $\int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u$  y utilizando (3.1.15), y utilizando las expresiones dadas en (3.3.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}^2 &\leq \int_\Omega \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{e}_h^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{e}_h^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket e_h^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\ &\leq \int_\Omega \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{e}_h^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{e}_h^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket e_h^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\ &\quad + \int_\Omega (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{e}_h^u) \mathbf{e}_h^u - \int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u \\ &\leq \int_\Omega \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{e}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{e}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket e^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\ &\quad + \int_\Omega (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{e}^u) \mathbf{e}_h^u - \int_\Omega e^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \mathbf{e}^u \\ &\quad - \left[ \int_\Omega \nu(\theta_h) \nabla \boldsymbol{\eta}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u - \int_\Omega \eta^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u \right] \\ &= T_1 - T_2, \end{aligned}$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  están dadas por

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_\Omega \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{e}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{e}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket e^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\ &\quad + \int_\Omega (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{e}^u) \mathbf{e}_h^u - \int_\Omega e^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_\Omega e_h^p \nabla \cdot \mathbf{e}^u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \boldsymbol{\eta}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\
&+ \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} \eta^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Por lo tanto,

$$\|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}^2 \leq |T_1| + |T_2|. \tag{3.3.7}$$

A continuación, se tratará el término  $T_1$ . Para esto, primero se expresa  $\mathbf{e}^u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  y  $e^p = p - p_h$ , y se obtiene

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{u}, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \\
&+ \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \mathbf{u} \\
&- \left[ \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \right. \\
&\left. + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u + \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right].
\end{aligned}$$

Notar que

$$\int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

y que al ser  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  solución de la primera ecuación de (3.2.6) se tiene que

$$\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket + \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{u}, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u \\
&- \left[ \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h^u) + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u \right].
\end{aligned}$$

Ahora nótese que al ser  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$  solución de (3.2.6) se tiene

$$\int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{e}_h^u + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h^u) + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u = \int_{\Omega} \theta_h \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_h^u.$$

Considerando esto, se suman y restan los términos  $\int_{\Omega} \nu(\theta) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u$  y  $\int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}, p) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u$  y se reordenan los términos de manera conveniente para obtener

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ \int_{\Omega} \nu(\theta) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}, p) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} p \cdot \nabla \mathbf{e}_h^u \right] - \int_{\Omega} \theta_h \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_h^u \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} (\nu(\theta) - \nu(\theta_h)) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u \right] \\ &\quad + S_u(\mathbf{u}, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket. \end{aligned}$$

Como  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  es solución de (3.1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Omega} (\theta - \theta_h) \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} (\nu(\theta) - \nu(\theta_h)) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{e}_h^u - \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_h^u \\ &\quad + S_u(\mathbf{u}, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Ahora, como  $p \in H^1(\Omega)$  se tiene que  $\int_F \llbracket p \rrbracket = 0$  para todo  $f \in \mathcal{E}_I$ . Luego, como  $e_h^p \in \mathbb{P}^0(K)$  entonces

$$\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket = 0.$$

De aplicar lo anterior y los resultados (3.2.17), (3.2.25), (3.2.23) y (3.3.1) a (3.3.8) se tiene

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \left( \tilde{C}_g \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} \|\theta - \theta_h\|_{T(\mathcal{T})} + C_{\nu, \text{lip}} C_{\nu} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|\theta - \theta_h\|_{T(\mathcal{T})} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{c2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} + Ch \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \right) \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

A continuación, se acotará cada término que aparece en  $T_2$ .

Utilizando (3.1.3), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  se tiene

$$\left| \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \boldsymbol{\eta}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u \right| \leq \nu_1 \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{1,\Omega} \|\mathbf{e}_h^u\|_{1,\Omega}.$$

Notar que a partir de (2.2.3) se concluye que  $\|\boldsymbol{\eta}^u\|_{1,\Omega} \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ . De esto y de la definición

de la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  se tiene

$$\left| \int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \boldsymbol{\eta}^u : \nabla \mathbf{e}_h^u \right| \leq \nu_0^{-1/2} \nu_1 \tilde{C}_1 h \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \quad (3.3.10)$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el término estabilizado y la definición de la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  se tiene

$$\begin{aligned} & \left| S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \right| \\ & \leq \left( (S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \boldsymbol{\eta}^u))^{1/2} + \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket^2 \right)^{1/2} \right) \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Ahora, a partir de las desigualdades (3.2.5) y (2.2.5) se puede concluir que  $S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \boldsymbol{\eta}^u) \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$  y  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket^2 \leq Ch \|p\|_{1,\Omega}$ , respectivamente. Entonces, se tiene

$$\left| S_u(\boldsymbol{\eta}^u, \mathbf{e}_h^u) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket \eta^p \rrbracket \llbracket e_h^p \rrbracket \right| \leq \tilde{C}_2 h \left( \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \right) \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \quad (3.3.11)$$

Ahora, dado que  $\Pi_h$  es la proyección ortogonal en el espacio de funciones constantes a trozos y que  $\nabla \cdot \mathbf{e}_h^u|_K \in \mathbb{P}^0(K)$ , entonces se tiene de manera directa que

$$\int_{\Omega} \eta^p \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u = 0. \quad (3.3.12)$$

Ahora, para acotar el término  $\int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u$ , se descompone la integral sobre los elementos de la malla, se integra por partes, se considera que  $e_h^p|_K \in \mathbb{P}^0(K)$  para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  y que  $\boldsymbol{\eta}^u|_{\Gamma} = 0$ , luego se multiplica y divide por  $\tau_F^{1/2}$  para luego utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $L^2(F)$  y en  $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}_I|}$ , luego se considera la definición de la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  y que  $\|\boldsymbol{\eta}^u \cdot \mathbf{n}\|_{0,F} \leq \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{0,F}$ , y se tiene

$$\left| \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u \right| = \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ - \int_K \nabla e_h^p |_K \boldsymbol{\eta}^u + \int_{\partial K} e_h^p \boldsymbol{\eta}^u \cdot \mathbf{n} \right] \right| \\
&= \left| \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \int_F \llbracket e_h^p \rrbracket \boldsymbol{\eta}^u \cdot \mathbf{n} \right| \\
&\leq \left| \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \left( \int_F \tau_F \llbracket e_h^p \rrbracket^2 \right)^{1/2} \left( \int_F \frac{1}{\tau_F} (\boldsymbol{\eta}^u \cdot \mathbf{n})^2 \right)^{1/2} \right| \\
&\leq \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket e_h^p \rrbracket^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \frac{1}{\tau_F} \int_F (\boldsymbol{\eta}^u \cdot \mathbf{n})^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \frac{1}{\tau_F} \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho que  $\tau_F = h_F/12$  y las desigualdades (2.2.1) y (2.2.3), se obtiene de manera directa que  $\frac{1}{\tau_F} \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{0,F}^2 \leq Ch_K^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(K)}$ , para todo  $F \in \mathcal{E}_I$ , donde  $F \in \partial K$ . Por lo tanto, dada la regularidad de la malla, se tiene

$$\left| \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u \right| \leq \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})} \left( Ch^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Luego,

$$\left| \int_{\Omega} e_h^p \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}^u \right| \leq \tilde{C}_3 h \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}. \quad (3.3.13)$$

Para acotar el término  $\int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u$  se utiliza la desigualdad de Hölder,

$$\left| \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u \right| \leq \|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{L^4(\Omega)} \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{1,\Omega} \|\mathbf{e}_h^u\|_{L^4(\Omega)}.$$

Ahora, se puede utilizar el resultado (3.2.12) para  $q = 4$ , y se tiene

$$\|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{L^4(\Omega)} \leq \bar{C}_4 \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{N(\mathcal{T})},$$

donde la constante  $\bar{C}_4$  está dada en (3.2.12). Luego, utilizando este resultado, la estimación

(3.2.30), inyección de Sobolev y desigualdad de Poincaré, se tiene

$$\left| \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u \right| \leq C_u \bar{C}_4 C_{emb} \tilde{C}_P \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \|\boldsymbol{\eta}^u\|_{1,\Omega} \|\mathbf{e}_h^u\|_{1,\Omega}.$$

Luego, utilizando definición de normas y la desigualdad (2.2.3), se tiene

$$\left| \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^u) \mathbf{e}_h^u \right| \leq \tilde{C}_4 h \nu_0^{-1/2} \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \quad (3.3.14)$$

Entonces, reemplazando (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12), (3.3.13) y (3.3.14) en (3.3.6) se tiene

$$|T_2| \leq Ch \left( \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \right) \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \quad (3.3.15)$$

Ahora se reemplazan (3.3.9) y (3.3.15) en (3.3.7), y simplificando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_{N(\mathcal{T})} &\leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) + (C_1 \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} + C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)}) \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \\ &\quad + C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})}, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

donde

$$C_1 = \tilde{C}_g, \quad C_2 = C_{\nu, lip} C_\nu, \quad \text{y} \quad C_3 = \tilde{C}_{C2}. \quad (3.3.17)$$

A continuación, utilizando la propiedad (3.2.28) para  $e_h^\theta$  y (3.1.2), utilizando (3.1.16) y utilizando la descomposición del error dada en (3.3.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{co,\theta} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}^2 &\leq \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla e_h^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(e_h^\theta, e_h^\theta) \\ &\leq \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla e_h^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(e_h^\theta, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla e_h^\theta e_h^\theta \\ &\leq \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla e^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(e^\theta, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla e^\theta e_h^\theta \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \eta^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(\eta^\theta, \eta^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \eta^\theta e_h^\theta \right] \\ &\leq T_3 - T_4, \end{aligned}$$

donde  $T_3$  y  $T_4$  están dados por

$$T_3 = \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla e^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(e^\theta, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla e^\theta e_h^\theta$$

y

$$T_4 = \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \eta^\theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(\eta^\theta, \eta^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \eta^\theta e_h^\theta. \quad (3.3.18)$$

Por lo tanto,

$$\|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}^2 \leq \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} (|T_3| + |T_4|). \quad (3.3.19)$$

A continuación, se acota el término  $T_3$ .

Para esto, se escribe  $e^\theta = \theta - \theta_h$ , se considera que  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$  es solución de (3.2.6), se suman y restan los términos  $\int_{\Omega} \kappa(\theta) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta$  y  $\int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}, p) \cdot \nabla \theta e_h^\theta$ , y finalmente se considera que  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  es solución de (3.1.1) y se obtiene

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(\theta, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \theta e_h^\theta \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \theta_h \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(\theta_h, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \theta_h e_h^\theta \right] \\ &= \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta + S_\theta(\theta, e_h^\theta) + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \theta e_h^\theta \\ &= \left[ \int_{\Omega} \kappa(\theta) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}, p) \cdot \nabla \theta e_h^\theta \right] + S_\theta(\theta, e_h^\theta) \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} (\kappa(\theta) - \kappa(\theta_h)) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h) \cdot \nabla \theta e_h^\theta \right] \\ &= - \int_{\Omega} (\kappa(\theta) - \kappa(\theta_h)) \nabla \theta \cdot \nabla e_h^\theta - \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h) \cdot \nabla \theta e_h^\theta + S_\theta(\theta, e_h^\theta). \end{aligned}$$

De los resultados (3.2.26), (3.2.24) y (3.3.2) se tiene

$$\begin{aligned} &|T_3| \\ &\leq \left( C_{\kappa, lip} C_\kappa \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \tilde{C}_{c2} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} + Ch \|\theta\|_{2,\Omega} \right) \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

A continuación, se acotan los términos que aparecen en  $T_4$ .

Por (3.1.4), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma  $H^1(\Omega)$  se tiene

$$\left| \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \eta^\theta \cdot \nabla e_h^\theta \right| \leq \kappa_1 \|\eta^\theta\|_{1,\Omega} \|e_h^\theta\|_{1,\Omega}.$$

Utilizando (2.2.3) y la definición de la norma  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  se tiene

$$\left| \int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \eta^\theta \cdot \nabla e_h^\theta \right| \leq \tilde{C}_1 \kappa_1 \kappa_0^{-1/2} h \|\theta\|_{2,\Omega} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.3.21)$$

Para el término de estabilización se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma  $\|\cdot\|_{T(\mathcal{T})}$  y se tiene

$$|S_\theta(\eta^\theta, e_h^\theta)| \leq S_\theta(\eta^\theta, \eta^\theta)^{1/2} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}.$$

Luego, por (3.3.2) se tiene

$$|S_\theta(\eta^\theta, e_h^\theta)| \leq \tilde{C}_2 h \|\theta\|_{2,\Omega} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.3.22)$$

Ahora, se acotará el término  $\int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \eta^\theta e_h^\theta$ . Para ello, los mismos pasos utilizados para conseguir (3.3.14) se siguen, y se tiene

$$\left| \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \eta^\theta e_h^\theta \right| \leq \tilde{C}_3 h \kappa_0^{-1/2} \|\theta_{h,1}\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{2,\Omega} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})}. \quad (3.3.23)$$

Entonces, reemplazando (3.3.21), (3.3.22) y (3.3.23) en (3.3.18) se tiene

$$|T_4| \leq Ch \|\theta\|_{2,\Omega} \|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \quad (3.3.24)$$

Ahora se reemplazan (3.3.20) y (3.3.24) en (3.3.19), y simplificando términos se obtiene

$$\|e_h^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \leq Ch \|\theta\|_{2,\Omega} + C_4 \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + C_5 \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})}, \quad (3.3.25)$$

donde

$$C_4 = \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} C_{\kappa,lip} C_\kappa, \text{ y } C_5 = \tilde{C}_{co,\theta}^{-1} \tilde{C}_{c2}. \quad (3.3.26)$$

De esta manera, en las expresiones (3.3.16) y (3.3.25) se ha conseguido acotar las normas discretas de las componentes  $\mathbf{e}_h^u$ ,  $e_h^p$  y  $e_h^\theta$  de los errores en velocidad, presión y temperatura, respectivamente. Ahora, considerando argumentos ya utilizados en las deducciones anteriores, no es difícil probar que

$$\|(\eta^u, \eta^p)\|_{N(\mathcal{T})} \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}), \quad (3.3.27)$$

$$\|\eta^\theta\| \leq Ch \|\theta\|_{2,\Omega}. \quad (3.3.28)$$

Entonces, a partir de la desigualdad triangular y de (3.3.16), (3.3.25), (3.3.27) y (3.3.28), se tiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} + \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} &\leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} + \|\theta\|_{2,\Omega}) \\ &\quad + (C_1 \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} + C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)}) \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \\ &\quad + C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} \\ &\quad + C_4 \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} \|\theta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} + C_5 \|\theta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Entonces, por la hipótesis (3.3.3), se tiene

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} + \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} &\leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} + \|\theta\|_{2,\Omega}) \\ &\quad + M(C_1 + C_2 + C_4) \|e^\theta\|_{T(\mathcal{T})} + M(C_3 + C_5) \|(\mathbf{e}^u, e^p)\|_{N(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

Luego, si

$$M \leq \min\left\{\frac{1}{C_1 + C_2 + C_4}, \frac{1}{C_3 + C_5}\right\}, \quad (3.3.29)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$  están dados en (3.3.17) y (3.3.26), entonces se tiene (3.3.4).  $\square$

Notar que este resultado nos asegura la convergencia cuando se considera el campo de velocidad  $\mathbf{u}_h$  conforme entregado por el método, el cual no es a divergencia nula, pero no implica que el campo a divergencia nula no conforme que se obtiene a partir de una modificación de la solución vaya a tener el mismo orden de convergencia. Por ello, es necesario verificar que el campo  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  cuente con el mismo orden de convergencia obtenido. Esto es demostrado en el siguiente Teorema.

**Teorema 25.** *Bajo las hipótesis del Teorema 24 se tiene que*

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u} - \ell(\mathbf{u}_h, p_h)|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq C \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{N(\mathcal{T})}$$

*Demostración.* Considerando que  $\ell(\mathbf{u}, p) = \mathbf{u}$ , el resultado (3.2.11) y la definición de la norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_{N(\mathcal{T})}$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u} - \ell(\mathbf{u}_h, p_h)|_{1,K}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{u}, p) - \ell(\mathbf{u}_h, p_h)|_{1,K}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\ell(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)|_{1,K}^2 \\ &\leq \bar{C}^2 \left( |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[[p - p_h]]\|_{0,F}^2 \right) \\ &\leq C \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{N(\mathcal{T})}^2. \end{aligned}$$

□

Luego, el orden de convergencia no se ve afectado cuando la velocidad considerada es el campo a divergencia nula  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ .

