

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
VALPARAÍSO - CHILE



**ANÁLISIS DEL FLUJO DE LA ECUACIÓN EXACTA DEL GRUPO
DE RENORMALIZACIÓN FUNCIONAL PARA DOS
POMERONES USANDO TEORÍA DE CAMPOS DE REGGEONES**

LUIS IGNACIO CANCINO ARANCIBIA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA.

PROFESOR GUÍA: Dr. Carlos Contreras H.

COMITÉ DE TESIS: Dr. Gorazd Cvetič

Dr. Marcelo Loewe

Agosto, 2023

Dedicatoria

Dedicado a mi familia que sin ellos nada de esto sería posible. También para cada persona que me ha mostrado su apoyo en este camino de años.

”Todo se entrelaza: ciencia e industria, saber y aplicación. Los descubrimientos y las realizaciones prácticas que conducen a nuevas invenciones, el trabajo intelectual y el trabajo manual, la idea y los brazos. Cada descubrimiento, cada progreso, cada aumento de la riqueza de la humanidad, tiene su origen en la conjunción del trabajo manual e intelectual del pasado y del presente. Entonces, ¿con qué derecho alguien se apropia de la menor parcela de ese inmenso todo y dice: “Esto es sólo mío y no de todos”? ”

Piotr kropotkin - La conquista del pan.

Agradecimientos

Mis primeros agradecimientos son para las personas que me han formado y han sido cruciales para seguir en el área de las ciencias. Mi familia que sin ellos hubiese sido imposible seguir en la ciencia, a mi Madre, Padre y Hermanos.

Agradezco a los y las profesores que me han formado a lo largo de los años y me han ayudado con sus consejos y se han esforzado por que uno trate de entender.

Agradezco especialmente al Dr. Carlos Contreras por guiarme en este proceso y por todo el apoyo que me ha brindado en esta investigación, gracias por el consejo y oportunidad de mostrar mi investigación en un Seminario en el extranjero. También al Dr. Mauro Cambiaso que me guió en mi tesis de licenciatura, sin su ayuda en ese tiempo, escribir esta tesis hubiese sido mas difícil.

Sé que no puedo medir en palabras el inconmensurable efecto que han tenido en mi, por eso perdón por no poder agradecer en totalidad su efecto en esta tesis.

Esta tesis fue realizada gracias al apoyo del Programa de Incentivo a la Iniciación Científica (PIIC) de la Universidad Técnica Federico Santa María (UTFSM); y al Proyecto Fondecyt N° 1191434 en el cual participé como tesista. También se agradece el apoyo del proyecto para presentar un poster en congreso SOCHIFI 2022 y para dar una *flash talk* y presentación de póster en el Seminario *Exploring New Topics with Functional Renormalisation* en *Bad Honnef*, Alemania. Se agradece a la fundación *Wilhelm und Else Heraeus* que apoyó la realización del seminario como el hospedaje a los asistentes.

Resumen

Bartels, Contreras y Vacca empezaron una investigación en la cual se preguntaban si la teoría de campos de Regge podría ser utilizada como una teoría efectiva para describir el comportamiento de la interacción fuerte en el límite de Regge, en específico se buscaba una conexión entre las regiones UV (perturbativa) e IR (no perturbativa). Ellos estudian primero el caso de un campo con auto-interacciones [1], y después obtienen resultados para dos campos con algunas interacciones hasta el tercer orden en una *local potential approximation* LPA' del potencial [2].

En este trabajo, ampliamos las investigaciones antes mencionada, agregando términos de mezcla de 'masas' entre los dos campos, y además, se consideran todos los términos hasta tercer orden de los campos en el potencial. Específicamente, calculamos la evolución de las 'constantes' de nuestra teoría mientras avanzamos hacia el IR. Como el sector IR en la interacción fuerte es no perturbativa, debemos ocupar técnicas que también lo sean. Es por esto que se ocupa la ecuación exacta del grupo de renormalización funcional introducida por Wetterich [3], las cuales nos dará las funciones β asociadas a nuestra acción efectiva. En dicha ecuación es necesario introducir un regulador; ocupamos el regulador de Litim, ya que esté nos permite eliminar los modos UV de tal manera que la integral en el momentum sea mas sencilla de calcular.

Definida la acción efectiva de *pomeron*, estudiamos la ecuación de Wetterich, y encontramos y calculamos la ecuaciones del grupo de renormalización, obteniendo un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no lineales, denominadas funciones β , que nos muestran como evolucionan las 'constantes' de la acción mientras cambia la escala de energía. Para obtener la descripción completa de las funciones β se calculan las dimensiones anómalas de la teoría utilizando técnicas funcionales. Ya que el espacio de todos los grados de libertad es 10 dimensional, se ocupan algoritmos de 'redes neuronales' combinándolos con métodos tradicionales (e.g. Newton Raphson) para obtener una colección de puntos fijos asociados a las funciones β . Realizamos una linearización en torno a los puntos fijos, y a través de la matriz de estabilidad, se calculan los exponentes críticos asociados a cada punto, nos quedamos con los puntos fijos mayormente atractores en el IR, y estudiamos el comportamiento del flujo en torno a estos puntos fijos.

El *pomeron* al ser una familia de estados, nuestro principal objetivo era investigar como interaccionan entre ellos, ya que el desafío de encontrar dos puntos que se conecten en un espacio 10 dimensional para ecuaciones diferenciales no lineales tiene una dificultad considerable en termino de tiempo computacional. La búsqueda de un grupo de trayectorias del grupo de renormalización que comiencen en una zona UV, donde los campos no tienen un término de 'masa' mezclado, nos motivó al estudio de esa mezcla, a través de la diagonalización de la matriz de 'masa'. Dicha diagonalización nos permitió encontrar distintos flujos que conectaban dos estados diferentes, donde en el UV tenemos una configuración con los campos desacoplados (es decir, con $m = 0$) y al avanzar hacia el IR, dichos campos se mezclan mientras evolucionan a el punto fijo IR calculado anteriormente.

Abstract

Bartels, Contreras and Vacca proposed an approach in which they investigated if Regge field theory could be used as an effective theory to describe the behavior of the strong interaction in the Regge limit, specifically looking for a connection between the regions UV (perturbative) and IR (non-perturbative). They first investigated the case of a field with self-interactions [1], and then obtained results for two fields representing the *pomeron* and *odderon* with some associations up to the third order in a local potential approximation LPA' of the potential [2].

In this thesis, we extend the previously mentioned investigations, adding mixing 'mass' terms between the two fields, and in addition, all the terms up to the third order of the fields in the potential are considered. Specifically, we calculate the running couplings of our theory as we move towards the IR. Since the IR sector in the strong interaction is non-perturbative, we must use techniques that are also non-perturbative. For this reason, we use the exact equation of the functional renormalization group introduced by Wetterich [3], which will give the β functions associated with the effective action. In this equation, it is necessary to introduce a regulator; we use the Litim regulator, since it allows us to drop the UV modes in such a way that the integral in the momentum is easier to calculate.

Once the effective action of *pomeron* has been defined, we study the Wetterich equation, and find and calculate the equations of the renormalization group, obtaining a set of 10 nonlinear differential equations, called β functions, which show us how the 'constants' of the action evolve while the energy scale changes. To obtain the complete description of the β functions, the anomalous dimensions of the theory are calculated using functional techniques. Since the space of all degrees of freedom is 10 dimensional, 'neural network' algorithms are used by combining them with traditional methods (e.g. Newton Raphson) to obtain a collection of fixed points associated to the β functions. We linearized around the fixed points, and through the stability matrix, the critical exponents associated with each point are calculated, we have left with the mostly attracting fixed points in the IR, and we study the behaviour of the flow around these. fixed points.

Since the pomeron is a family of states, one of the main objective in this thesis is to investigate how they interact with each other, since the challenge of finding two points that connect in a 10-dimensional space for nonlinear differential equations has considerable difficulty in terms of computational time. The search for a group of trajectories of the renormalization group that start in a UV zone, where the fields do not have a mixed 'mass' term, motivated us to study this mixing process, through the diagonalization of the 'mass' matrix. Said diagonalization allowed us to find different flows that connected two different states, where in the UV we have a configuration with the decoupled fields (that is, with $m = 0$) and when moving towards the IR, said fields mix while they evolve to the IR fixed point calculated above.

Índice

1. Introducción	4
2. Matriz S	6
3. Teoría de Regge y observables para <i>Pomeron</i> y <i>Odderon</i>	9
3.1. Teoría de Regge	9
3.2. Soft-Pomeron	12
3.3. <i>Hard (BFKL) Pomeron</i>	13
3.4. <i>Odderon</i>	15
4. Grupo de Renormalización	18
4.1. Ecuación del Grupo de Renormalización Funcional	18
5. Acción efectiva y el regulador	22
5.1. Análisis Dimensional	23
5.2. Matriz de Green Libre	24
5.3. Regulador y matriz de interacción	25
6. Ecuación del Grupo de Renormalización Funcional	26
6.1. Integración en q	26
6.2. Integración en z	26
6.3. Solución	27
6.4. Funciones β	28
7. Dimensión Anómala	31
7.1. Derivada en q	33
7.2. Derivada en z	33
7.3. Integración en q y z	34
8. Resultados Numéricos	35
8.1. Algoritmos	35
8.2. Puntos Fijos	36
8.3. Evolución en torno a los puntos fijos	38
8.4. Diagonalización de matriz de 'masa'	41
9. Conclusiones	47
A. Funciones β	52
B. Dimensiones anómalas	55
C. Puntos Fijos UV	56

1. Introducción

Al principio del siglo 20, surgieron avances importantes para entender los constituyentes fundamentales del universo. En esos años se descubrió el núcleo atómico, el neutrón y el protón. Con ese nuevo conocimiento surgieron nuevas preguntas sobre el como estos constituyentes pueden permanecer en el núcleo atómico, ya que la interacción electromagnética no podía explicar este fenómeno. Había que tener una nueva interacción, la denominada interacción nuclear fuerte. En 1935, Yukawa introduce su potencial para explicar la interacción entre dos nucleones a través del intercambio de una nueva partícula, el pión, el cual fue descubierto en 1947. En los años venideros aparecieron mas partículas de este estilo, nuevos hadrones sumándose al protón y el neutrón y por ende era necesario encontrar una descripción teórica que permitiese estudiar este tipo de interacciones, al igual que se había hecho con la electrodinámica cuántica.

Antes del nacimiento de la cromodinámica cuántica, el estudio de los procesos relacionados a la interacción fuerte se realizaba directamente de las propiedades de la amplitud de *scattering*. La invarianza de Lorentz, la unitariedad y la analiticidad de la matriz S eran las propiedades que permitieron estudiar diferentes tipos de colisiones, antes de tener una teoría cuántica de campos para la interacción fuerte. En ese contexto, la teoría de Regge [4,5] permitía estudiar partículas, o resonancias de ellas, que aparecían como singularidades en el plano complejo de la variable de Mandelstan t [6]. Dichas partículas se llaman *reggeons*, los cuales pueden ser mesones o partículas compuestas de gluones [5,7–9] y tienen la característica que la amplitud de *scattering*, donde la probabilidad correspondiente al intercambio de estos *reggeons* es proporcional a $A(s, t) \approx s^{\alpha(t)}$, donde $\alpha(t)$ es la trayectoria de Regge del *reggeon*, y además, es un observable de la teoría, por lo tanto en los siguientes años surgieron bastantes modelos fenomenológicos que buscaban estas partículas en los datos experimentales.

Desde los 70's se proponen modelos que representan el intercambio de estas partículas en la colisión entre protones (y hadrones en general), donde se teorizan el *Soft-Pomeron* [10], *Hard-Pomeron* [11–16] y el *odderon* [17], que son partículas compuestas por gluones. Con el calculo de la sección eficaz se pudo comparar los modelos con los datos de los distintos experimentos que se fueron desarrollando desde esos tiempos hasta el día de hoy, donde en distintas regiones de t dominaban en distinta medida cada una de las partículas antes mencionadas [7].

Cromodinámica cuántica (QCD) es altamente predictiva en la región de altas energías (ultravioleta o UV), ya que en esa región se puede hacer teoría de perturbaciones [18]. En cambio, el sector de bajas energías (infrarrojo o IR) contiene actualmente bastantes desafíos teóricos por su alta complejidad debido al aumento del valor del acoplamiento fuerte. Por lo tanto, utilizar métodos no perturbativos se vuelve necesario (e.g. teorías de gauge en *lattice QCD*, resumación, analitic QCD [19]). Poder conectar ambas regiones es un problema abierto, y en ese contexto, calcular la evolución de los observables de un *Soft-Pomeron*, que domina la región IR, con las de un *Hard-Pomeron*, que domina en el UV, podría dar una pista de como es la evolución de estos observables según cambia la escala de energía de los experimentos de colisión [5,7–9].

Para conocer como evolucionan los observables de una teoría en función de una cierta escala, lo primero que se suele hacer es calcular la ecuación del grupo de renormalización asociada al observable. Como se busca ocupar herramientas no perturbativas, en este trabajo se ocupará el marco de trabajo del grupo de renormalización funcional, en el cual la ecuación de Wetterich [3] entregará las ecuaciones diferenciales con las cuales se puede analizar como cambia el valor de los observables a diferentes escalas. Esta evolución se estudia para una teoría de campos de *reggeons* (TCR) [20,21], la cual también es ocupada en diferentes trabajos [1,2,22], con los que se compararán resultados tomando los límites asociados a dichos trabajos.

En 1967, Gribov [23] obtiene las reglas para calcular diagramas en la cual participan *reggeons*, en ese trabajo encuentra que en el caso de los polos de Pomeranchuk (como se le llamaba al *pomeron*) los diagramas que mas contribuían, eran los que tenían vértices con interacciones triple en los campos. En 2008 Ellis, Kowalski y Ross [24] calculan las auto-funciones para un *pomeron* discreto (resolviendo la ecuación de evolución *BFKL* [14,15]), ya que [16] mostró que la mayor contribución de la trayectoria del pomeron viene dada por un *leading pole* seguido por una serie infinita de polos mas pequeños. Por ende, ya que el espectro del *pomeron* se vuelve discreto, incluso a distancias cortas, aparecen diferentes estados del *pomeron* los cuales se vuelve interesante poder estudiarlos. En 2017, Kowalski, Lipatov, Ross y Schulz [25] muestran que el polo principal del *pomeron* está casi completamente desacoplado del protón, concluyendo que debiese haber un *ground state* saturado, correspondiente al *Soft-Pomeron*. En ambos trabajos comparan sus modelos con los datos experimentales obtenidos en *HERA*, obteniendo un mapeo a los datos de la función de estructura del protón F_2 donde concluyen que con 3 polos, era suficiente para describir los datos del experimento.

Ambos trabajos nos dan una visión de que términos debiésemos ocupar en la acción de la teoría de campos,

interacciones triples en el potencial y 3 campos para los *pomeron*. Aunque como se discutirá mas adelante, en este trabajo se ocuparán dos campos, ya que se busca crear un método para encontrar las funciones β , y al incluir 3 campos, el costo en tiempo computacional aumenta bastante en comparación con el caso de dos. Al generar este método, se podrá extender este trabajo a mayor orden en los campos o en el potencial.