## 4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En este capítulo se detalla la implementación numérica de la teoría desarrollada para ciertos esquemas estabilizados existentes. Se detallarán los algoritmos a utilizar para la correcta implementación computacional de los esquemas numéricos a probar. Se utilizarán ejemplos con soluciones analíticas conocidas en 2 dimensiones para poder medir convergencia de las soluciones numéricas y contrastar con los ordenes de convergencia dados por la teoría.

El problema que se considerará corresponde a una pequeña generalización, la cual corresponde a

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nu(\theta)\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} + \mathbf{g}\theta && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\kappa(\theta)\nabla\theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta &= \xi && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma, \\ \theta &= \theta_D && \text{en } \Gamma, \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

donde  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$  y  $\xi \in L^2(\Omega)$ .

Esta generalización es necesaria ya que las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\xi$  incorporadas en los lados derechos de las ecuaciones del problema son tomadas de tal forma que la solución exacta del problema sea una función analítica conocida. De esta manera, estas soluciones exactas se puedan comparar las soluciones numéricas, y así es posible medir la convergencia del error.

### 4.0.1. Algoritmos

En esta sección se detallan los algoritmos computacionales implementados para la resolución numérica del problema (4.0.1) por medio del método propuesto en este trabajo.

El algoritmo de resolución propuesto se basa en un esquema de punto fijo, el cual es

presentado en el **Algoritmo 1**. Ahora, dentro del algoritmo principal, es que se realizan los siguientes sub-algoritmos:

- **Algoritmo 2:** Dado  $\theta_h^0 \in V_h$ , se obtiene  $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0)$  solución del siguiente problema de Stokes, basado en la siguiente discretización estabilizada de elementos finitos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta_h^0; \mathbf{u}_h^0, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h^0) + S_u(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f} + \mathbf{g}\theta_h^0, \mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0, \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}_h^0, q_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h^0 \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket &= 0, & \forall q \in Q_h. \end{aligned}$$

- **Algoritmo 3:** En base a la solución anterior, se obtiene un campo de velocidades a divergencia nula mediante un post-proceso, dado por  $\mathbf{u}_h^p = \ell(\mathbf{u}_h^0, p_h^0)$ .
- Si  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$  y  $\|\mathbf{g}\| \geq 10^3$ , en la solución del campo de velocidad aparecen fenómenos llamados recirculaciones que dificultan la convergencia del algoritmo de punto fijo, por lo cual en este caso se implementa el **Algoritmo 4**, que corresponde a un algoritmo de continuación que permite obtener una solución inicial más cercana a la solución del problema (ver [33, IV, Sección 6.3]).
- **Algoritmo 5:** En base a los datos iniciales anteriores, para todo  $i = 0, \dots$  se realiza el siguiente esquema de punto fijo.

- **Algoritmo 6:** En base a la solución del paso de punto fijo anterior, se obtiene  $\theta_h^{i+1}$  solución del siguiente problema de Advección-Difusión:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta_h^i; \theta_h^{i+1}, \psi_h) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_h^p; \theta_h^{i+1}, \psi_h) + S_\theta(\theta_h^{i+1}, \psi_h) &= (\xi, \psi_h), & \forall \psi_h \in V_h, \\ \theta_h^{i+1} &= i_h(\theta_D), & \text{en } \Gamma. \end{aligned}$$

- **Algoritmo 7:** En base a la solución del paso de punto fijo anterior, y de la temperatura obtenida en el algoritmo anterior, se obtiene  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})$  solución del siguiente problema de Oseen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta_h^{i+1}; \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h^p; \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h^{i+1}) + S_u(\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) \\ = (\mathbf{f} + \mathbf{g}\theta_h^{i+1}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0, \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_h^{i+1}, q_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h^{i+1} \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0, \quad \forall q \in Q_h.$$

- **Algoritmo 3:** Se obtiene un campo de velocidades a divergencia nula mediante un post-proceso, dado por  $\mathbf{u}_h^p = \ell(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})$ .

- Actualización:

- $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}) = (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1})$ ,

- Si es necesario, en casos donde la presencia de recirculaciones ralentice la convergencia, se aplica el **Algoritmo 8**, que corresponde un proceso llamado “*damping*”, dado por una combinación convexa entre la solución obtenida en el paso  $i + 1$  y la obtenida en el paso  $i$ :

$$(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}) = (\mathbf{u}_h^i, p_h^i, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i}) + w_i(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}),$$

donde  $w_i \in [0, 1]$ .

- Si se cumple criterio de convergencia, se detiene la iteración de punto fijo.

- La solución es  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1})$ .

Notar que la solución entregada por este algoritmo  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1})$  no incluye un campo de velocidades a divergencia nula. Un campo de divergencia nula es obtenido sólo después de la aplicación del post-proceso descrito.

A continuación se presentan los algoritmos descritos anteriormente escritos en pseudo-código.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo de Punto Fijo y Refinamiento
 

---

**Input:** Una malla inicial  $\mathcal{T}_h^0$ , funciones  $\nu$  y  $\kappa$ , una tolerancia  $tol$  y funciones  $\mathbf{f}, \mathbf{g} = [g_1, g_2]$

y  $\xi$ .

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^0$$

2: **for**  $i = 0, \dots$  **do**

**if**  $i = 0$  **then**

4:      $\theta_h^0 = 0$

**else**

6:      $\theta_h^0$  es la interpolación de la solución  $\theta_h$  de la malla anterior en la nueva malla

**end if**

8:      $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0) = \text{Stokes}(\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h^0, \nu)$

$$\mathbf{u}_h^{p,0} = \text{PostProceso}(\mathcal{T}_h, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0))$$

10:    **if**  $g \in \mathbb{R}^d : \|g\| \geq 10^3$  **then**

$$(\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0, \mathbf{u}_h^{p,0}) = \text{Continuación}(\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h, \nu, \kappa, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0), \mathbf{u}_h^{p,0}, tol)$$

12:    **end if**

$$(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{u}_h^p) = \text{PuntoFijo}(\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \xi, \nu, \kappa, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0), \mathbf{u}_h^{p,0}, tol)$$

14:    **return**  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$

$$\text{return } |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{\Omega}, \|p_h - p\|_{0,\Omega} \text{ y } \|\theta_h - \theta\|_{0,\Omega}$$

16:     $\mathcal{T}_h = \text{refinación de } \mathcal{T}_h$

**end for**

**Output:**  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$

---



---

**Algoritmo 2**  $(\mathbf{u}_h, p_h) = \text{Stokes}(\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h, \nu)$ 


---

1: Calcular la solución  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h$  del sistema lineal

$$\mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h) + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f} + \mathbf{g}\theta_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket = 0, \quad \forall q_h \in Q_h$$

2: **return**  $(\mathbf{u}_h, p_h)$

---

---

**Algoritmo 3**  $\mathbf{u}_h^p = \text{PostProceso} (\mathcal{T}_h, (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h))$ 


---

- 1:  $\mathbf{u}_h^p = \mathbf{u}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_K} \tau_F \llbracket p_h \rrbracket \varphi_F$
  - 2: **return**  $\mathbf{u}_h^p$
- 

---

**Algoritmo 4**  $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0, \mathbf{u}_h^{p,0}) = \text{Continuación} (\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h, \nu, \kappa, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0), \mathbf{u}_h^{p,0}, \text{tol})$ 


---

- 1: Sea  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^N$ , donde  $10^3 \leq \|\mathbf{g}_i\| \leq \|\mathbf{g}_{i+1}\|$  y  $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}$ ,
  - 2: **for**  $i = 1, \dots, i = N$  **do**
  - 3:    $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{u}_h^p) = \text{PuntoFijo}(\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}_i, \xi, \nu, \kappa, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0), \mathbf{u}_h^{p,0}, \text{tol})$
  - 4:    $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0, \mathbf{u}_h^{p,0}) = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{u}_h^p)$
  - 5: **end for**
  - 6: **return**  $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0, \mathbf{u}_h^{p,0})$
- 

---

**Algoritmo 5**  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{u}_h^p) = \text{PuntoFijo} (\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \xi, \nu, \kappa, (\mathbf{u}_h^0, p_h^0, \theta_h^0), \mathbf{u}_h^{p,0}, \text{tol})$ 


---

- $i = 0$
  - 2: **while**  $\text{norma} < \text{tol}$  **do**
  - $\theta_h^{i+1} = \text{A-D} (\mathcal{T}_h, \xi, \kappa, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i})$
  - 4:    $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}) = \text{Oseen} (\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i}, \nu)$
  - $\mathbf{u}_h^{p,i+1} = \text{PostProceso}(\mathcal{T}_h, (\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}))$
  - 6:    $\text{norma} = \left( \frac{\|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|p_h^{i+1} - p_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|\theta_h^{i+1} - \theta_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2}{\|\mathbf{u}_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|p_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|\theta_h^i\|_{\mathbb{R}^d}^2} \right)^{1/2}$
  - En caso de ser necesario,
  - $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}) = \text{Damping} (\mathbf{u}_h^i, p_h^i, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i}, \mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1})$
  - 8:    $i = i + 1$
  - end while**
  - 10:  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{u}_h^p) = (\mathbf{u}_h^i, p_h^i, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i})$
  - return**  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$
-

---

**Algoritmo 6**  $\theta_h = \mathbf{A-D}$  ( $\mathcal{T}_h, \xi, \kappa, \varphi_h, \mathbf{u}_h^p$ )

---

1: Calcular la solución  $\theta_h$  del sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varphi_h; \theta_h, \psi_h) + \mathbf{c}(\mathbf{u}_h^p; \theta_h, \psi_h) + S_\theta(\theta_h, \psi_h) &= (\xi, \psi_h) \\ -\mathbf{a}(\varphi_h; i_h \theta_D, \psi_h) - \mathbf{c}(\mathbf{u}_h^p; i_h \theta_D, \psi_h) - S_\theta(i_h \theta_D, \psi_h), &\quad \forall \psi_h \in V_h \end{aligned}$$

2:  $\theta_h = \theta_h + i_h(\theta_D)$

3: **return**  $\theta_h$

---



---

**Algoritmo 7**  $(\mathbf{u}_h, p_h) = \mathbf{Oseen}$  ( $\mathcal{T}_h, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta_h, \mathbf{u}_h^p, \nu$ )

---

1: Calcular la solución  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^0 \times Q_h$  del sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h^p; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathcal{B}(\mathbf{v}_h, p_h) + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f} + \mathbf{g}\theta_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0 \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}_h, q_h) + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

2: **return**  $(\mathbf{u}_h, p_h)$

---



---

**Algoritmo 8**  $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}) = \mathbf{Damping}$   $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i}, \mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1})$ 


---

$$w_i = f(i) \in (0, 1)$$

$$(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1}) = (\mathbf{u}_h^i, p_h^i, \theta_h^i, \mathbf{u}_h^{p,i}) + w_i(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}, \theta_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{p,i+1})$$


---

### 4.1. Esquemas Estabilizados

En esta sección se detallará los diferentes esquemas estabilizados a implementar, creados a partir de esquemas estabilizados existentes en la literatura para las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de Advección-Difusión, para los espacios de elementos finitos  $\mathbb{P}^{1^2} \times \mathbb{P}^0$  y  $\mathbb{P}^1$  respectivamente.

#### 4.1.1. Esquemas estabilizados para las ecuaciones de Navier - Stokes

Recordar que con la discretización utilizada, la parte Navier-Stokes del problema es

$$\int_{\Omega} \nu(\theta_h) \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h + \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \int_F \llbracket p_h \rrbracket \llbracket q_h \rrbracket + S_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \theta_h \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}_h, \quad (4.1.1)$$

$$(4.1.2)$$

Para el término estabilizador  $S_u$  se consideran los siguientes casos:

- $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . Esto significa que sólo se considera la acción estabilizadora del término de salto de presión, lo que equivale al método propuesto en [6]. En este caso no es necesario verificar que se cumplan las propiedades exigidas a  $S_u$  en la Sección 3.2.

■

$$S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mu_K (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_K, \quad (4.1.3)$$

donde  $\mu_K$  es tal que

$$\mu_K \sim h_K.$$

Ahora, es necesario comprobar que la forma  $S_u$  dada por (4.1.3) cumpla las propiedades descritas en la sección 3.2. No es difícil ver que  $S_u$  es una forma bilineal, simétrica y semi-definida positiva.

Ahora, sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ , de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales y sumatorias se tiene

$$\begin{aligned} S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mu_K \|\mathbf{k}_h \nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mu_K \|\mathbf{k}_h \nabla \cdot \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq S_u(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} S_u(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}. \end{aligned}$$

Con esto, se tiene (3.2.2). Las propiedades (3.2.4) y (3.2.5) pueden hallarse en [51, Lema 4.6] y [51, Teorema 4.8] respectivamente.

#### 4.1.2. Esquemas estabilizados para la ecuación de Advección-Difusión

Recordar que con la discretización utilizada, la parte correspondiente a la ecuación de Advección Difusión es:

$$\int_{\Omega} \kappa(\theta_h) \nabla \theta_h \cdot \nabla \psi_h + \int_{\Omega} \ell(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \nabla \theta_h \psi_h + S_{\theta}(\theta_h, \psi_h) = \int_{\Omega} \xi \psi_h, \quad (4.1.4)$$

$$\theta_h = i_h(\theta_D) \text{ en } \Gamma,$$

Para este trabajo, se considera  $S_{\theta}$  dado por:

$$S_{\theta}(\theta, \psi) = \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \bar{\tau}_F \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \theta]] [[\partial_{\mathbf{n}} \psi]], \quad (4.1.5)$$

donde  $\bar{\tau}_F = h_F^2$  y para todo  $F \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}'_K$

$$[[\partial_{\mathbf{n}} \theta]] = \nabla \theta|_K \cdot \mathbf{n}_F^K + \nabla \theta|_{K'} \cdot \mathbf{n}_F^{K'}.$$

Este esquema equivale al método *Edge-Stabilization* propuesto en [19].

Ahora, es necesario probar que  $S_{\theta}$  dada en (4.1.5) cumple todas las propiedades especificadas en 3.2.

En primer lugar, es claro que  $S_{\theta}$  es una forma bilineal, simétrica y semidefinida positiva. Ahora, sean  $\theta, \psi \in H^1(\Omega)$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales y sumatorias se tiene

$$\begin{aligned} |S_{\theta}(\theta, \psi)| &= \left| \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \bar{\tau}_F \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \theta]] [[\partial_{\mathbf{n}} \psi]] \right| \\ &\leq \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \bar{\tau}_F^{1/2} \left( \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \theta]]^2 \right)^{1/2} \bar{\tau}_F^{1/2} \left( \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \psi]]^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \bar{\tau}_F \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \theta]]^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_I} \bar{\tau}_F \int_F [[\partial_{\mathbf{n}} \psi]]^2 \right)^{1/2} \\ &= S_{\theta}(\theta, \theta)^{1/2} S_{\theta}(\psi, \psi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, se cumple (3.2.3). Ahora se probará (3.2.4). Sea  $\psi \in H^2(\Omega)$ . Notar que  $\partial_{\mathbf{n}}\psi \in H^1(\Omega)$ . Entonces,

$$[[\partial_{\mathbf{n}}\psi]] = 0.$$

Luego,

$$S_{\theta}(\psi, \psi) = 0,$$

por lo que la propiedad (3.2.4) se satisface. La propiedad (3.2.5) puede encontrarse en [19, Lema 8].

## 4.2. Ejemplos numéricos

En esta sección se especifican los ejemplos utilizados para testear el método y los resultados correspondientes. Primero se muestran resultados para soluciones con condición Dirichlet para la velocidad y la temperatura, en los cuales las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\xi$  son escogidas para que las soluciones exactas del problema sean conocidas. En estos casos se muestran vistas gráficas de las soluciones numéricas obtenidas además de gráficos de convergencia del error. Luego, se mostrarán resultados para ejemplos (ejemplos 6 y 7) que se escapan de la teoría estudiada, donde el lado derecho del sistema es homogéneo, pero se tiene una temperatura con condición Dirichlet en un subconjunto de la frontera y condición Neumann en otro. Además, en el ejemplo 6, la ecuación de fluidos corresponde a una ecuación de Stokes. El ejemplo 6 es tomado de [38] con el fin de comparar el desempeño de ambos métodos; mientras que el ejemplo 7 es tomado de [50]. En estos ejemplos las soluciones exactas no son conocidas, por lo que los resultados obtenidos son validados a partir de la comparación con los resultados obtenidos en las respectivas referencias de las cuales fueron tomados dichos ejemplos. En todos los casos se ha escogido  $\mathbf{g} = (0, 1)$ , a excepción de los ejemplos 6 y 7, donde  $\mathbf{g} = (0, Ra)$ , donde  $Ra$  es el número de Rayleigh.

Los primeros 4 ejemplos son realizados sobre refinaciones regulares de la malla inicial del dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  dada en la Figura 4.1 (a). El ejemplo 5 es realizado sobre

refinaciones regulares de la malla inicial del dominio  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  dada en la Figura 4.1 (b).

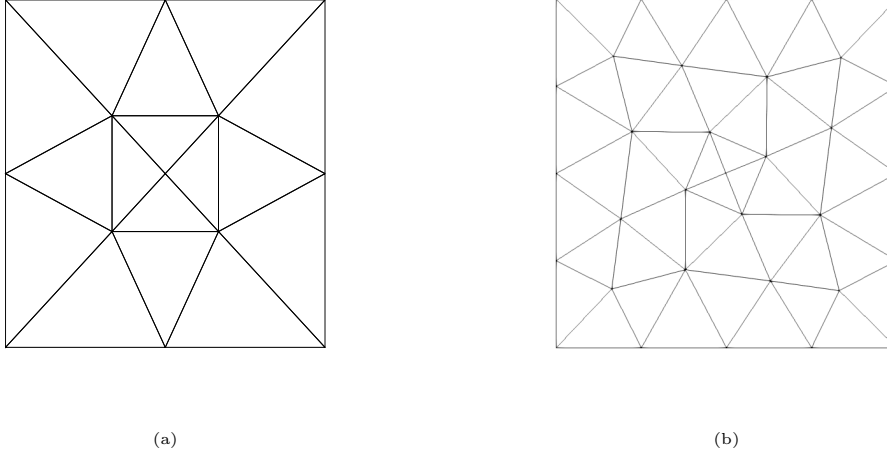


Fig. 4.1: (a): Malla inicial para el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , utilizada en los ejemplos 1,2,3,4.  
 (b): Malla inicial para el dominio  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ , utilizada en el ejemplo 5.

Todos los resultados mostrados fueron obtenidos considerando  $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  y  $S_\theta$  dado por (4.1.5). Además, en el ejemplo 5, se muestran resultados de convergencia y valores de la divergencia para una solución obtenida considerando  $S_u$  dado por (4.1.3).

En cada ejemplo se muestran representaciones gráficas de las soluciones numéricas obtenidas junto a las soluciones analíticas, además de gráficos que muestran la convergencia de las soluciones numéricas utilizando el error medido en las normas correspondientes.

Para esta sección se define la siguientes normas, conocidas como “norma energía”:

$$\|\mathbf{u}\|_\Omega^2 = \nu_0 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$\|\theta\|_\Omega^2 = \kappa_0 |\theta|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega).$$

Además, se define la siguiente norma dependiente de la malla para la solución completa

del método:

$$\|(\mathbf{u}, p, \theta)\|_{\mathcal{T}_h}^2 = \|(\mathbf{u}, p)\|_{N(\mathcal{T})}^2 + \|\theta\|_{T(\mathcal{T})}^2, \quad \forall(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{T}_h) \times H_0^1(\mathcal{T}_h) \times H^1(\Omega).$$

Se denotaran los errores en cada variable como sigue:

$$\mathbf{e}^u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{e}^{u,p} = \mathbf{u} - \ell(\mathbf{u}_h, p_h), e^p = p - p_h, e^\theta = \theta - \theta_h.$$

Los resultados fueron obtenidos a partir de códigos realizados en el lenguaje C++, donde la resolución de sistemas lineales se hizo utilizando el solver de sistemas sparse MUMPS [2], las integraciones numéricas fueron realizadas utilizando reglas de cuadratura de Gauss, y los resultados gráficos fueron hechos con Matlab ([34]) en el caso de la visualización de los errores y con ParaView [35] en el caso de la visualización de las soluciones. En estas visualizaciones, *Ndof* denotará los grados de libertad del sistema. Para las iteraciones de punto fijo, se utilizó una tolerancia  $tol = 10^{-9}$  (ver **Algoritmo 5**).

---

### 4.2.1. Ejemplos con condiciones de frontera Dirichlet

#### Ejemplo 1

Se toma el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , y se escoge  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\theta_D$  tal que

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2y(2y - 1)(x - 1)^2(y - 1) \\ -2xy^2(2x - 1)(x - 1)(y - 1)^2 \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = e^y(x - 0,5)^3, \quad \theta(x, y) = x^2 + y^4,$$

$$\nu(\theta) = e^{-\theta}, \quad \kappa(\theta) = e^\theta.$$

En la Tabla 4.1 se muestra que la solución no conforme es a divergencia nula en todo  $\Omega$  para cada malla, en comparación al valor de la divergencia para  $\mathbf{u}_h$ . En las Figuras 4.2 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 1 y en la Figura 4.3 se muestran gráficas con los errores obtenidos en cada malla en distintas normas comparados con la convergencia predicha en la teoría.

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
55	0.00131	2.17e-19
127	0.000724	5.42e-19
263	0.000305	1.08e-18
566	0.000204	3.25e-19
1214	5.39e-05	4.34e-19
2594	3.89e-05	2.71e-19
5536	8.96e-06	2.78e-19
11845	6.01e-06	4.47e-19
25187	1.59e-06	1.97e-19
53749	8.31e-07	1.47e-19
114164	2.36e-07	1.49e-19
242747	1.09e-07	3.52e-19
518718	3.2e-08	1.1e-19
1109023	1.39e-08	6.78e-20

Tab. 4.1: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 1 en cada elemento para cada malla.

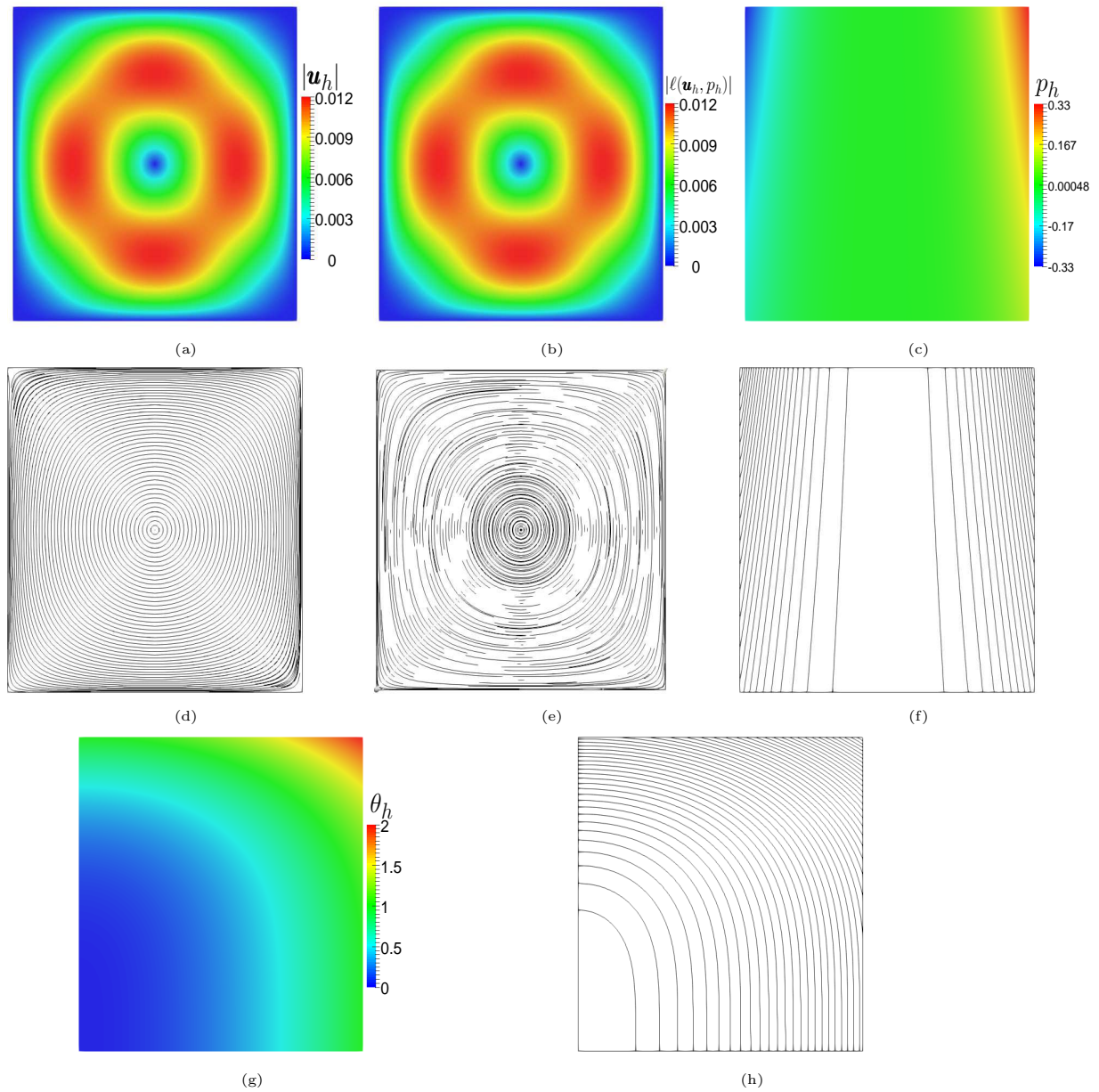


Fig. 4.2: Solución de elementos finitos para el ejemplo 1: (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$  respectivamente; (d) y (e) representan las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  respectivamente; (c) y (g) son las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente; (f) y (h) muestran las líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$ . La malla utilizada está conformada por 222014 nodos y 442981 elementos.

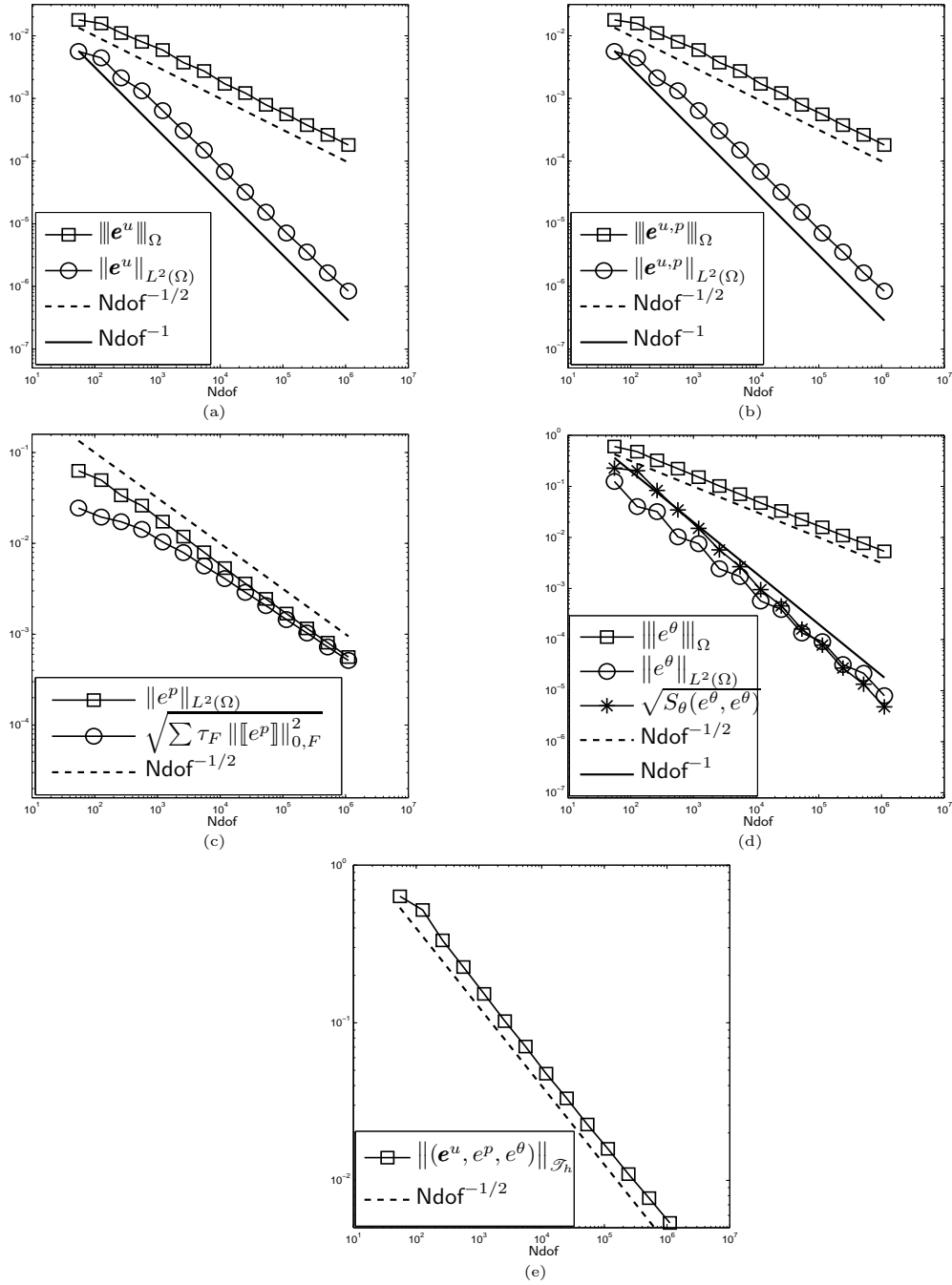


Fig. 4.3: Gráficas de convergencia para el ejemplo 1: (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[e^p]\|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(\mathbf{e}^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{F}_h}$ .

*Ejemplo 2*

Se toma el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , y se escoge  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\theta_D$  tal que

$$\mathbf{u}(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial y} \quad -\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T, \text{ donde } h(x, y) = \left( y(y-1) \left( x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\nu}} - e^{-\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{-\frac{1}{\nu}}} \right) \right)^2,$$

$$p(x, y) = x^2 y^2 (x-1)(y-1) - 1/144, \quad \theta(x, y) = xy(x-1)(y-1).$$

Este caso es testado considerando  $\kappa = 1$  fijo y  $\nu = 10^{-2}$ . De esta manera se puede ver el comportamiento del método ante la aparición de capas límites en la velocidad. De esta forma, se puede ver de manera aislada el desempeño de los términos estabilizadores para las ecuaciones de Navier-Stokes.

En la Tabla 4.2 se muestra que la solución no conforme es a divergencia nula en todo  $\Omega$  para cada malla, en comparación al valor de la divergencia para  $\mathbf{u}_h$ . En las Figuras 4.4 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 2 y en la Figura 4.5 se muestran gráficas con los errores obtenidos en cada malla en distintas normas comparados con la convergencia predicha en la teoría.

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
55	0.000452	1.14e-18
127	0.000547	1.9e-18
263	0.000542	1.19e-18
566	0.000504	1.08e-18
1214	0.000518	5.2e-18
2594	0.000452	3.47e-18
5536	0.00075	4.34e-18
11845	0.000992	4.34e-18
25187	0.000945	1.1e-17
53749	0.000863	9.54e-18
114164	0.000644	1.04e-17
242747	0.000423	2.31e-17
518718	0.000226	2.54e-17
1109023	0.000112	1.96e-17
2386416	4.91e-05	1.26e-17

Tab. 4.2: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la ddivergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 2 en cada elemento para cada malla.