Al saber que el *pomeron* es en verdad una familia de partículas, nos gustaría saber como evoluciona en el espacio de fase desde una escala de energía a otra, por lo que se utilizarán métodos numéricos para encontrar puntos fijos y estudiar el flujo de la ecuación del grupo de renormalización funcional en torno a ellos.

Este trabajo de tesis está organizado como se explica a continuación; el marco teórico se compone de las secciones (2-4) donde se resumen las ideas y algunos trabajos relacionados a la teoría de Regge; *pomerons* y *odderons*; y el grupo de renormalización funcional. Comprender dichas áreas permite obtener herramientas que servirán en el cuerpo de la tesis. En la sección 5, se definen los diferentes elementos que aparecen en la ecuación de Wetterich relacionados a la TCR que se estudiará. En la sección 6 se resuelve la ecuación de Wetterich obteniendo las derivadas (en función de la escala) de las 'constantes' en la acción de la TCR, i.e. las funciones β . En la sección 7 se calculan las dimensiones anómalas. En la sección 8 se presentan los problemas y soluciones numéricas de estudiar el flujo dado por las funciones β , se calculan los puntos fijos y en torno a los que sean mayormente atractores en el IR, se mostrará la evolución entre dos estados distintos usando la diagonalización de la matriz de 'masa'.

2. Matriz S

Para entender las transiciones entre un estado de partículas (en un tiempo $t = t_A$ y 4-momentum p_A) y otro (en $t = t_B$ y 4-momentum p_B), necesitamos un objeto que describa dicha evolución temporal, la cual podemos representarla en el *picture* de Schrödinger como

$$|b_{fin}; t_B\rangle = \exp(-iH(t_B - t_A))|a_{in}; t_A\rangle = S|a_{in}; t_A\rangle, \quad (1)$$

donde H es el Hamiltoniano y S es la matriz que cumple como mediadora de esta evolución temporal. Si ambos estados coinciden, S debe ser igual a la matriz unidad, por lo que comúnmente se define como

$$S = 1 + iT, \quad \text{donde} \quad \langle b_{fin}; t_B | T | a_{in}; t_A \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_B) A(a \rightarrow b), \quad (2)$$

donde T es la matriz de transferencia que nos muestra las desviaciones del caso trivial y A es la amplitud de probabilidad para el proceso.

Antes de que se aplicara una teoría cuántica de campos para las interacciones fuertes, los físicos trabajaban para sacar la mayor cantidad de propiedades mediante ciertas condiciones que debiese cumplir la amplitud de probabilidad, donde las singularidades en esta se interpretan como partículas intercambiándose en un estado intermedio. La matriz S debe cumplir con ciertas propiedades que representan la física del proceso que se esté estudiando, las cuales analizaremos a continuación y se derivarán ecuaciones que nos serán útiles en las siguientes secciones.

S debe ser invariante de Lorentz

El que sea invariante de Lorentz implica que debe depender de productos escalares de los 4-momentum y de las masas de las partículas de los estados inicial y final. Si pensamos en una colisión donde tanto el estado inicial y final contienen 2 partículas (ver figura 1.a), podemos realizar un cambio de variable propuesto por Mandelstan [6], donde

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad ; \quad t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad ; \quad u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \quad (3)$$

donde p_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, son los 4-momentum de las partículas de masa m_i que participan en el proceso mostrado en la figura 1.a.

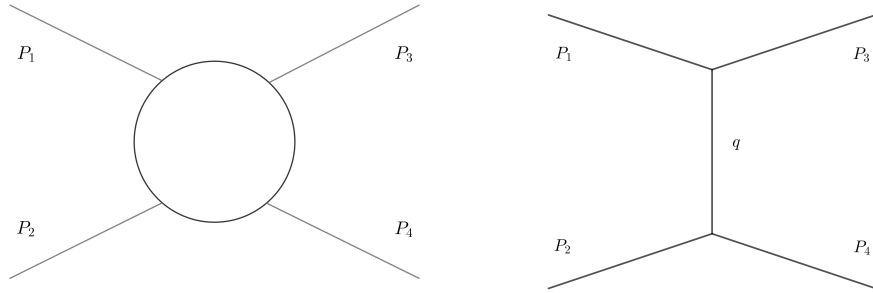


Figura 1: Se muestra la colisión entre las partículas 1 y 2 con resultado de las partículas 3 y 4 en el estado final. En (izquierda) a) el círculo al medio describe todos los posibles estados intermedios que pueden ocurrir. En (derecha) b) tenemos el mismo proceso, pero hay un intercambio de una partícula en el canal t , esto significa que el momentum $q = \sqrt{t}$.

Si analizamos colisiones del tipo mostrado en la figura 1.b, en dicho esquema, s es el cuadrado de la energía en el marco de referencia del centro de masa (i.e. $\sqrt{s} = E_{c.m.}$); t es el cuadrado del momentum transferido entre partículas (i.e. el momentum del estado intermedio $q = \sqrt{t}$) y u es una variable dependiente que podemos definir a través de la ecuación

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad (4)$$

la cual se demuestra utilizando (3) y $p_i^2 = m_i^2$. Al tener esta ecuación que relaciona 3 variables implica que se tiene un grado de libertad menos. Ese grado de libertad menos nos permite pensar en la amplitud como función solo de s y t (i.e. $A(s, t)$).

S debe ser unitaria

La unitariedad nos indica que se conserva la probabilidad. La conservación de la probabilidad en una teoría cuántica implica que la probabilidad del estado inicial en el tiempo t_A debe ser igual al del estado final en el tiempo t_B

$$\langle b_{fin}; t_B | b_{fin}; t_B \rangle = \langle a_{in}; t_A | S^\dagger S | a_{in}; t_A \rangle = \langle a_{in}; t_A | a_{in}; t_A \rangle, \quad (5)$$

dicho requerimiento nos permite comprobar que $S^\dagger S = 1$ lo cual es la definición de matriz unitaria.

La unitariedad de la matriz S también nos da unas relaciones entre las amplitudes a través de la representación de T ,

$$\begin{aligned} 1 &= S^\dagger S = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1 + iT - iT^\dagger + T^\dagger T \Rightarrow i(T^\dagger - T) = T^\dagger T \\ \Rightarrow \langle b_{fin}; t_B | i(T^\dagger - T) | a_{in}; t_A \rangle &= \langle b_{fin}; t_B | T^\dagger T | a_{in}; t_A \rangle \\ \Rightarrow \langle a_{in}; t_A | iT^\dagger | b_{fin}; t_B \rangle - \langle b_{fin}; t_B | iT | a_{in}; t_A \rangle &= \sum_X \int d \prod_X \langle b_{fin}; t_B | T^\dagger | X \rangle \langle X | T | a_{in}; t_A \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

donde en el último paso utilizamos la relación de completitud $1 = \sum_X \int d \prod_X |X\rangle \langle X|$; X son todos los diferentes estados intermedios que pueden ocurrir y $d \prod_X = \prod_{j \in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$. Escribiendo esta relación nuevamente, pero mostrando explícitamente la amplitud, tenemos

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4 \delta^4(p_{in} - p_{fin}) (A^*(fin \rightarrow in) - A(fin \rightarrow in)) &= \\ \sum_X \int d \prod_X (2\pi)^4 \delta^4(p_{in} - p_X) (2\pi)^4 \delta^4(p_{fin} - p_X) A(in \rightarrow X) A^*(fin \rightarrow X), \end{aligned} \quad (7)$$

la información que nos entregan las $\delta^4(p_{in} - p_X) \delta^4(p_{fin} - p_X)$ es la misma que nos entregaría $\delta^4(p_{in} - p_X) \delta^4(p_{in} - p_{fin})$, por lo que re-ordenamos la ecuación y cancelamos algunos términos para tener

$$A^*(fin \rightarrow in) - A(fin \rightarrow in) = i(2\pi)^4 \sum_X \int d \prod_X \delta^4(p_{in} - p_X) A(in \rightarrow X) A^*(fin \rightarrow X), \quad (8)$$

el cual es el Teorema Óptico Generalizado. Este teorema es una gran consecuencia de la unitariedad de la matriz S , ya que al cumplirse orden por orden nos relaciona por el lado derecho de la ecuación términos cuadráticos de la amplitud de procesos intermedios, con la parte imaginaria de *loops* (única forma en que coincidan con los términos cuadráticos). Cabe recordar que este teorema va mas allá de los casos perturbativos.