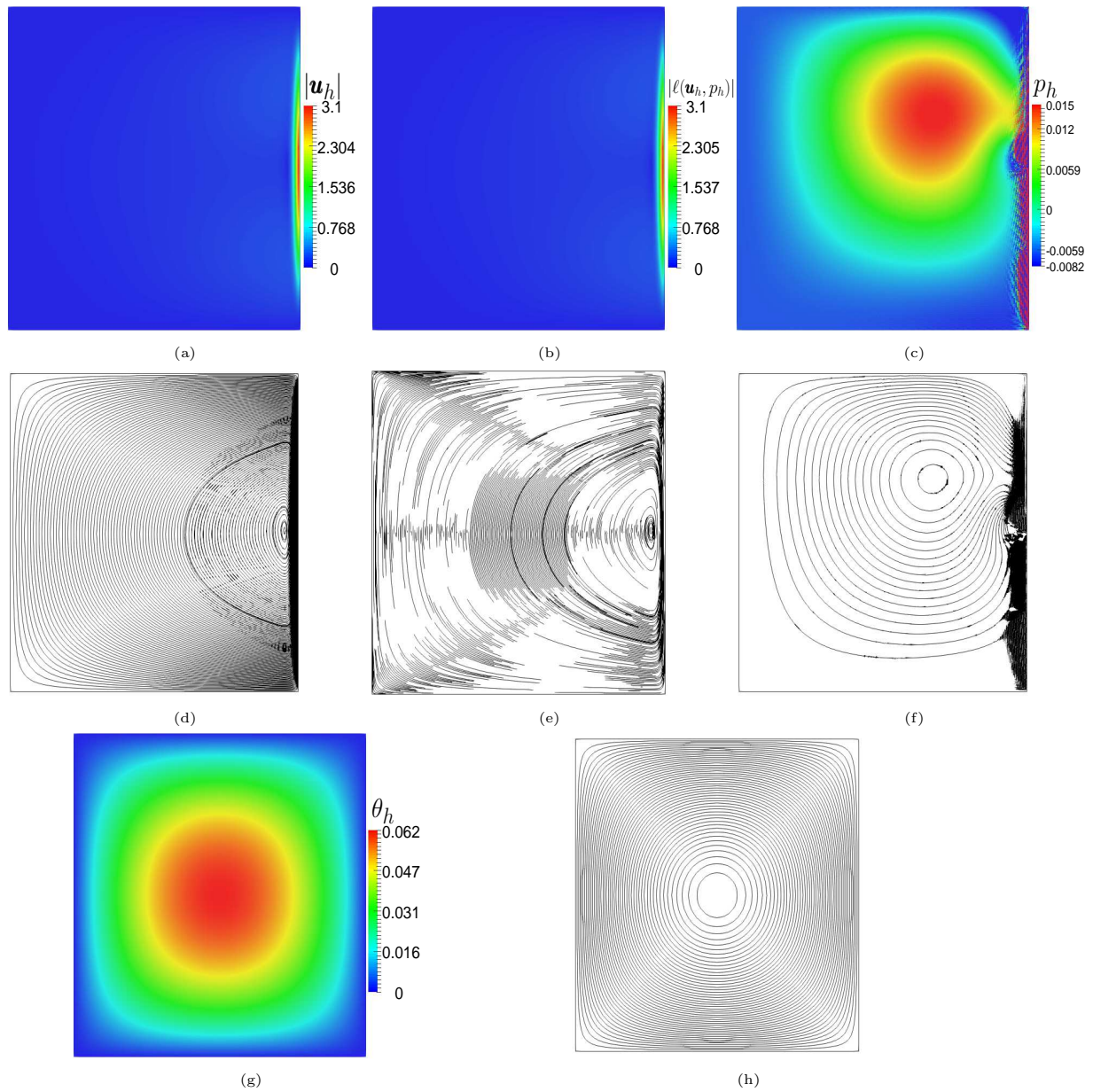


Fig. 4.4: Solución de elementos finitos para el ejemplo 2: (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$  respectivamente; (d) y (e) representan las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  respectivamente; (c) y (g) son las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente; (f) y (h) muestran las líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$ . La malla utilizada está conformada por 477599 nodos y 953619 elementos.

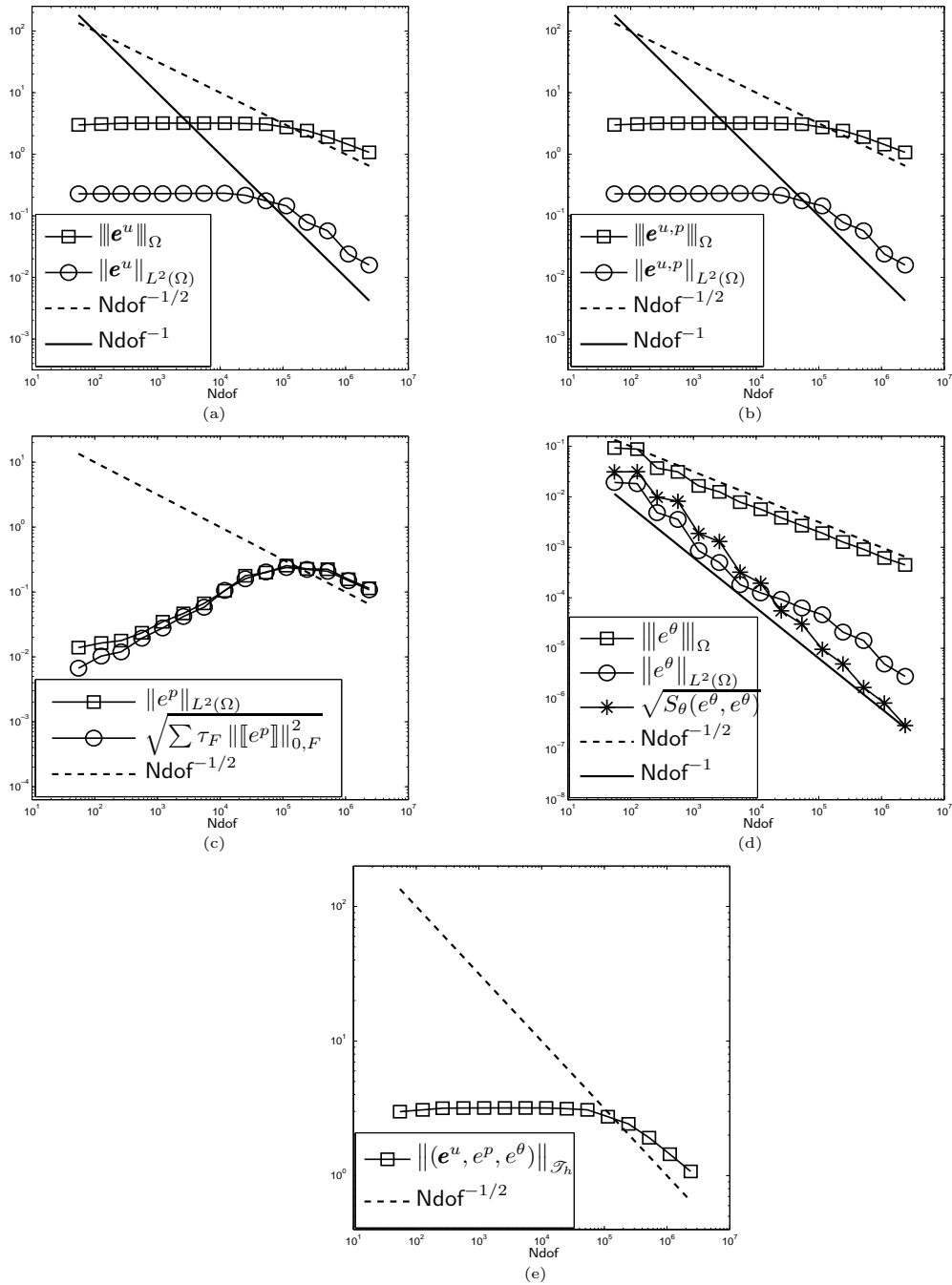


Fig. 4.5: Gráficas de convergencia para el ejemplo 2: (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[[e^p]]\|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(e^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{F}_h}$ .

### Ejemplo 3

Se toma el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , y se escoge  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\theta_D$  tal que

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2y(2y-1)(x-1)^2(y-1) \\ -2xy^2(2x-1)(x-1)(y-1)^2 \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = x^2y^2(x-1)(y-1) - 1/144, \quad \theta(x, y) = y(y-1) \left( x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\nu}} - e^{-\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{-\frac{1}{\nu}}} \right).$$

Este caso es testeado considerando  $\nu = 1$  fijo y los casos cuando  $\kappa = 10^{-2}$ . De esta manera se puede ver el comportamiento del método ante la aparición de capas límites en la temperatura. De esta manera, se puede ver de manera aislada el desempeño de los términos estabilizadores para la ecuación de Advección-Difusión.

En la Tabla 4.3 se muestra que la solución no conforme es a divergencia nula en todo  $\Omega$  para cada malla, en comparación al valor de la divergencia para  $\mathbf{u}_h$ . En las Figuras 4.6 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 3 y en la Figura 4.7 se muestran gráficas con los errores obtenidos en cada malla en distintas normas comparados con la convergencia predicha en la teoría.

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
55	0.00175	4.34e-19
127	0.000793	1.25e-18
263	0.00038	4.34e-19
566	0.000194	5.56e-19
1214	6.4e-05	3.79e-19
2594	3.05e-05	3.79e-19
5536	9.22e-06	2.17e-19
11845	4.45e-06	2.85e-19
25187	1.35e-06	1.9e-19
53749	6.06e-07	1.36e-19
114164	1.74e-07	1.32e-19
242747	7.92e-08	1.25e-19
518718	2.19e-08	1.12e-19
1109023	1.01e-08	7.79e-20

Tab. 4.3: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 3 en cada elemento para cada malla.

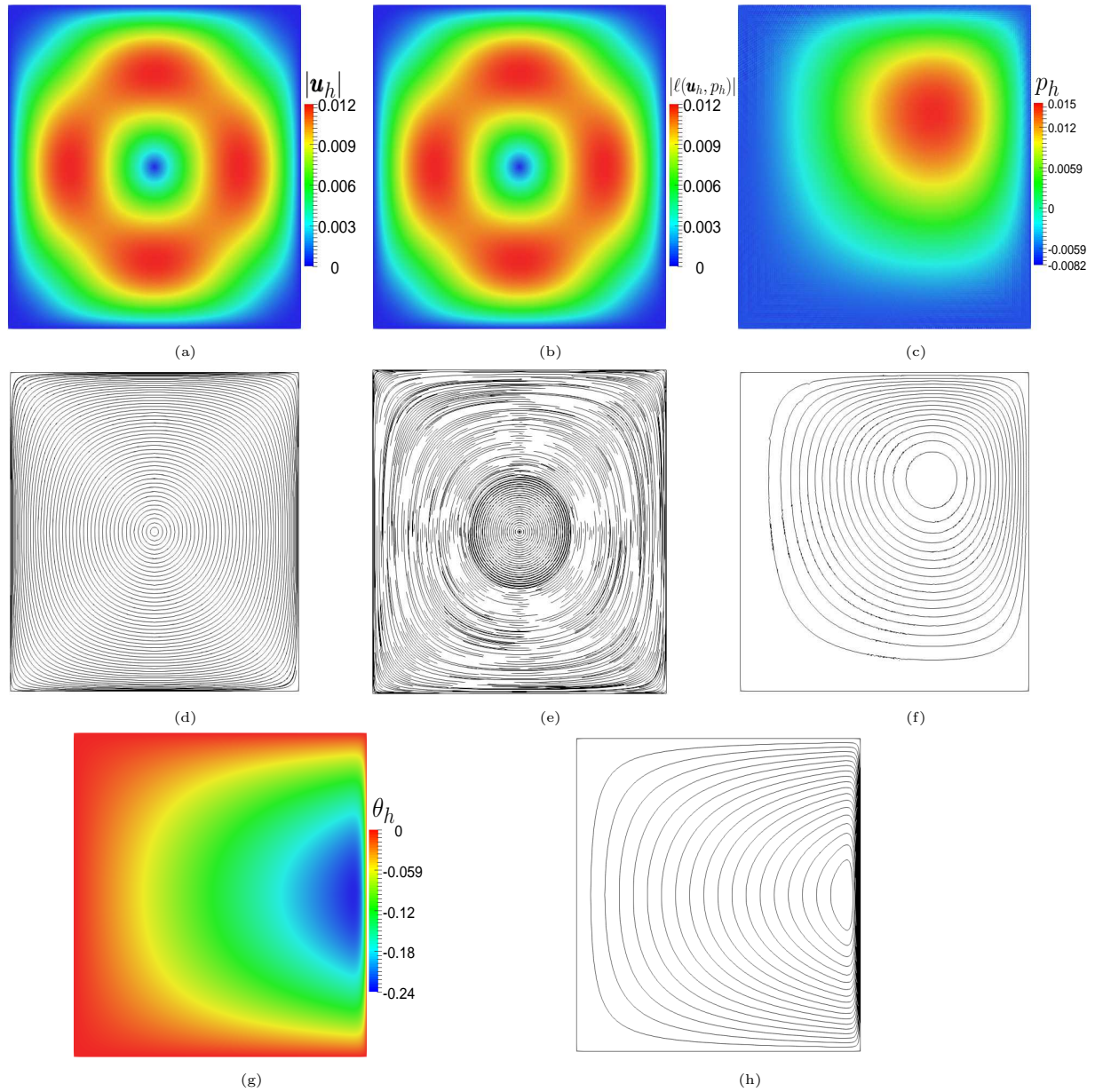


Fig. 4.6: Solución de elementos finitos para el ejemplo 3: (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$  respectivamente; (d) y (e) representan las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  respectivamente; (c) y (g) son las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente; (f) y (h) muestran las líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$ . La malla utilizada está conformada por 222014 nodos y 442981 elementos.

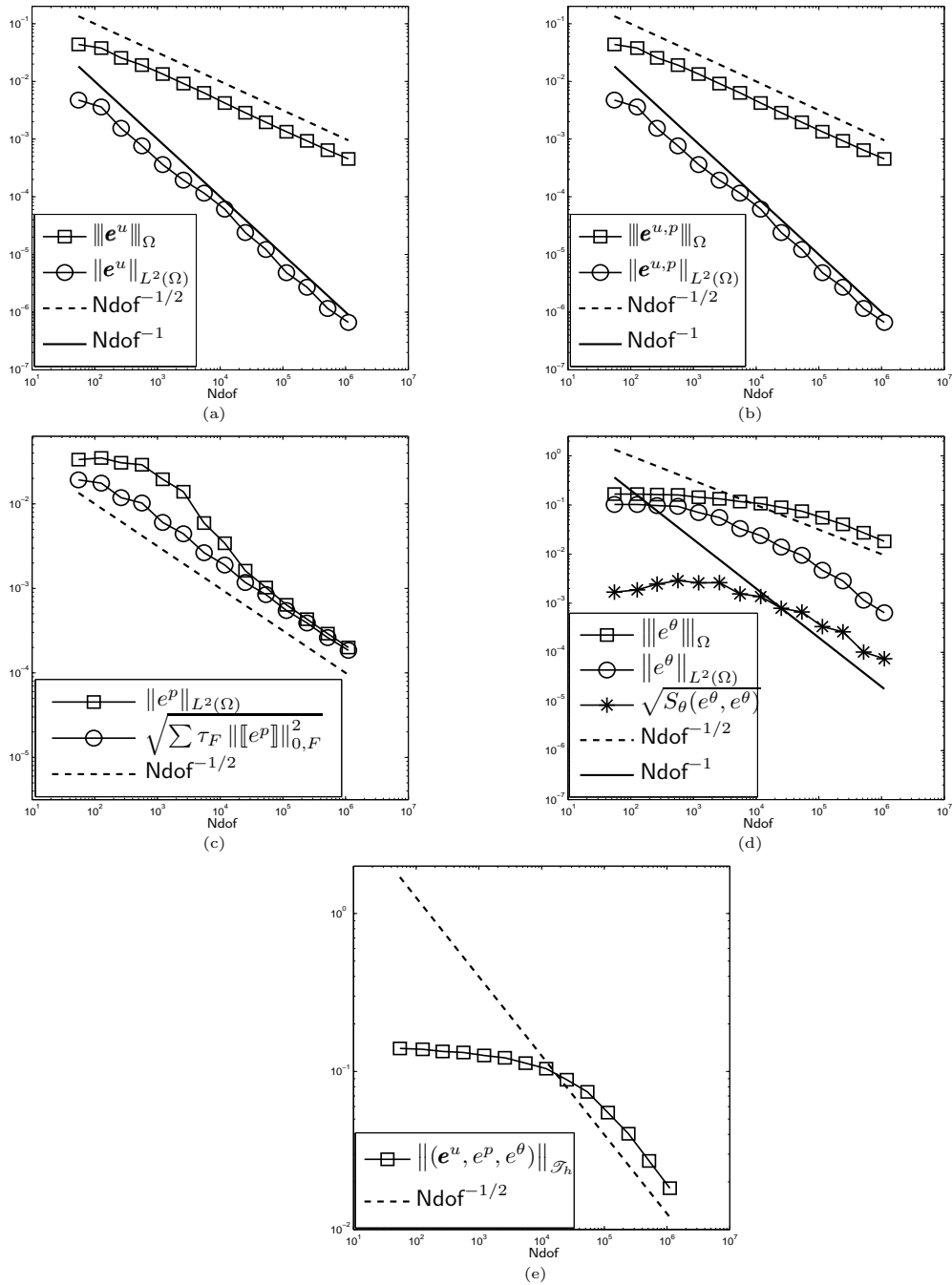


Fig. 4.7: Gráficas de convergencia para el ejemplo 3: (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \| [e^p] \|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(e^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{T}_h}$ .

## Ejemplo 4

Se toma el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , y se escoge  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\theta_D$  tal que

$$\mathbf{u}(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial y} \quad -\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T, \quad \text{donde } h(x, y) = \left( y(y-1) \left( x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\nu}} - e^{-\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{-\frac{1}{\nu}}} \right) \right)^2,$$

$$p(x, y) = x^2 y^2 (x-1)(y-1) - 1/144, \quad \theta(x, y) = y(y-1) \left( x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\nu}} - e^{-\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{-\frac{1}{\nu}}} \right).$$

Este caso es testado considerando  $\nu = \kappa = 10^{-2}$ . De esta manera se puede ver el comportamiento del método ante la aparición de capas límites tanto en la velocidad como en la temperatura. De esta forma, se puede ver de manera conjunta el desempeño de los términos estabilizadores para las ecuaciones de Navier-Stokes y de Advección-Difusión.

En la Tabla 4.4 se muestra que la solución no conforme es a divergencia nula en todo  $\Omega$  para cada malla, en comparación al valor de la divergencia para  $\mathbf{u}_h$ . En las Figuras 4.8 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 4 y en la Figura 4.9 se muestran gráficas con los errores obtenidos en cada malla en distintas normas comparados con la convergencia predicha en la teoría.

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
55	0.00127	2.17e-18
127	0.0006	4.34e-18
263	0.000943	3.04e-18
566	0.000514	3.9e-18
1214	0.000621	5.2e-18
2594	0.000455	6.94e-18
5536	0.000761	3.9e-18
11845	0.000983	8.67e-18
25187	0.000949	1.25e-17
53749	0.000863	9e-18
114164	0.000645	2.26e-17
242747	0.000423	2.14e-17
518718	0.000226	1.08e-17
1109023	0.000112	6.23e-17
2386416	4.91e-05	9.78e-18
5145533	2.03e-05	1.06e-17

Tab. 4.4: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 4 en cada elemento para cada malla.

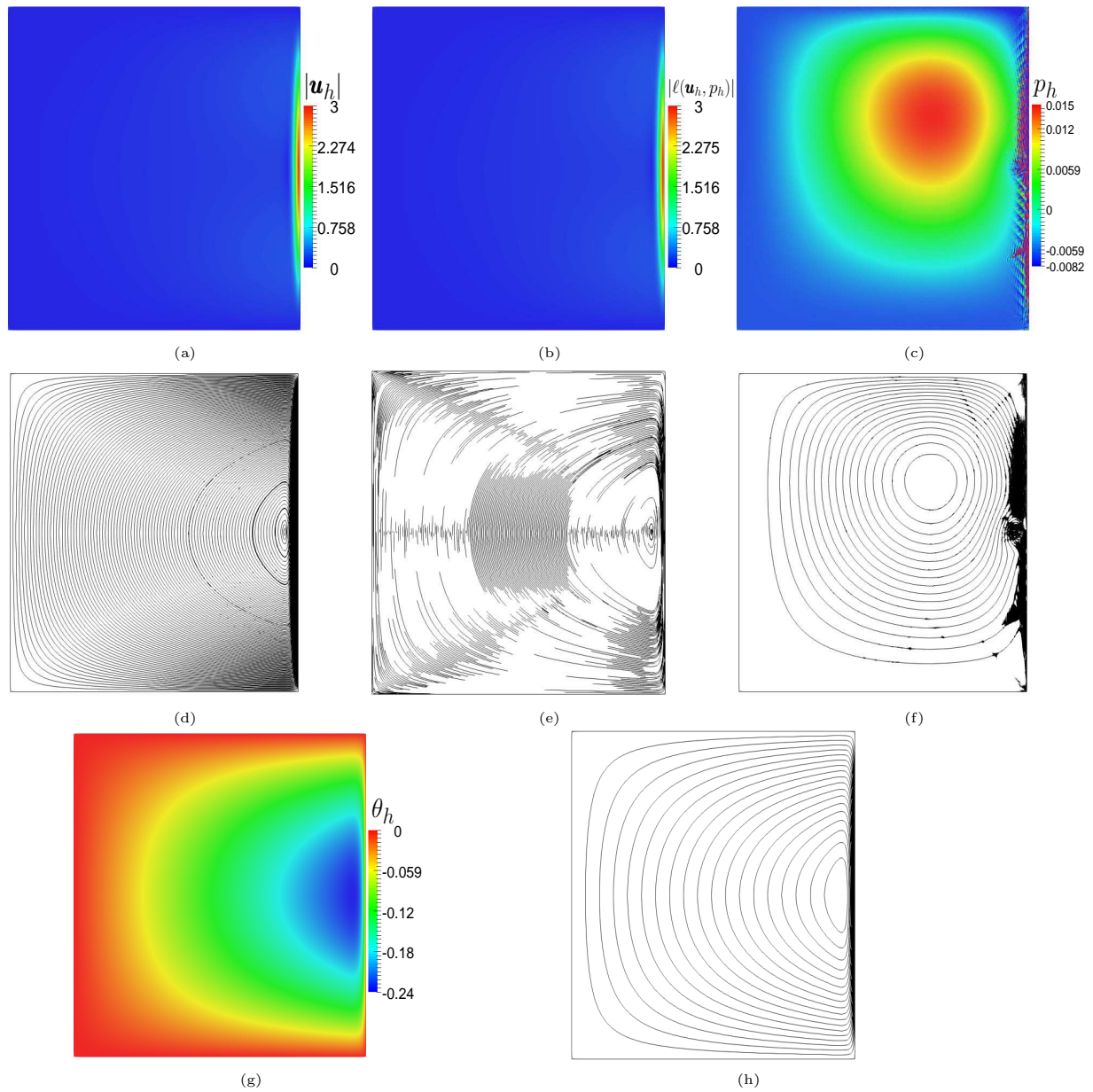


Fig. 4.8: Solución de elementos finitos para el ejemplo 4: (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$  respectivamente; (d) y (e) representan las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  respectivamente; (c) y (g) son las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente; (f) y (h) muestran las líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$ . La malla utilizada está conformada por 1029526 nodos y 2056955 elementos.

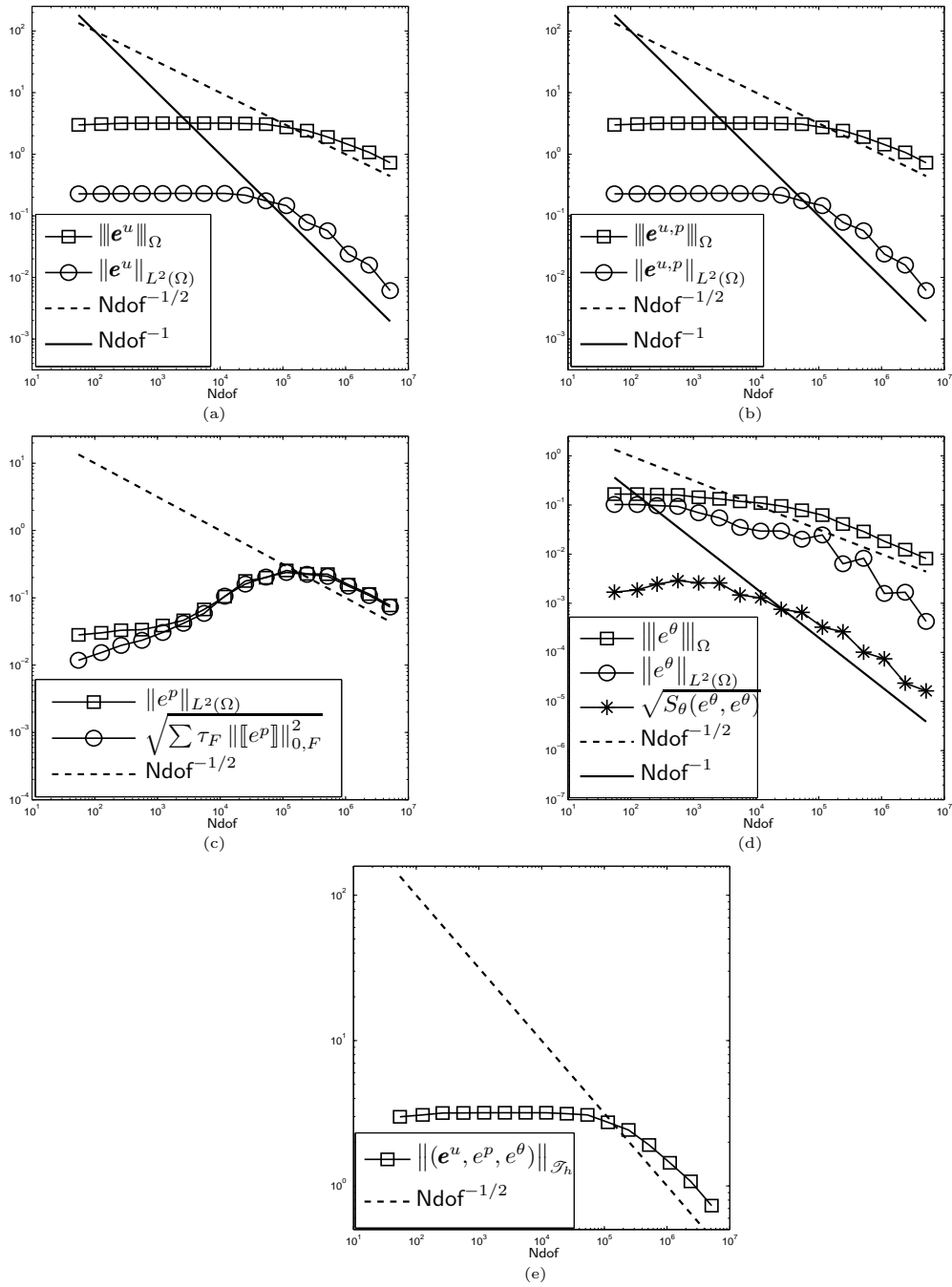


Fig. 4.9: Gráficas de convergencia para el ejemplo 4: (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[[e^p]]\|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(e^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{F}_h}$ .

---

*Ejemplo 5*

Se toma el dominio  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ , y se escoge  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\theta_D$  tal que

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \end{pmatrix},$$
$$p(x, y) = \sin(xy), \quad \theta(x, y) = 5 \cos(\pi xy),$$
$$\nu(\theta) = e^{-\theta}, \quad \kappa(\theta) = e^{\theta}.$$

En la Tabla 4.5 se muestra que la solución no conforme es a divergencia nula en todo  $\Omega$  para cada malla, en comparación al valor de la divergencia para  $\mathbf{u}_h$ . En las Figuras 4.10 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 5 y en las Figura 4.11 y 4.12 se muestran gráficas con los errores obtenidos en cada malla en distintas normas comparados con la convergencia predicha en la teoría.

Ndof	$S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$		$S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum h_K(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})$	
	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K$	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K$	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K$	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K$
147	0.147	1.39e-16	0.141	2.01e-16
335	0.0533	1.8e-16	0.042	1.11e-16
727	0.0122	1.67e-16	0.012	1.48e-16
1583	0.00393	5.72e-16	0.00338	9.02e-17
3367	0.00164	1.32e-16	0.00158	1.39e-16
7119	0.000554	1.67e-16	0.000549	1.18e-16
14767	0.000178	1.01e-16	0.000175	7.98e-17
30411	6.87e-05	1.7e-16	6.82e-05	5.9e-17
62027	2e-05	5.9e-17	1.93e-05	5.9e-17
125995	6.36e-06	8.63e-17	5.33e-06	3.64e-17
254627	2.58e-06	7.63e-17	2.32e-06	2.95e-17
513403	8.72e-07	1.2e-16	6.76e-07	3.12e-17
1032387	3.24e-07	4.16e-17	2.93e-07	2.17e-17
2073419	1.13e-07	6.05e-17	8.82e-08	2.1e-17
4158387	4.05e-08	2.73e-17	3.67e-08	1.24e-17

Tab. 4.5: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 5 en cada elemento para cada malla, para diferentes elecciones del término  $S_u$ .

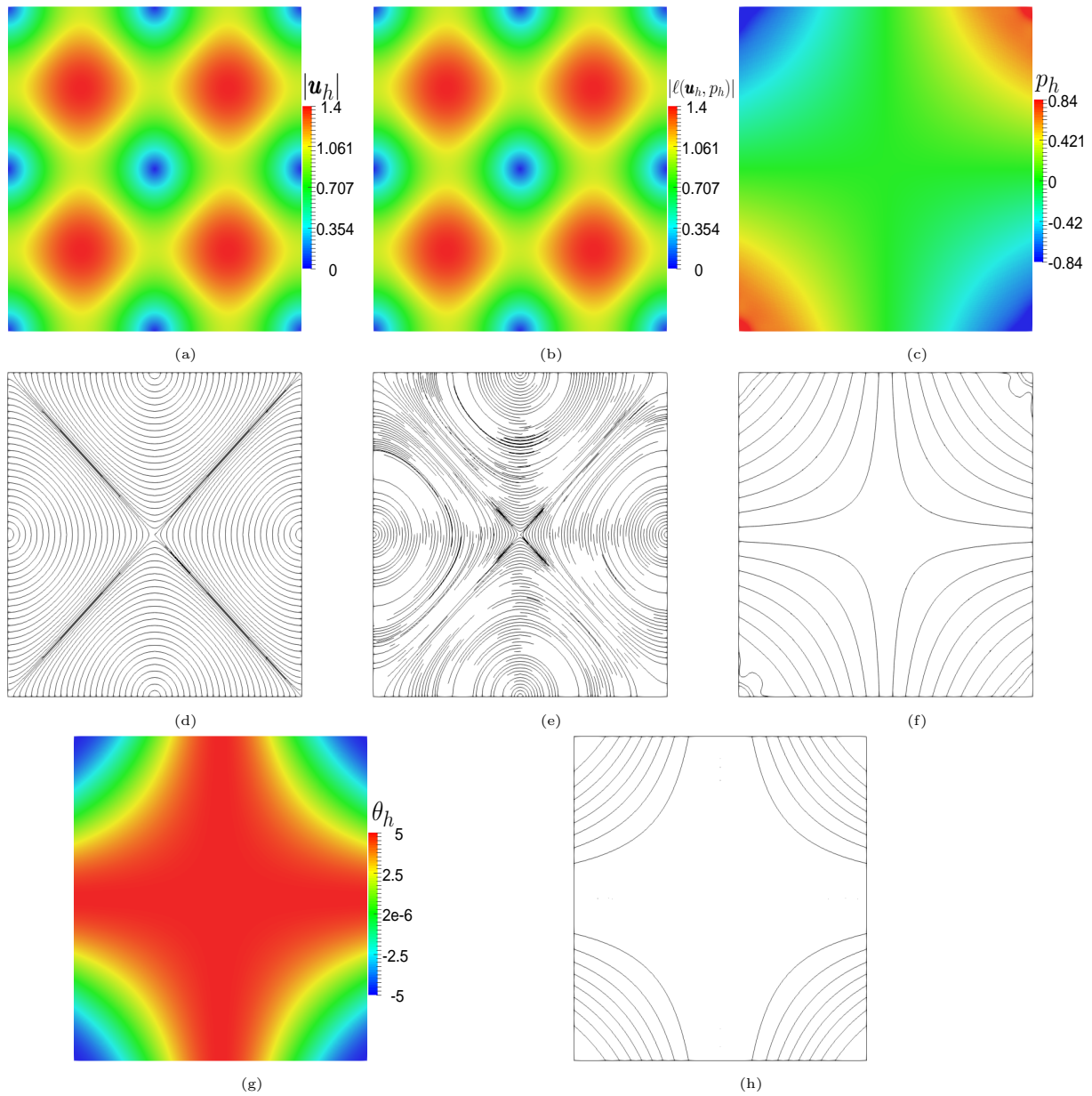


Fig. 4.10: Solución de elementos finitos para el ejemplo 5: (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|u_h|$  y  $|l(u_h, p_h)|$  respectivamente; (d) y (e) representan las líneas de campo de  $u_h$  y  $l(u_h, p_h)$  respectivamente; (c) y (g) son las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente; (f) y (h) muestran las líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$ . La malla utilizada está conformada por 832189 nodos y 1661820 elementos.