Un caso especial de este teorema es la de un proceso elástico (i.e. las partículas del estado inicial y final son las mismas) y sin cambio de dirección (i.e $\theta = t = 0$), el cual es

$$2Im[A(s, 0)] = -i(2\pi)^4 \sum_X \int d \prod_X \delta^4(p_{in} - p_X) |A(in \rightarrow X)| \approx \Phi \cdot \sigma_t, \quad (9)$$

donde $\sigma_t = \sum_X \sigma(in \rightarrow X)$ es la suma total de todas las secciones eficaces posibles para el estado inicial; y Φ es el flujo incidente [26].

S debe ser analítica

Que la matriz S sea analítica, significa que sus elementos son funciones continuas e infinitamente derivables cuando suponemos que sus variables cinemáticas son complejas. La excepción a esto lo dan singularidades dictadas por la unitariedad (lo que permite que sigan siendo analíticas, a pesar de las singularidades). Dichas discontinuidades se asocian a partículas intercambiándose en el canal donde exista esa singularidad.

Un ejemplo sería la colisión de dos partículas en el canal s , donde la partícula que intercambian tiene propagador proporcional a

$$\frac{1}{s - m + i\varepsilon},$$

por lo que en nuestra amplitud existirá un polo simple en $s = m - i\varepsilon$. Dicho polo, junto al teorema del residuo, nos dará una contribución a la amplitud en donde se intercambia esta partícula en el canal s .

Además, una propiedad bastante útil de las amplitudes, es su relación de simetría al intercambiar sus variables cinemáticas. Si en el canal s para el proceso $a + b \rightarrow c + d$ tenemos la amplitud $A(s, t, u)$, para el proceso $a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$ en el canal t tendremos la misma amplitud

$$A_{a+\bar{c}\rightarrow\bar{b}+d}(s, t, u) = A_{a+b\rightarrow c+d}(t, s, u), \quad (10)$$

donde $\bar{a}$ representa la anti-partícula de a .

En la próxima sección veremos la forma que contribuyen ciertas partículas compuestas (*reggeons*) encontradas en polos del plano complejo usando la teoría de Regge y las propiedades que hemos dictado en esta sección.

3. Teoría de Regge y observables para *Pomeron* y *Odderon*

Usualmente, tenemos que el numero cuántico l que representa el espín de las partículas es un numero entero o semi-entero. En el caso de la colisión de hadrones (los cuales tienen espín semi-entero), para que se conserven los números cuánticos deben intercambiar partículas con espín entero (figura 1.b). En esta sección, veremos como contribuyen a la amplitud el intercambio de algunas de dichas partículas, las cuales siguen la teoría de Regge. A dichas partículas las llamaremos partículas reggeizadas o *reggeons* y aparecen como polos en el plano complejo t .

3.1. Teoría de Regge

Regge [4] en 1959, para un modelo cuántico no-relativista, resolvió la ecuación de Schrödinger bajo un potencial esférico. Para esto, expandió la amplitud en ondas parciales y realizó una continuación analítica de l para valores no solamente no enteros, sino que complejos. Dichas amplitudes contenían polos encontrados en el plano complejo de l (además de los polos en el eje real dados por los valores físicos de l).

Para el caso relativista, se sigue el mismo proceso pero con algunas consideraciones extras. Se expande la amplitud en ondas parciales

$$A_{a\bar{c} \rightarrow \bar{b}d}(s, t) \approx \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l \left(1 + \frac{2t}{s} \right), \quad (11)$$

donde P_l son los polinomios de Legendre; a_l la amplitud de las ondas parciales y $1 + \frac{2t}{s} \equiv \theta$ es el ángulo generado por la colisión. La relación (10), permitirá estudiar las amplitudes de ondas parciales en función de t . Esto se requiere, ya que, las partículas que se analizarán en este trabajo se intercambian en el canal t y su momentum depende exclusivamente del momentum transverso de la colisión (i.e. $q = \sqrt{t}$, ver figura 1.b), por lo tanto aparecerán como singularidades en el plano complejo t , obteniendo

$$A_{ab \rightarrow cd}(s, t) \approx \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(t) P_l \left(1 + \frac{2s}{t} \right). \quad (12)$$

Sommerfeld [27], inspirado en Watson [28], re-escribe estas series como integrales complejas con polos en los valores enteros de l asociados al $\sin(\pi l)$

$$A(s, t) \approx \oint dl \frac{(2l+1) a(l, t)}{\sin(\pi l)} P \left(l, 1 + \frac{2s}{t} \right), \quad (13)$$

donde $a(l, t) = a_l(t)$ y $P(l, 1 + \frac{2s}{t}) = P_l(1 + \frac{2s}{t})$ cuando l es un número entero. Al preguntarse si las amplitudes $a(l, t)$ son únicas, la manera para que esto sea así es separar las contribuciones de l par e impar. Por lo que introducimos $\eta = \pm 1$ y re-escribimos la amplitud como

$$A(s, t) \approx \oint dl \frac{(2l+1)}{\sin(\pi l)} \sum_{\eta=\pm 1} (\eta + e^{-i\pi l}) a^\eta(l, t) P \left(l, 1 + \frac{2s}{t} \right). \quad (14)$$

Al integrar según la figura 2, vamos a tener una contribución de los polos $\alpha_i^\eta(t)$ y otra de una sección de la integral que no se anula (cuyos límites mostraremos antes de eliminarla), pero que omitiremos a primer orden.

$$A(s, t) \approx \sum_{\eta=\pm 1} \sum_i \frac{(\eta + e^{-i\pi l}) \beta_i^\eta(t)}{\sin(\pi \alpha_i^\eta(t))} P \left(\alpha_i^\eta(t), 1 + \frac{2s}{t} \right) + \int_{-1/2-i\epsilon}^{-1/2+i\epsilon} dl \dots \quad (15)$$

donde $\beta_i^\eta(t)$ son los residuos de los integrandos.

Los polinomios de Legendre en el límite $s \gg |t|$ tienen la forma

$$P_l(1 + \frac{2s}{t}) \rightarrow \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma^2(l+1)} \left(\frac{s}{2t} \right)^l, \quad (16)$$

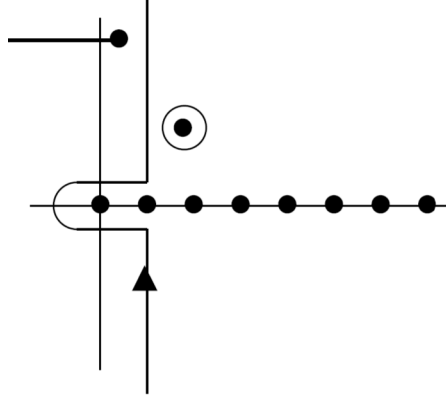


Figura 2: Plano complejo de l , donde se incluyen los polos $\alpha_i^\eta(t)$ asociados a los espines enteros y un polo adicional complejo, notar que hay un *branch point* que no se incluye dentro del contorno y que por ende no contribuye.

donde Γ son las funciones Gamma. Por lo que finalmente tenemos una expresión para las amplitudes de los *reggeons* que se intercambian para la colisión de hadrones en el límite $s \gg |t|$ (solo considerando un polo)

$$A(s, t) \approx \beta(t)(\eta + e^{-i\pi\alpha(t)})s^{\alpha(t)} \approx s^{\alpha(t)}, \quad (17)$$

donde $\alpha(t)$ es la trayectoria de Regge; esta se relaciona con la masa m y espín J de una familia de partículas compuestas (resonancias) que se intercambian en el canal t , y cumple la relación $\alpha(t = m^2) = J$ para cada partícula que viva en dicha trayectoria. Cabe mencionar que la expresión (17), es la contribución de una familia completa de partículas con los mismos números cuánticos, donde uno es el estado basal y los demás son resonancias de el con diferente momentum angular. Las resonancias que se intercambian en dicho canal son mesones (compuesto de un *quark* y un anti-*quark*) o partículas compuestas de gluones.

Ya que hemos calculado como depende la amplitud de s y t , se puede relacionar con las secciones eficaces. Para calcular la sección eficaz total utilizamos el teorema óptico (9), así que depende de la parte imaginaria de la amplitud elástica para $t = 0$ (i.e. $\sigma_t \approx \frac{1}{k} \text{Im}[A^{el}(s, 0)]$); en el límite de altas energías $s \rightarrow \infty$, tenemos que $\Phi = 2s$ [26], por lo que la sección eficaz total tiene dependencia de la energía como

$$\sigma_t \approx s^{\alpha(0)-1}. \quad (18)$$

La sección eficaz diferencial es proporcional a $d\sigma/dt \approx \frac{1}{s^2} |A(s, t)|^2$ [26], lo que implica que en el caso de representar un *reggeons* tiene la forma

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx s^{2\alpha(t)-2}. \quad (19)$$

Ahora que conocemos como debiesen ser las secciones eficaces asociadas al intercambio de *reggeons*, nos enfocaremos en la trayectoria de Regge $\alpha(t)$. Si expandimos la trayectoria de Regge en torno a $t = 0$, para valores pequeños de t tenemos

$$\alpha_R(t) = \alpha_R(0) + \alpha'_R t, \quad (20)$$

donde $\alpha_R(0)$ es el intercepto y α'_R la pendiente de la trayectoria de un *reggeons* R . Como se ve en la figura 3, la aproximación está acorde a los datos experimentales de dichos mesones. La ecuación 20 no es la única forma de representar la trayectoria de Regge (e.g. Godizov [29]), pero es la usada tanto en los modelos fenomenológicos que se presentarán en lo que queda de esta sección y los trabajos con los que se comparan resultados en la sección 8.

Donnachie y Landshoff, a través de los años han comparado los modelos de intercambio de partículas compuestas de gluones en la colisión de hadrones. En lo que sigue de la sección se mostrarán diferentes análisis que han hecho comparando con datos experimentales de la época. En dichos trabajos muestran que la sección eficaz diferencial

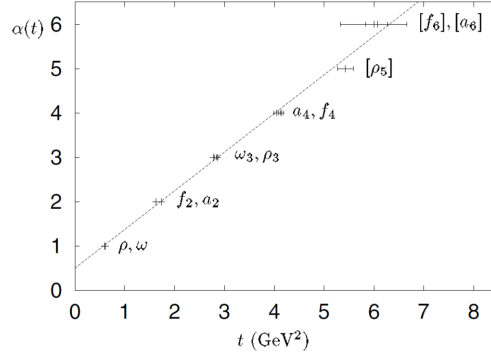


Figura 3: Se muestra la posición de diferentes resonancias de los mesones ρ, ω, a y f en una trayectoria de Regge, denominado *plot* de Chew-Frautschi [7].

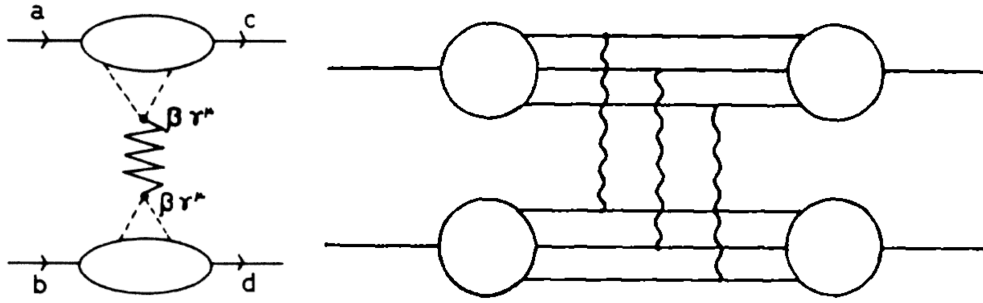


Figura 4: En (izquierda) a) se muestra el intercambio del *pomeron* entre el mar de *quarks* de cada hadrón que domina en t pequeños [10]; en (derecha) b) está el modelo de 3 gluones mostrado en [30] que domina para t grandes.

de la colisión elástica pp y $p\bar{p}$ a altas energías tienen regiones en t donde el intercambio de cantidades distintas de gluones (ver figura 4) dominan en cada una, como se muestra en la figura 5.

En 1979, Donnachie y Landshoff [31] calculan el proceso considerando que cada *quark* de los hadrones intercambia un gluón entre ellos (como en la Fig. 4.b), mostrando el mismo comportamiento que tenían los datos a valores de $-t > 3,5 \text{ GeV}^2$, lo cual indica que el intercambio de 3 gluones domina en esa región con la forma de la

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx t^{-8}, \quad (21)$$

al ver que para la región de t pequeño necesitaban incluir mas gluones, decidieron representarlo por un único objeto, el *pomeron*. Inspirados en las técnicas que se muestran al principio de la sub-sección del *Soft-Pomeron* (ver Fig. 4.a), en 1983 [30] logran mostrar para la colisión elástica pp [32,33] que $d\sigma/dt$ tiene un comportamiento acorde a la teoría de Regge (17), el cual se ajusta mejor a los datos para valores pequeños de t , como se muestra en la Fig. 5. También concluyen que en el valle que se muestra en la Fig. 5.b domina el intercambio de dos *pomerons* y los tres gluones que habíamos mencionado que dominaban en la región de t grande.

Con estos datos, modelados por el trabajo de Donnachie y Landshoff, podemos notar que en la teoría de Regge pueden haber mas de un *reggeon* compuesto de gluones. En las siguientes sub-secciones, se mostrarán modelos y datos experimentales asociados a los parámetros de la trayectoria de Regge para el *Soft-Pomeron*, *Hard-Pomeron* y el *Odderon*.

Las colisiones de hadrones podemos separarlas en 2 regiones. En primer lugar, tenemos procesos *soft* donde la escala de energía del momentum transferido t son de cientos de MeV (del orden del radio del protón); las escalas de energía donde dominan los procesos *soft* los vuelve completamente no perturbativos. Por otro lado, tenemos procesos *hard* el cual domina en escalas del momentum transferido $|t| > 1 \text{ GeV}$, en estos procesos tenemos una parte no perturbativa y otra que si lo es. A continuación, mostraremos los procesos teóricos y análisis fenomenológicos de