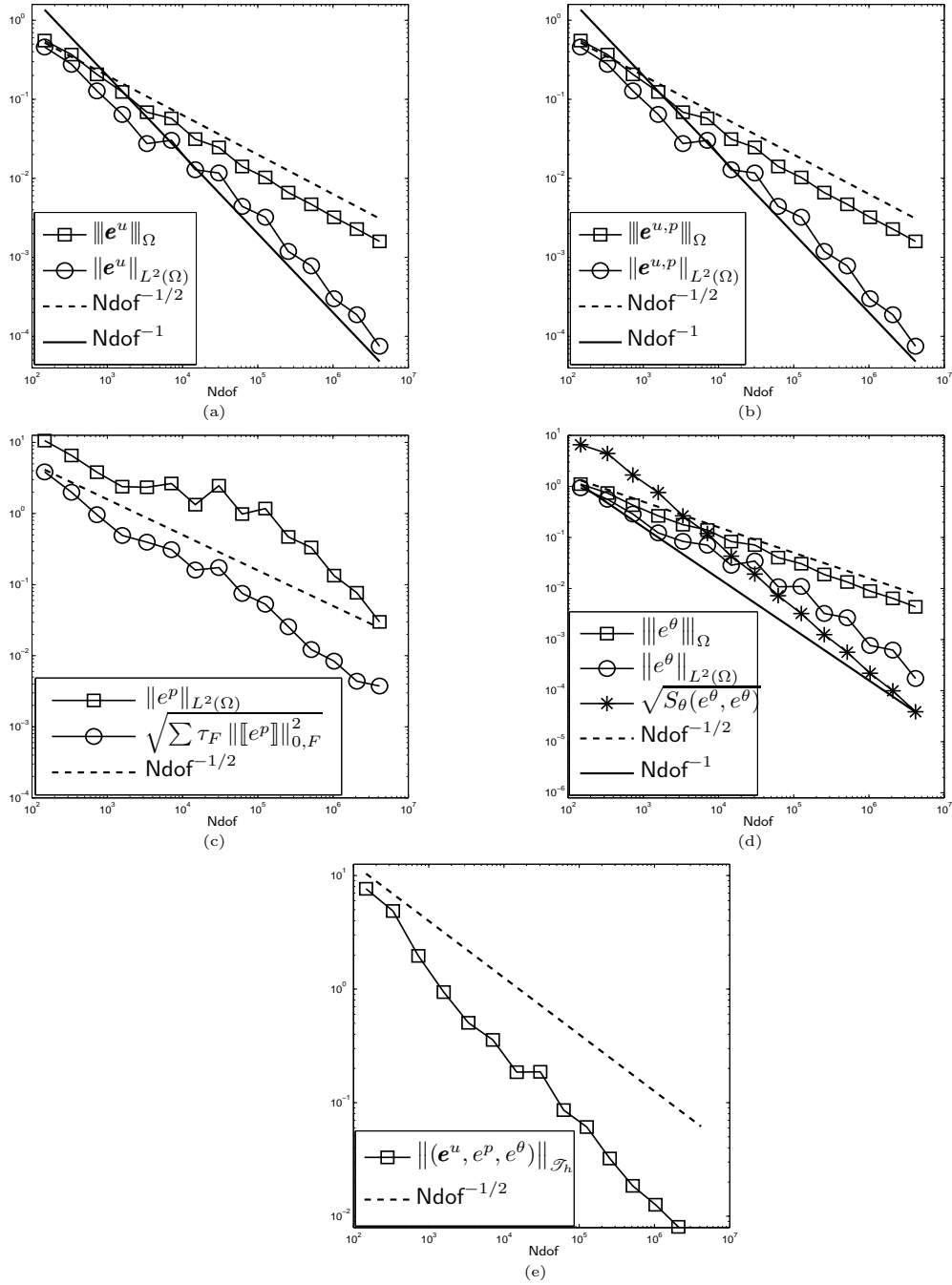


Fig. 4.11: Gráficas de convergencia para el ejemplo 5, donde  $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ : (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \|[e^p]\|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(e^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{T}_h}$ .

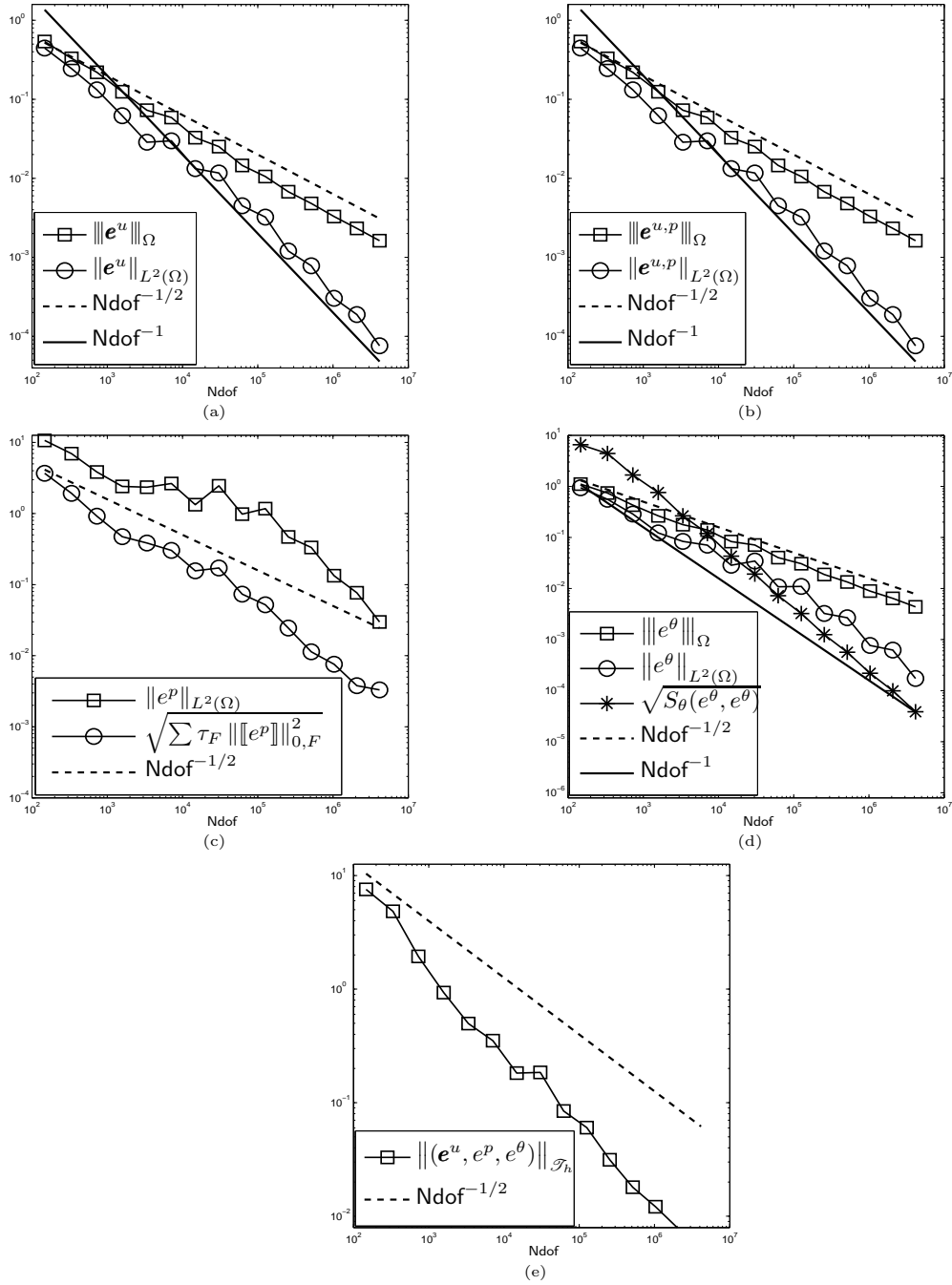


Fig. 4.12: Gráficas de convergencia para el ejemplo 5, donde  $S_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum h_K (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})$ : (a) y (b) muestran convergencia en norma  $L^2$  y energía de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (c) muestra convergencia para  $p_h$  en norma  $L^2$  y considerando el término de salto  $\sum_{F \in \mathcal{E}_I} \tau_F \| [e^p] \|_{0,F}^2$ ; (d) muestra convergencia de  $\theta_h$  en norma  $L^2$  y energía, y el valor de  $S_\theta(e^\theta, e^\theta)$ ; (e) muestra convergencia en la norma  $\|(e^u, e^p, e^\theta)\|_{\mathcal{F}_h}$ .

### 4.2.2. Ejemplos adicionales

#### Ejemplo 6

El siguiente ejemplo es tomado de [38], en donde se implementa una estabilización grad-div para la ecuación de stokes. Se considera el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , y el siguiente problema:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= (0 \ Ra)^T\theta && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\kappa\Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta &= 0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

con condiciones de frontera dadas por la Figura 4.13.

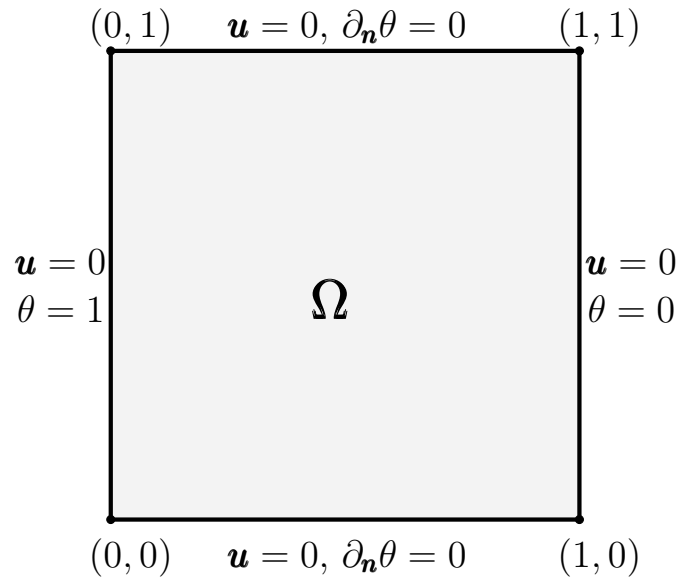


Fig. 4.13: Condiciones de contorno para el problema analizado en el ejemplo 6 y 7.

Aquí,  $\nu = \kappa = 1$  y  $Ra$  es el número de Rayleigh, el cual está asociado a la transferencia de calor dentro del fluido. Si  $Ra$  es un número pequeño, la transferencia de calor es principalmente por conducción, pero si  $Ra > 1000$  comienza a dominar la transferencia por convección.

En [38], el problema es resuelto usando espacios de elementos finitos de Taylor-Hood, y una

iteración de Newton para la resolución del sistema no lineal. Debido a características del problema, es necesario acelerar la convergencia del método de punto fijo en la implementación del método del presente trabajo. Esto se hace con una modificación de la solución del paso anterior llamada “*damping*”, y considerando como criterio de convergencia el error entre pasos consecutivos, en lugar del error relativo entre pasos consecutivos. Por ello, para la resolución de este problema el Algoritmo 5 incluye la realización del Algoritmo 8.

En la Figura 4.14 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 6, donde  $Ra = 10^5$ . En las Figuras 4.15 y 4.16 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 6, donde  $Ra = 10^6$ . Además, para este  $Ra = 10^4$  se comparó el valor máximo que alcanza el valor absoluto de la divergencia en cada elemento en cada malla resuelta, tanto para  $u_h$  y  $u_h^p$ . Esta comparación es mostrada en la Tabla 4.6.

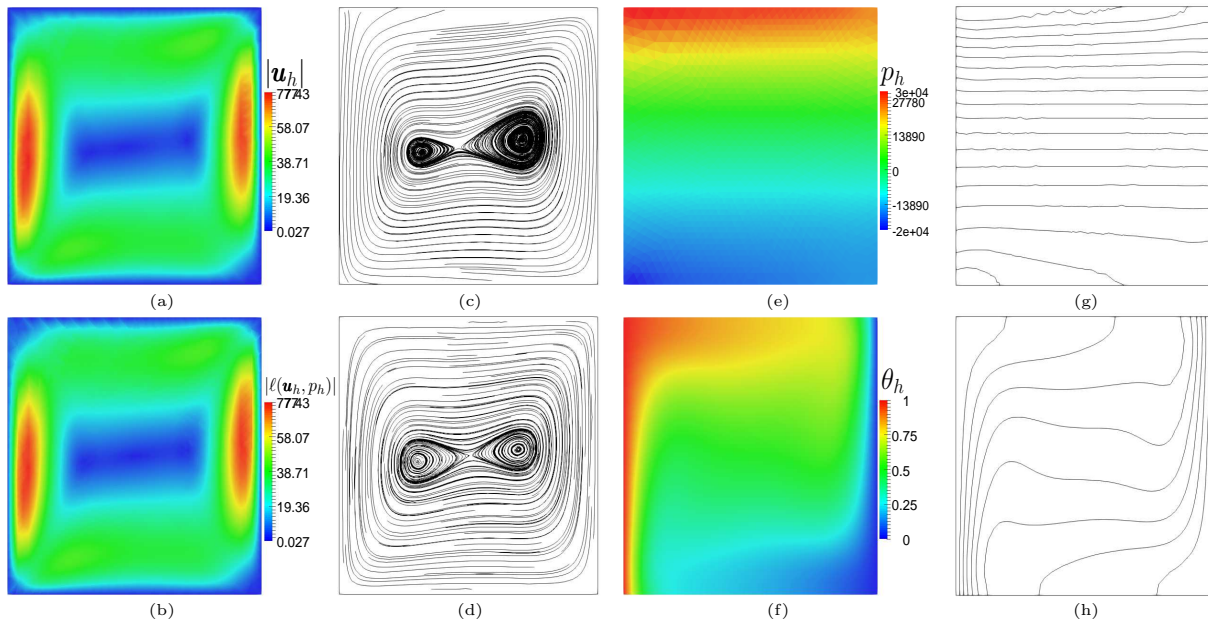


Fig. 4.14: Solución de elementos finitos para el ejemplo 6, donde  $Ra = 10^5$ : (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c) y (d) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e) y (f) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g) y (h) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente. La malla utilizada está conformada por 2395 nodos y 4660 elementos

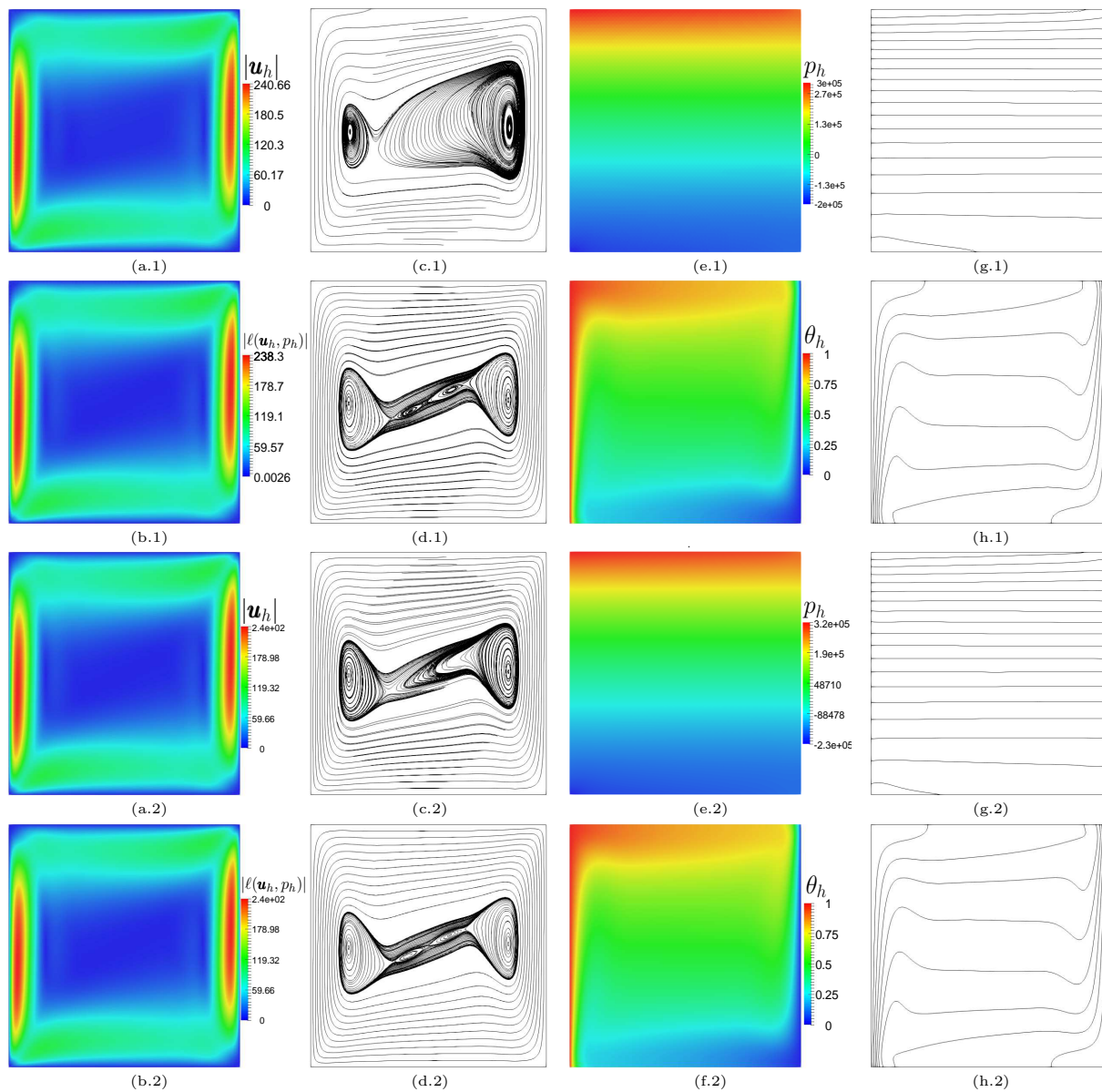


Fig. 4.15: Solución de elementos finitos para el ejemplo 6, donde  $Ra = 10^6$ : Desde (a.1) hasta (h.1) la malla contiene 8321 nodos y 16384 elementos; desde (a.2) hasta (h.2) la malla contiene por 131585 nodos y 262144 elementos. (a.) y (b.) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c.) y (d.) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e.) y (f.) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g.) y (h.) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente.