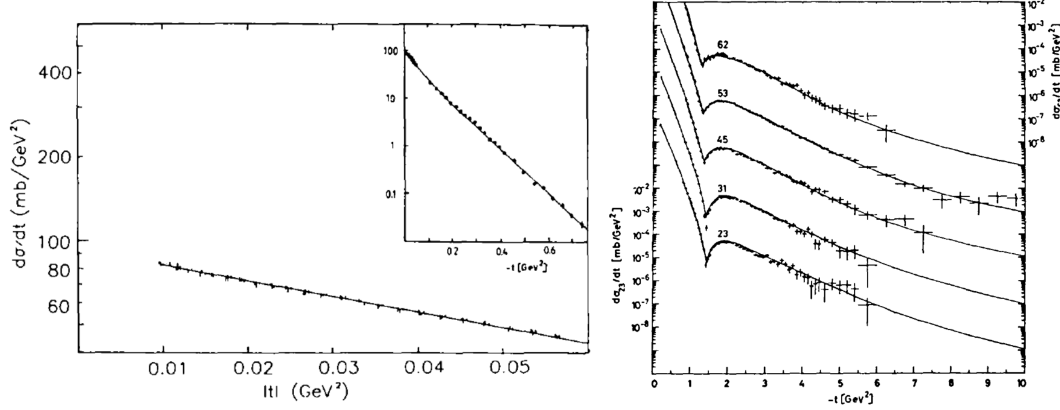


Figura 5: Se muestra la sección eficaz diferencial para la colisión pp ; en (izquierda) a) se compara el modelo [30] que intercambia un solo *pomeron* a bajos t [33] (en grande $\sqrt{s} = 52,8$ GeV y en pequeño $\sqrt{s} = 550$ GeV); en (derecha) b) se compara un modelo donde a bajo t domina el intercambio de un *pomeron*, en el valle dominan el intercambio de 2 *pomerons* y 3 gluones, y para t grande domina el intercambio de 3 gluones [30], utilizan los datos de la referencia [32].

los *reggeons* que participan en cada tipo de procesos.

3.2. Soft-Pomeron

En 1973 Jaroszkiewicz y Landshoff [10], suponiendo que los hadrones están compuestos de 3 *quarks* de valencia - los cuales le entregan sus propiedades (i.e. números cuánticos) - y un mar de pares *quarks*-antiquarks; proponen un modelo para la colisión protón-protón a altas energías y t pequeño, en el cual el *pomeron* es intercambiado desde el mar de *quarks*, tal como se muestra en la Fig. 4.a . En este trabajo, calculan que la sección eficaz diferencial debe ser

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{(3\beta F_p(t))^4}{4\pi \sin^2(0,5\pi\alpha_{SP}(t))} \left(\frac{s}{m_p}\right)^{2\alpha_1(t)-2}, \quad (22)$$

donde m_p es la masa del protón; β el acoplamiento entre *pomeron* y *quarks*; $F_p(t)$ el factor de forma del protón; y $\alpha_{SP}(t)$ la trayectoria de Regge del *Soft-Pomeron*. En dicho trabajo, comparan su modelo con los datos experimentales de la época, los cuales fueron tomados en el *Intersecting Storage Rings (ISR)* por el *CERN* [34] a energías de $s = 462, 949, 2013$ y 2808 GeV^2 ; dicha comparación nos da un valor de la pendiente del *Soft-Pomeron* de

$$\alpha'_{SP} = 0,25 \pm 0,02 \text{ } GeV^{-2}, \quad (23)$$

donde este valor de la pendiente será utilizado y confirmado por los modelos y datos posteriores para el caso del *Soft-Pomeron* que domina en la región de t pequeño.

En 1992, Donnachie y Landshoff [35] hacen un análisis fenomenológico comparando datos de experimento con su propio modelo de Regge, donde la sección eficaz total se puede escribir como

$$\sigma = X s^\varepsilon + Y s^{-\eta}, \quad (24)$$

donde $\varepsilon = \alpha_{SP}(0) - 1$ (como en (18)) y η tiene la misma interpretación física, pero asociada a mesones reggeizados. Ellos logran tener una incerteza estadística muy cercana a un modelo del *Particle Data Group*, aunque con menos grados de libertad (el *Particle Data Group* necesitó de 6 parámetros por cada experimento mostrado en la figura 6 para caracterizar los datos, mientras en este trabajo necesitaron 2 a nivel global para los exponentes y 2 por cada experimento, i.e. X e Y) y con una relación física para cada término (el primero asociado a intercambio de *pomerons* y el segundo al intercambio de los mesones ρ, ω, f y a). Al saber que el *pomeron* tiene números cuánticos nulos y un factor $C = 1$, se acoplan con la misma intensidad a partículas como a anti-partículas, teniendo así menos grados de libertad en este modelo (la mitad que el anterior, ya que solo Y cambia para las colisiones con anti-partículas).

En la Figura 6 se pueden ver los 9 procesos y valores que calculan con los datos, obteniendo que

$$\varepsilon = \alpha_{SP}(0) - 1 = 0,0808, \quad (25)$$

en esa misma figura se nota que el Kaón y el Pión al tener un *quark* menos, el *pomeron* se acopla a ellos con un factor de $2/3$ aproximadamente a diferencia de los hadrones, esa intensidad del acoplamiento es representada por X e Y en la ecuación 24.

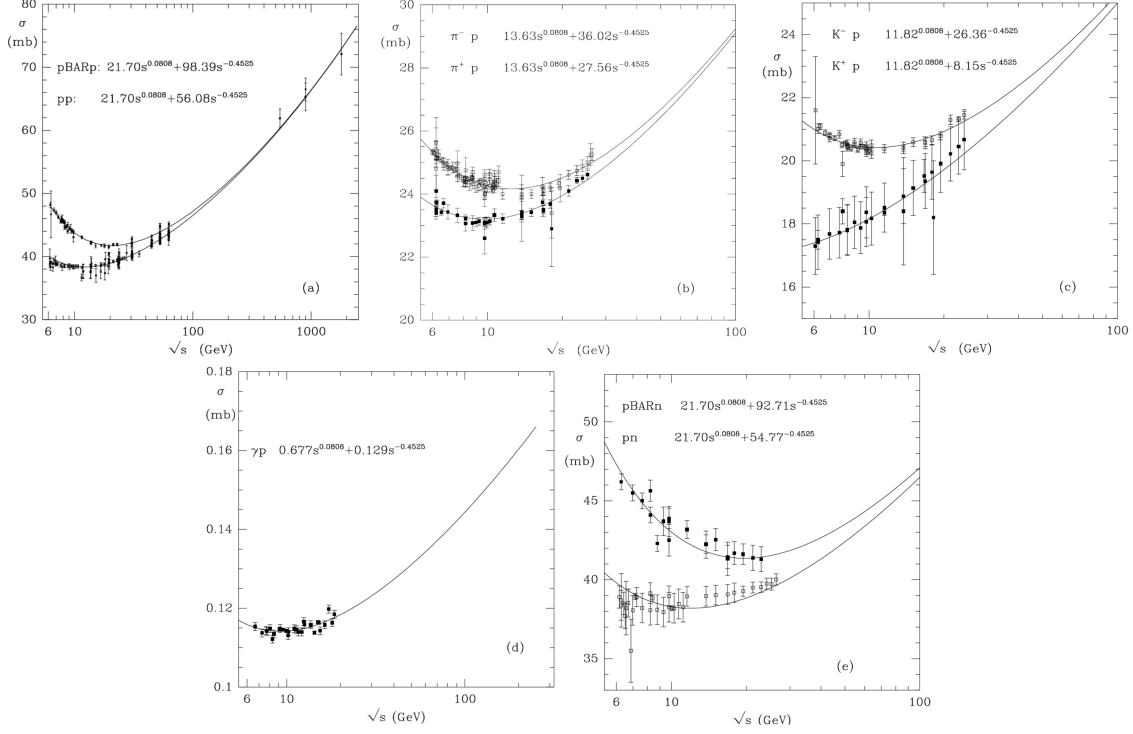


Figura 6: Se muestran las secciones eficaces dependiendo de la energía de la colisión del protón junto con kaones, piones, neutrones, fotones y protones (y sus respectivas anti-partículas). Este modelo se compara con datos de diferentes experimentos juntados por el *Particle Data Group* en 1992.

Existen otros modelos que obtienen resultados diferentes, aunque no demasiado. Por ejemplo, en 1993 [36] la colaboración CDF del FERMILAB calculó que $\varepsilon = \alpha_1(0) - 1 = 0,112 \pm 0,013$; en 1997 Cudell, Kang y Kim [37] filtrando datos (comparando resultados con datos dentro de 1 y 2 σ 's), preocupándose de minimizar la incerteza estadística y separando la contribución de los mesones en los que son par e impar en carga, se obtiene el valor del intercepto de $0,096^{+0,012}_{-0,009}$. En 2022 [29], Godizov en un modelo eikonal que incluye al *Hard-Pomeron* obtiene un intercepto de 0,114.

3.3. *Hard (BFKL) Pomeron*

En el nacimiento de QCD, una tarea era encontrar partículas con los números cuánticos del vacío (como modelo de *pomeron*), ninguna partícula fundamental cumplía estos requisitos. Durante los 70 (década en la cual nació esta teoría) también se estudiaron las singularidades de la amplitud en teorías de Yang-Mills y QED para colisiones a altas energías (inspirados en la teoría de Regge). En 1975, Low [11] presenta un *bag model* para el menor orden del *pomeron* (lo que denomina *bar pomeron*) el cual consiste de dos gluones intercambiándose entre *quarks* confinados. Esto para conseguir lo que se observaba de las interacciones hadronicas en esos tiempos, que la sección eficaz total se mantiene aproximadamente constante entre 10 y 300 GeV de energía. Ese mismo año, Nussinov [12] desarrolla un método diagramático para crear diagramas de *quarks* y gluones con color que aporten a la sección eficaz en colisión de hadrones, esto incluye un apartado específico para el intercambio de *pomeron*. En 1976, Nussinov [13] resume las

ideas planteadas por el y Low en un trabajo donde calcula los interceptos de diferentes representaciones pictóricas de procesos para la colisión de hadrones.

Balitski, Fadin, Kuraev y Lipatov (BFKL) [14, 15] desarrollan una ecuación integral para describir la evolución de una escalera de gluones a primer orden en una aproximación logarítmica en $\ln(s)$, donde los gluones verticales están reggeizados (i.e. su amplitud sigue la ecuación (17)) y se conectan con los gluones horizontales a través de un vértice efectivo no local que suma sobre contribuciones de diferentes diagramas (ver figura 7). En este trabajo se seguirá la metodología desarrollada en [7, 26]. Para el caso donde esa escalera de gluones fuera representada por un singlete, la ecuación BFKL a primer orden está dada por la figura 7

$$[\omega - \varepsilon_G(-k_1^2) - \varepsilon_G(-(k_1 - q)^2)]f(\omega, k_1, k_2, q) = \delta^2(k_1 - k_2) - \frac{N_c \alpha_s}{2\pi} \int d^2 k' \left[\frac{q^2}{(k' - q)^2 k_1^2} - \frac{1}{(k' - k_1)^2} \left(1 + \frac{(k_1 - q)^2 k'^2}{(k' - q)^2 k_1^2} \right) \right] f(\omega, k', k_2, q), \quad (26)$$

donde ε_G son las correcciones radiativas virtuales; α_s el acoplamiento fuerte y N_c es el número de cargas de color.

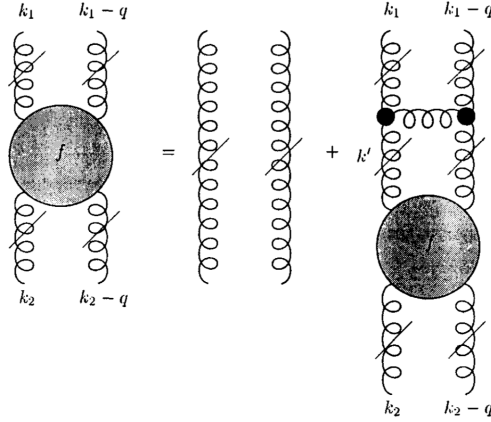


Figura 7: En el lado izquierdo se muestra la contribución en el canal t , donde f corresponde a la suma de escaleras de gluones. Esta representación diagramática representa la ecuación BFKL de la ecuación (26) [7].

Para el caso donde no hay momentum transferido (i.e. $t = q = 0$), los términos ε los pasamos al lado derecho de la ecuación y les realizamos un cambio de variable, se tiene que la expresión se reduce a

$$\omega f(\omega, k_1, k_2, 0) = \delta^2(k_1 - k_2) + K \otimes f(\omega, k_1, k_2, 0), \quad (27)$$

donde

$$K \otimes f(\omega, k_1, k_2, 0) = \frac{N_c \alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2 k'}{(k_1 - k')^2} \left[\delta(k_1 - k') - \frac{k_1^2}{k'^2 + (k_1 - k')^2} \right] f(\omega, k_1, k_2, 0). \quad (28)$$

Se encuentra la solución de la ecuación (27) calculando las auto-funciones de K

$$K \otimes \phi_a = \omega_a \phi_a, \quad (29)$$

que cumplen con la relación de completitud $\sum_a \phi_a(k) \phi_a(k') = \delta^2(k - k')$. Calculamos $K \otimes \phi_a$ desde (28) en coordenadas polares y ocupando el *ansatz*

$$\phi_{n\nu}(|k|, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (k^2)^{-1/2+i\nu} e^{in\theta}, \quad (30)$$

obtenemos

$$K \otimes \phi_{n\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int dk'^2 d\phi \frac{1}{k_1^2 - k'^2 - 2|k_1||k'| \cos(\chi)} \left[(k'^2)^{-1/2+i\nu} e^{in\phi} - \frac{k_1^2 (k_1^2)^{-1/2+i\nu} e^{in\theta}}{k_1^2 + 2k'^2 - 2|k_1||k'| \cos(\chi)} \right], \quad (31)$$

donde $\chi \equiv \phi - \theta$.

Desde (29), despejamos ω_a

$$\omega_n(\nu) = \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int dk'^2 d\chi \frac{1}{k_1^2 - k'^2 - 2|k_1||k'| \cos(\chi)} \left[\left(\frac{k'^2}{k_1^2} \right)^{-1/2+i\nu} e^{in\chi} - \frac{k_1^2}{k_1^2 + 2k'^2 - 2|k_1||k'| \cos(\chi)} \right]. \quad (32)$$

Al resolver la integral angular, nos dan varios términos, si a algunos de estos le realizamos el cambio de variable $x \equiv \frac{k_1^2}{k'^2}$ y a otros $x \equiv \frac{k'^2}{k_1^2}$ tendremos cancelaciones entre ellos. Así, nos queda la solución

$$\omega_n(\nu) = \frac{2N_c \alpha_s}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^1 dx \frac{x^{(|n|+1)/2-i\nu} - 1}{1-x} \right], \quad (33)$$

el cual puede ser expresado en término de la función digamma

$$\gamma(z) \equiv \frac{d(\ln(\Gamma(z)))}{dz} = \int_0^1 dx \frac{x^{z-1}}{x-1}, \quad (34)$$

lo que nos deja la expresión final

$$\omega_n(\nu) = -\frac{2N_c \alpha_s}{\pi} \text{Re}[\gamma((|n|+1)/2 - i\nu) - \gamma(1)]. \quad (35)$$

La función tiene un máximo, dado por el primer orden (i.e. $n = \nu = 0$). Este se relaciona con el intercepto del *pomeron*, así que aproximadamente el intercepto es

$$\omega_0(0) = -\frac{2N_c \alpha_s}{\pi} \text{Re}[\gamma(1/2) - \gamma(1)] = -\frac{2N_c \alpha_s}{\pi} (-\ln(4)) = \alpha_s \cdot 2,6476... , \quad (36)$$

donde calculan que si $\alpha_s \approx 0,2$ el intercepto debiese ser $\omega_0(0) \approx 0,5$.