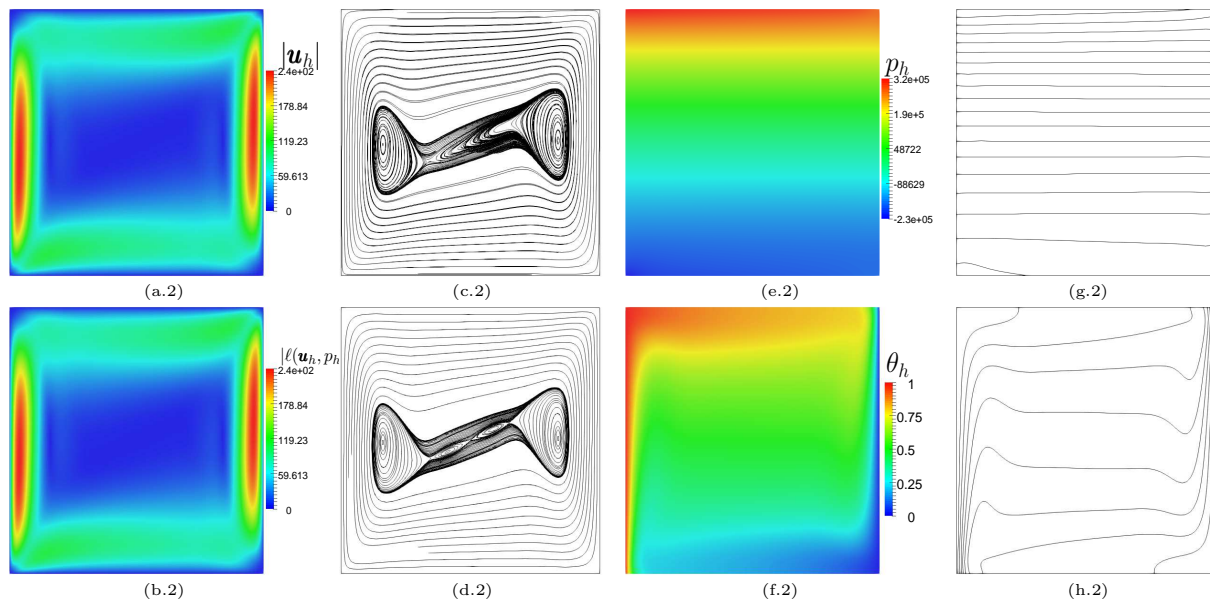


Fig. 4.16: Solución de elementos finitos para el ejemplo 6, donde  $Ra = 10^6$ : (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c) y (d) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e) y (f) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g) y (h) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente. La malla utilizada está conformada por 263169 nodos y 524288 elementos

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
35	19.9	7.11e-15
55	10.5	7.55e-15
107	3.45	4.55e-15
187	1.57	8.88e-15
371	0.632	3.33e-15
691	0.237	2.33e-15
1379	0.102	1.22e-15
2659	0.0323	9.16e-16
5315	0.0131	5.41e-16
10435	0.0047	3.89e-16
20867	0.0017	3.33e-16
41347	0.000602	2.22e-16
82692	0.000215	1.73e-16
164611	7.69e-05	1.46e-16
329220	2.74e-05	1.53e-16
656900	9.73e-06	1.04e-16

Tab. 4.6: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 6 en cada elemento para cada malla, cuando  $Ra = 10^4$ .

## Ejemplo 7

El siguiente ejemplo es tomado de [50], en donde se trata el problema dado por las ecuaciones en (1.0.1), pero son consideradas las condiciones de contorno y datos dados en el ejemplo 6 y ciertos parámetros dados. Así, se resuelve el problema

$$\begin{aligned} -Pr\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= (0 \ PrRa)^T\theta && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta &= 0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

con condiciones de frontera dadas por la Figura 4.13.

En este caso, nuevamente  $Ra$  corresponde al número de Rayleigh, y  $Pr$  corresponde al número de Prandtl, definido como  $Pr = \nu_r/\kappa_r$ , donde  $\nu_r$  y  $\kappa_r$  son una viscosidad y una conductividad térmica de referencia. En el presente ejemplo, se utiliza  $Pr = 0,71$ , correspondiente al aire. En la resolución del problema, de igual modo que en el ejemplo 6, la convergencia del método de punto fijo es acelerada utilizando un algoritmo de “*damping*”.

En las Figura 4.17 y 4.18 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 7, donde  $Ra = 10^6$ . En la Figuras 4.19 y 4.20 se muestran representaciones de las soluciones numéricas obtenidas para el Ejemplo 7, donde  $Ra = 10^7$ . Además, para el caso  $Ra = 10^4$ , se comparó el valor máximo que alcanza el valor absoluto de la divergencia en cada elemento en cada malla resuelta, tanto para  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ . Esta comparación es mostrada en la Tabla 4.8.

Además, con el fin de comparar los resultados obtenidos en [50] se considera el flujo local de calor en la dirección horizontal dada por el número de Nusselt, definido como

$$Nu := \mathbf{u}_x\theta - \frac{\partial\theta}{\partial x},$$

donde  $\mathbf{u}_x$  es la componente horizontal de la velocidad. Entonces, se calcula el número de Nusselt promedio en el dominio, dado por

$$\overline{Nu} = \int_{\Omega} Nu,$$

para los números de Rayleigh  $Ra = 10^3, 10^4, \dots, 10^7$ . Este número es calculado considerando tanto el campo de velocidad conforme entregado por el método, como el campo post-procesado. Para diferenciar, se denotará  $\overline{Nu_c}$  al número de Nusselt promedio obtenido a partir del campo de velocidad conforme, y como  $\overline{Nu_{nc}}$  al número de Nusselt promedio obtenido a partir del campo de velocidad post-procesado. Estos resultados son mostrados en la Tabla 4.7, donde estos valores son comparados con los obtenidos en [50] y en las referencias que allí aparecen.

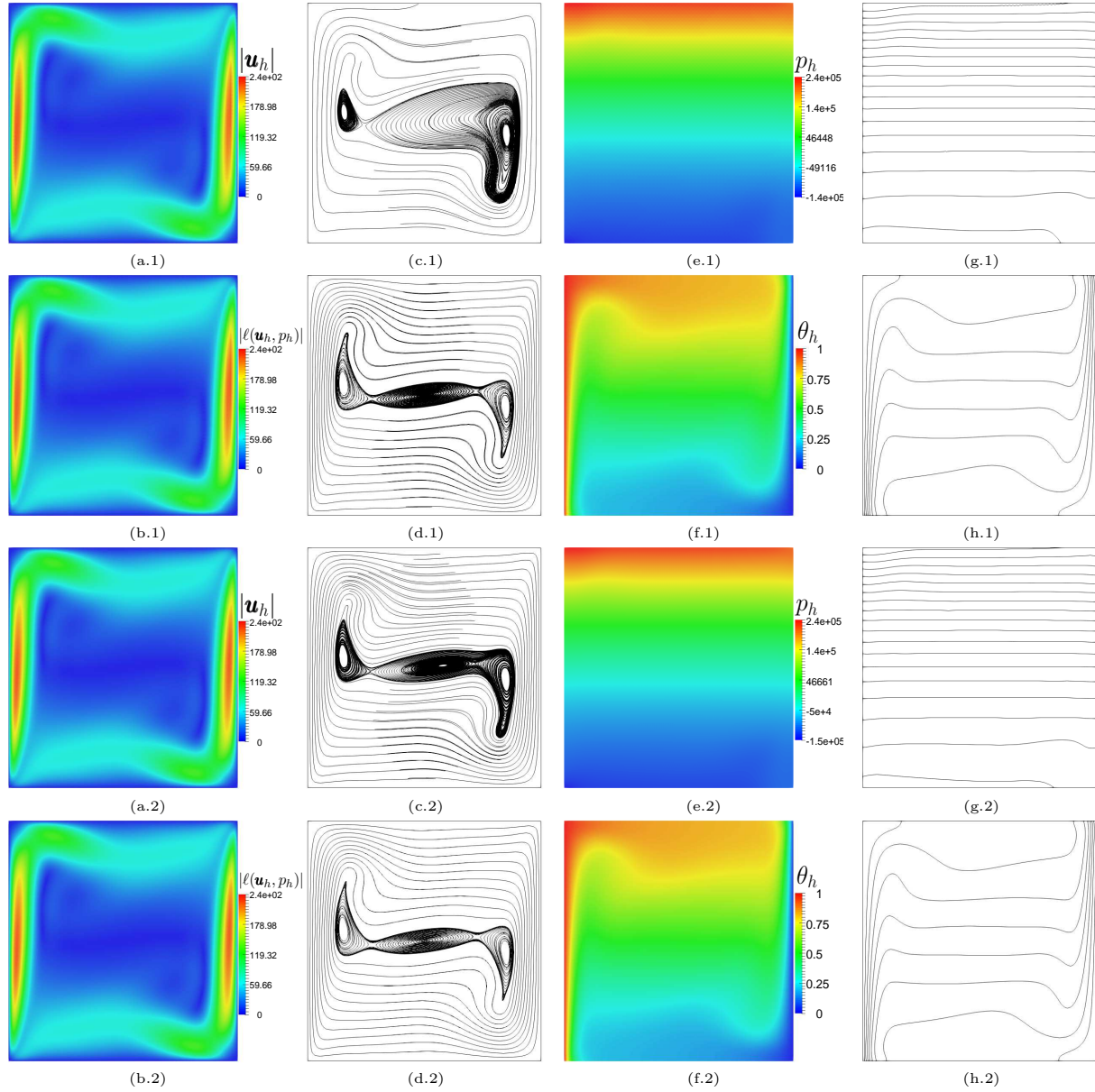


Fig. 4.17: Solución de elementos finitos para el ejemplo 7, donde  $Ra = 10^6$ : Desde (a.1) hasta (h.1) la malla utilizada contiene 8321 nodos y 16384 elementos; desde (a.2) hasta (h.2) la malla contiene 131585 nodos y 262144 elementos. (a.) y (b.) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c.) y (d.) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e.) y (f.) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g.) y (h.) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente.

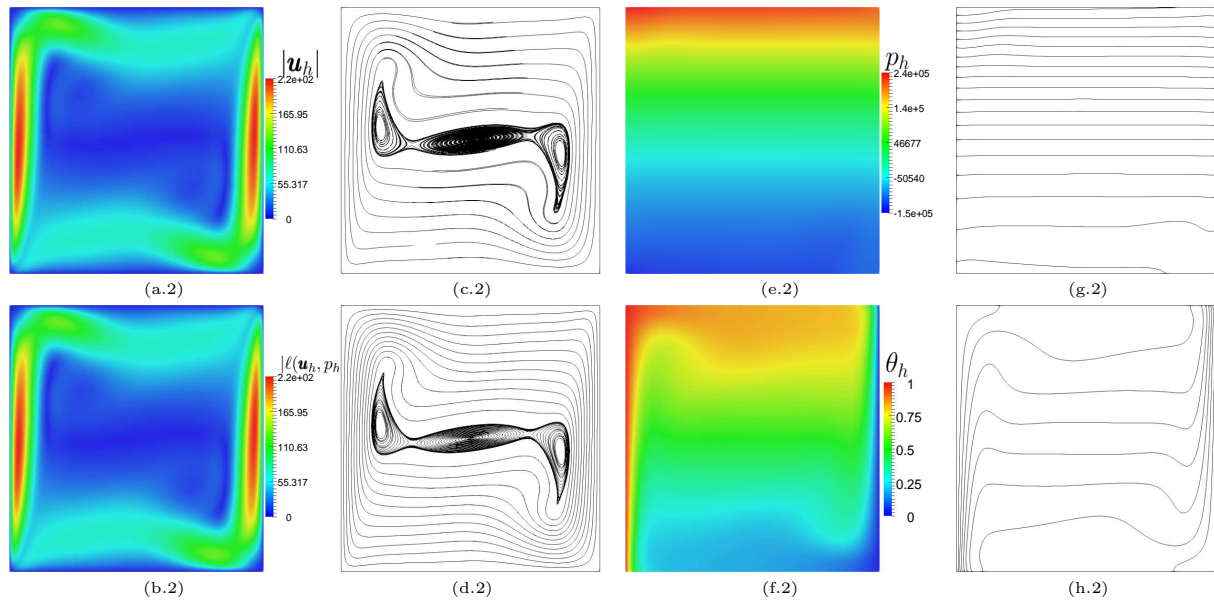


Fig. 4.18: Solución de elementos finitos para el ejemplo 7, donde  $Ra = 10^6$ : (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c) y (d) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e) y (f) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g) y (h) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente. La malla utilizada está conformada por 263169 nodos y 524288 elementos

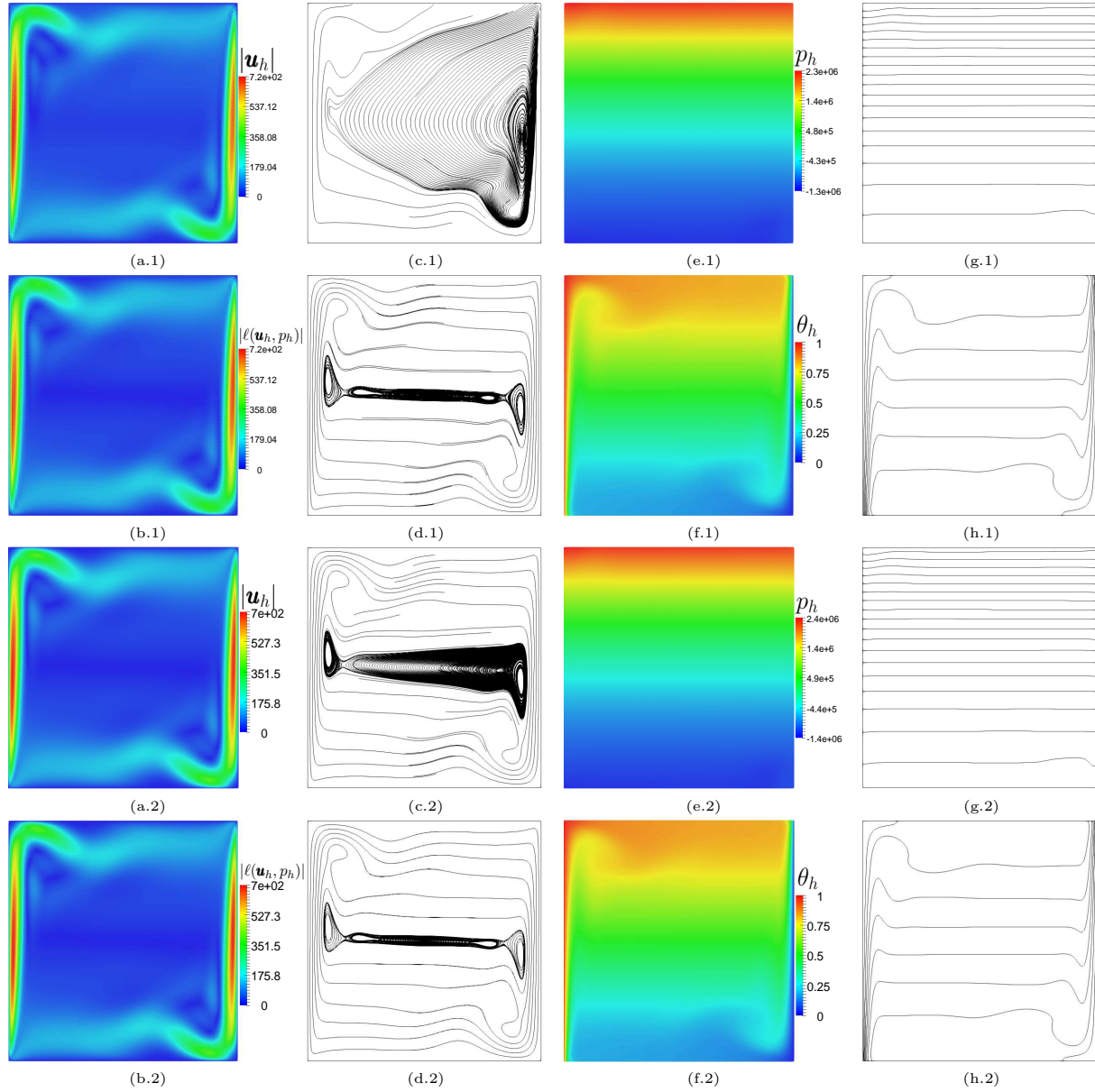


Fig. 4.19: Solución de elementos finitos para el ejemplo 7, donde  $Ra = 10^7$ : Desde (a.1) hasta (h.1) la malla contiene 8321 nodos y 16384 elementos; desde (a.2) hasta (h.2) la malla contiene 131585 nodos y 262144 elementos. (a.) y (b.) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c.) y (d.) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e.) y (f.) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g.) y (h.) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente.

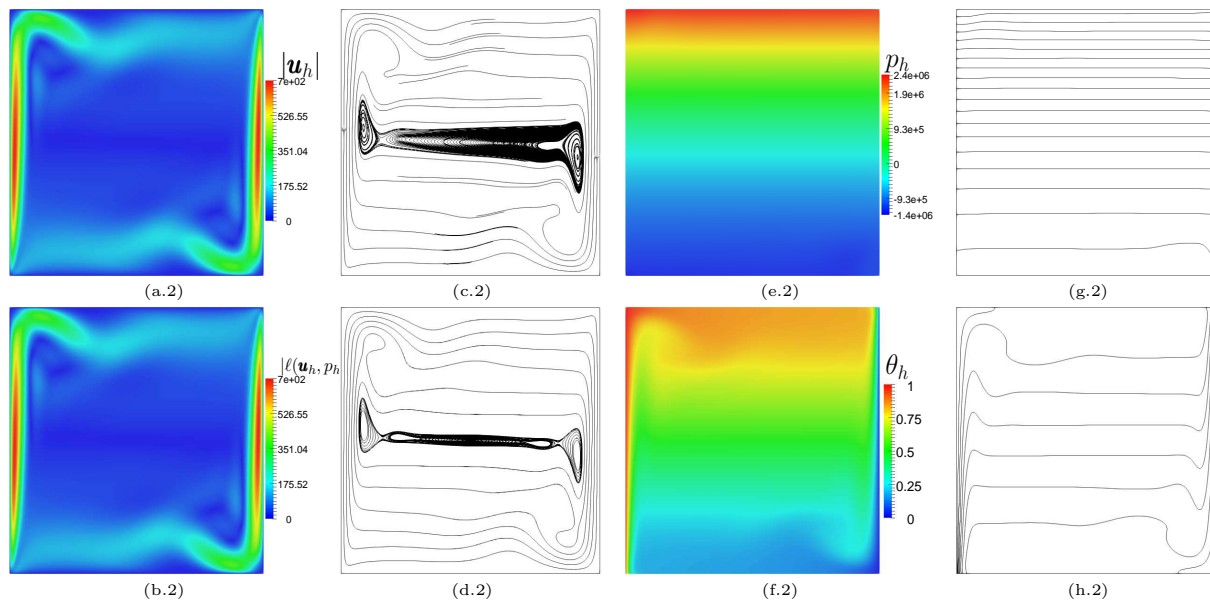


Fig. 4.20: Solución de elementos finitos para el ejemplo 7, donde  $Ra = 10^7$ : (a) y (b) son las representaciones gráficas de  $|\mathbf{u}_h|$  y  $|\ell(\mathbf{u}_h, p_h)|$ , respectivamente; (c) y (d) muestran las líneas de campo de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$ , respectivamente; (e) y (f) muestran las representaciones gráficas de  $p_h$  y  $\theta_h$ , respectivamente; (g) y (h) muestran líneas de contorno de  $p_h$  y  $\theta_h$  respectivamente. La malla utilizada está conformada por 263169 nodos y 524288 elementos

$Ra$	$\overline{Nu_c}$	$\overline{Nu_{nc}}$	[50]	[25]	[42]	[41]	[24]	[9]
$10^3$	1.117	1.117	1.118	1.118	1.117	1.074	1.117	1.112
$10^4$	2.240	2.241	2.245	2.243	2.243	2.084	2.254	2.198
$10^5$	4.499	4.504	4.524	4.519	4.521	4.300	4.598	4.465
$10^6$	8.701	8.719	8.852	8.800	8.806	8.743	8.976	8.783
$10^7$	16.489	16.491	16.789	-	16.400	13.99	16.656	16.46

Tab. 4.7: Tabla que muestra la comparación del valor del número de Nusselt promedio para  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 7 considerando distintos valores del número de Rayleigh.

Ndof	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \mathbf{u}_h _K $	$\max_{K \in \mathcal{T}_h}  \nabla \cdot \ell(\mathbf{u}_h, p_h) _K $
35	26	1.07e-14
55	14	7.55e-15
107	4.65	6.22e-15
187	2	6.22e-15
371	0.808	3.89e-15
691	0.304	1.89e-15
1379	0.128	1.72e-15
2659	0.0431	1.14e-15
5315	0.0164	7.22e-16
10435	0.0063	4.58e-16
20867	0.00222	4.16e-16
41347	0.000804	2.5e-16
82692	0.000283	1.96e-16
164611	0.000103	1.21e-16
329220	3.59e-05	1.35e-16
656900	1.3e-05	9.71e-17

Tab. 4.8: Tabla que muestra el máximo valor absoluto de la divergencia de  $\mathbf{u}_h$  y  $\ell(\mathbf{u}_h, p_h)$  soluciones del ejemplo 7, con  $Ra = 10^4$ , en cada elemento para cada malla.

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se propuso un método de elementos finitos estabilizado para la resolución de un problema generalizado de Boussinesq, para el cual se demostró existencia de soluciones y estimación de error a priori.

El método propuesto cuenta con las siguientes características:

- La utilización de espacios de elementos finitos de bajo orden (esquema del tipo  $\mathbb{P}_1 + \mathbb{RT}_0 \times \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ ) gracias a la acción de términos estabilizadores, lo que permite un bajo coste computacional en la implementación del método.
- Los términos estabilizadores también permiten lidiar con la aparición de capas límites en las soluciones.
- El método es localmente conservativo al entregar un campo de velocidades a divergencia exactamente nula, de manera similar a los propuesto en [46]. Sin embargo, en dicho trabajo esa característica se logra con el uso de espacios de elementos finitos de un orden mayor; en cambio, en el presente trabajo este campo es obtenido a partir de una modificación de la solución de bajísimo coste computacional.
- Esta última característica permite que la solución solenoidal no conforme obtenida recupere características cualitativas de la solución del problema físico con una cantidad pequeña de grados de libertad, las cuales la solución continua polinomial sólo recupera después de una elevada cantidad de refinaciones de la malla, tal como se ilustra en los ejemplos 6 y 7.
- La estimación de error realizada permite obtener un orden de convergencia óptimo, donde es necesario asumir condiciones con respecto a las soluciones y a los datos que son comunes en este tipo de problema no lineales. Estos órdenes de convergencia

pudieron ser comprobados exitosamente en las pruebas numéricas realizadas.

Con respecto a futuro trabajo que se pueda realizar a partir del presente, algunas opciones son:

- Desarrollo de la teoría para lados derechos no homogéneos en (3.1.1), y para condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas para la velocidad y condiciones de Neumann.
- El cálculo de estimadores de error a posteriori que permitan una refinación adaptativa de la malla, lo cual permite acelerar convergencia con un bajo coste computacional, especialmente ante la aparición de capas límite en las soluciones.
- La extensión del presente método al caso no estacionario, considerando la evolución temporal del problema.
- Para el caso no estacionario, a su vez se puede considerar la implementación de un método adaptativo, tanto espacialmente como temporalmente.
- La adaptación del presente método a problemas de control óptimo basado en ecuaciones dadas por el problema generalizado de Boussinesq o similares.
- La realización de pruebas numéricas para ejemplos en 3 dimensiones y con la inclusión de otros esquemas estabilizados distintos a los considerados en este trabajo.

## Bibliografía

- [1] Karam Allali. A priori and a posteriori error estimates for Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2(2):179–196, 2005.
- [2] Patrick R Amestoy, Ian S Duff, and J-Y LÉxcellent. Mumps multifrontal massively parallel solver version 2.0. 1998.
- [3] Rodolfo Araya, Gabriel R. Barrenechea, Abner H. Poza, and Frédéric Valentin. Convergence analysis of a residual local projection finite element method for the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(2):669–699, 2012.
- [4] Gabriel R. Barrenechea and Frédéric Valentin. Consistent local projection stabilized finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(5):1801–1825, 2010.
- [5] Gabriel R. Barrenechea and Frédéric Valentin. A residual local projection method for the Oseen equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199(29-32):1906–1921, 2010.
- [6] Gabriel R. Barrenechea and Frédéric Valentin. Beyond pressure stabilization: a low-order local projection method for the Oseen equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 86(7):801–815, 2011.
- [7] M. Bebendorf. A note on the Poincaré inequality for convex domains. *Z. Anal. Anwendungen*, 22(4):751–756, 2003.
- [8] R. Becker and M. Braack. A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections. *Calcolo*, 38(4):173–199, 2001.
- [9] M. Benítez and A. Bermúdez. A second order characteristics finite element scheme for natural convection problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 235(11):3270–3284, 2011.

- 
- [10] Christine Bernardi, Brigitte Métivet, and Bernadette Pernaud-Thomas. Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur: le modèle et son approximation par éléments finis. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(7):871–921, 1995.
- [11] J. Boland and W. Layton. Error analysis for finite element methods for steady natural convection problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 11(5-6):449–483, 1990.
- [12] Joseph Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur: mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, volume 2. Gauthier-Villars, 1903.
- [13] M. Braack and E. Burman. Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2544–2566 (electronic), 2006.
- [14] Malte Braack and Gert Lube. Finite elements with local projection stabilization for incompressible flow problems. *J. Comput. Math.*, 27(2-3):116–147, 2009.
- [15] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [16] F. Brezzi, D. Marini, and A. Russo. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166(1-2):51–63, 1998.
- [17] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In *Efficient solutions of elliptic systems (Kiel, 1984)*, volume 10 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 11–19. Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [18] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [19] Erik Burman and Peter Hansbo. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(15-16):1437–1453, 2004.
- [20] Aytekin Çıbık and Songül Kaya. A projection-based stabilized finite element method

- 
- for steady-state natural convection problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 381(2):469–484, 2011.
- [21] Eligio Colmenares, Gabriel N. Gatica, and Ricardo Oyarzúa. An augmented fully-mixed finite element method for the stationary boussinesq problem. *Calcolo*, pages 1–39, 2015.
- [22] Eligio Colmenares, Gabriel N. Gatica, and Ricardo Oyarzúa. Analysis of an augmented mixed-primal formulation for the stationary Boussinesq problem. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 32(2):445–478, 2016.
- [23] Eligio Colmenares, Gabriel N. Gatica, and Ricardo Oyarzúa. Fixed point strategies for mixed variational formulations of the stationary Boussinesq problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 354(1):57–62, 2016.
- [24] G. Wei D. Wan, B. Patnaik. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, 40(3):199–228, 2001.
- [25] G de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *International Journal for numerical methods in fluids*, 3(3):249–264, 1983.
- [26] Clark R. Dohrmann and Pavel B. Bochev. A stabilized finite element method for the Stokes problem based on polynomial pressure projections. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 46(2):183–201, 2004.
- [27] Jim Douglas, Jr. and Todd Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. In *Computing methods in applied sciences (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975)*, pages 207–216. Lecture Notes in Phys., Vol. 58. Springer, Berlin, 1976.
- [28] M. Farhloul, S. Nicaise, and L. Paquet. A mixed formulation of Boussinesq equations: analysis of nonsingular solutions. *Math. Comp.*, 69(231):965–986, 2000.
- [29] M. Farhloul, S. Nicaise, and L. Paquet. A refined mixed finite element method for the Boussinesq equations in polygonal domains. *IMA J. Numer. Anal.*, 21(2):525–551, 2001.

- 
- [30] L. P. Franca and F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(13-14):1785–1800, 2000.
- [31] Leopoldo P. Franca, Sérgio L. Frey, and Thomas J. R. Hughes. Stabilized finite element methods. I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95(2):253–276, 1992.
- [32] Leopoldo P. Franca, Christopher Harder, and Frédéric Valentin. On a residual local projection method for the Darcy equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(17-18):1105–1110, 2009.
- [33] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [34] MATLAB User’s Guide. The mathworks. *Inc., Natick, MA*, 5:333, 1998.
- [35] Amy Henderson, Jim Ahrens, Charles Law, et al. *The ParaView Guide*. Kitware Clifton Park, NY, 2004.
- [36] T. J. R. Hughes and A. Brooks. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In *Finite element methods for convection dominated flows (Papers, Winter Ann. Meeting Amer. Soc. Mech. Engrs., New York, 1979)*, volume 34 of *AMD*, pages 19–35. Amer. Soc. Mech. Engrs. (ASME), New York, 1979.
- [37] Thomas J. R. Hughes, Leopoldo P. Franca, and Marc Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V. Circumventing the Babuvska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59(1):85–99, 1986.
- [38] Eleanor W. Jenkins, Volker John, Alexander Linke, and Leo G. Rebholz. On the parameter choice in grad-div stabilization for the Stokes equations. *Adv. Comput. Math.*, 40(2):491–516, 2014.
- [39] Sebastián A. Lorca and José Luiz Boldrini. Stationary solutions for generalized Bousinesq models. *J. Differential Equations*, 124(2):389–406, 1996.

- 
- [40] G. Lube, T. Knopp, G. Rapin, R. Gritzki, and M. Rösler. Stabilized finite element methods to predict ventilation efficiency and thermal comfort in buildings. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 57(9):1269–1290, 2008.
- [41] MT Manzari. An explicit finite element algorithm for convection heat transfer problems. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 9(8):860–877, 1999.
- [42] Nicola Massarotti, P Nithiarasu, and OC Zienkiewicz. Characteristic-based-split (cbs) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 8(8):969–990, 1998.
- [43] Solomon G. Mikhlin. *Constants in some inequalities of analysis*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986. Translated from the Russian by Reinhard Lehmann.
- [44] Hiroko Morimoto. On the existence of weak solutions of equation of natural convection. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 36(1):87–102, 1989.
- [45] Hiroko Morimoto. On the existence and uniqueness of the stationary solution to the equations of natural convection. *Tokyo J. Math.*, 14(1):217–226, 1991.
- [46] Ricardo Oyarzúa, Tong Qin, and Dominik Schötzau. An exactly divergence-free finite element method for a generalized Boussinesq problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 34(3):1104–1135, 2014.
- [47] Ricardo Oyarzúa and Paulo Zúniga. Analysis of a conforming finite element method for the boussinesq problem with temperature-dependent parameters. *Preprint*, <http://www.ci2ma.udec.cl/>, 2015.
- [48] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5:286–292 (1960), 1960.
- [49] P. H. Rabinowitz. Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 29:32–57, 1968.
- [50] Tomás Chacón Rebollo, Macarena Gómez Mármol, Frédéric Hecht, Samuele Rubino,

- and Isabel Sánchez Muñoz. A high-order local projection stabilization method for natural convection problems. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–26, 2017.
- [51] Hans-Görg Roos, Martin Stynes, and Lutz Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, volume 24 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. Convection-diffusion-reaction and flow problems.
- [52] Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.