Por otro lado, en 1986 Lipatov [16] encuentra un limite inferior para el intercepto (a primer orden) del *bare pomeron*. Dicho límite es

$$\alpha_{HP}(0) - 1 \gtrsim 0,3, \quad (37)$$

donde $\alpha_{HP}(0)$ es el intercepto del *Hard-Pomeron*; dicho límite está en concordancia con el resultado anterior, incluso si permitimos que α_s tome otros valores cercanos. Veamos ahora, que tal se ajustan con los datos experimentales.

Vimos anteriormente que en el límite entre los procesos *soft* y *hard*, además de la contribución de los tres gluones, contribuyen dos *pomerons*. En 1998 [38], Donnachie y Landshoff comentan que los nuevos datos muestran que debiese haber otro *pomeron* con intercepto aproximadamente de 0.4; por lo que a su parametrización para los procesos *soft* le agregan un nuevo factor asociado al *Hard-Pomeron*. Allí utilizan dos parametrizaciones que le dan valores de 0,435 y 0,418 dependiendo del modelo. También argumentan que la pendiente debe ser mas pequeño para ajustarse a los datos, ellos utilizan en este y futuros trabajos un valor de $\alpha'_{HP} = 0,1 \text{ GeV}^{-2}$. En 2001 [39], repiten el modelo con nuevos datos, obteniendo valores del *intercept* de 0,4372 y 0,3936, todos acordes al límite de Lipatov.

En 2014 [40] Godizov analiza los datos del proceso γp y encuentra que el intercepto del *Hard-Pomeron* para ajustarse a la sección eficaz diferencial debe ser $\alpha_1^h(0) - 1 \approx 0,317$. En 2022 [29], Godizov calcula teóricamente la sección eficaz diferencial para una colisión elástica difractiva de nucleones, en un formalismo de Regge-eikonal. En este modelo, incluyen a primer orden el *Soft-Pomeron* y el mesón f reggeizado. Para valores mayores de $\sqrt{s} \geq 7 \text{ TeV}$ (Fig. 8) se ve que el modelo funciona solo para valores pequeños de t , así que incluye al *Hard-Pomeron* con el intercepto calculado en el 2013, y se puede ver en la figura 8 con la linea punteada que el modelo se ajusta bastante bien con los últimos datos de ATLAS y TOTEM.

3.4. Odderon

En 1975; Joynson, Leader, Nicolescu y Lopez [17] analizan la discrepancia entre, los datos de colisiones de hadrones donde existe un intercambio de carga entre ellos tal como $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ y los modelos ya existentes donde se intercambian dos mesones ρ , donde uno de ellos está reggeizado. Analizan la contribución de partículas con espín 1,

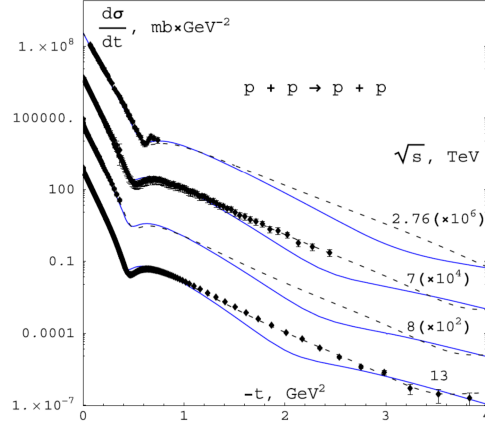


Figura 8: Se ve la comparación entre los datos a diferentes energías, donde la línea sólida es el modelo sin *Hard-Pomeron* y la línea cortada es ya incluyéndolo. Datos de ATLAS y TOTEM a diferentes energías en los puntos negros [29].

ven los efectos de incluir una partícula que llaman Q y además se incluyó un polo de Regge con intercepto $\alpha(0) = 1$ el cual debiese estar compuesto de un número impar de gluones, el cual llamaron *odderon*.

En 2021, la colaboración entre los experimentos DØ y TOTEM [41] publicó el descubrimiento del intercambio de una partícula compuesta de gluones, sin carga de color y C-impar (i.e. se acopla diferente a la colisión pp que a la $p\bar{p}$ y por ende contribuye negativamente a una de las amplitudes). Un grupo extrapoló los datos de los experimentos de colisión pp a energías de 2.76, 7, 8 y 13 TeV detectados por TOTEM hasta una energía de 1.96 TeV, esto se hace para compararlos (ver figura 9) con los datos de la colisión $p\bar{p}$ detectados por DØ que fueron a dicha energía. Obtuvieron un error en la extrapolación de 3.4σ 's, lo cual lo asocian a que el *odderon* al acoplarse con signo diferente a ambos procesos debe dominar en estas regiones y explica la diferencia de comportamientos entre estas colisiones. Un grupo de la colaboración analizó los datos a 13 TeV de TOTEM pero a ángulos muy pequeños (donde debiese dominar el intercambio de *reggeons*). Encuentran que el radio entre la parte real e imaginaria de la amplitud decae a altas energías a diferencia de los modelos usuales, el decrecimiento de este radio, argumentan que se debe al intercambio de una partícula con C-impar. con una significancia de $3.4\text{--}4.6 \sigma$. Combinando ambos datos de los grupos independientes tenemos una significancia total de al menos 5.2σ , convirtiéndose entonces en la primera evidencia experimental de la existencia del *odderon*.

Después de la publicación sobre el descubrimiento del *odderon*, surgieron artículos cuestionando la metodología [42] de esa declaración y contra-respuestas respaldándola [43]. Esas discusiones están fuera de el objetivo de esta tesis, aunque se deben mencionar para clarificar que el descubrimiento de esta partícula sigue siendo tema de debate en la comunidad científica.

En esta sección, se calculó la forma que debe tener la amplitud de *scattering* asociada a proceso donde se intercambian partículas reggeizadas y se mostraron modelos teóricos y fenomenológicos que buscaban estas partículas en los datos experimentales. Obtenemos un rango de valores para el intercepto del *Soft-Pomeron* y el *Hard-Pomeron*. En la próxima sección, se introduce el concepto de grupo de renormalización, ya que en este trabajo se busca ver como evolucionan las 'constantes' de nuestra teoría, en especial las relacionadas al intercepto y pendiente de los *pomerons*.

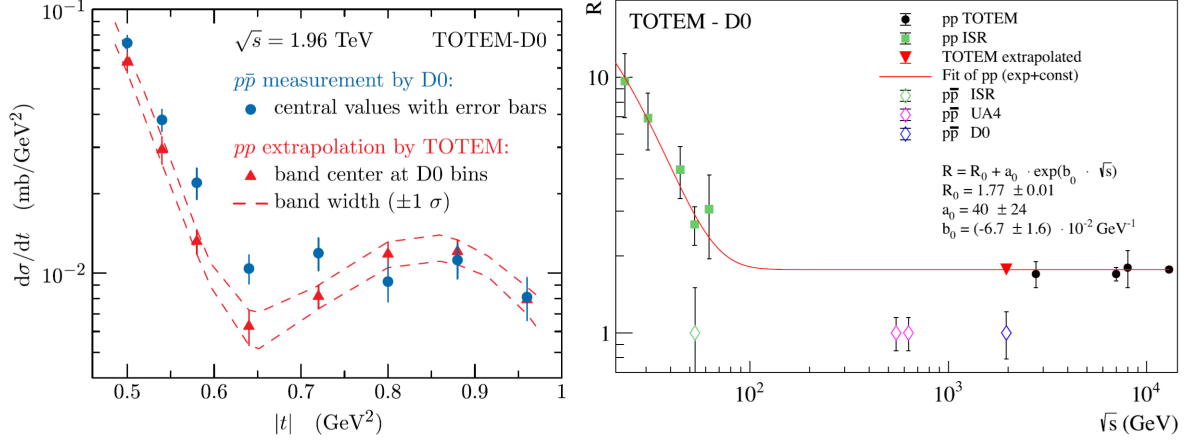


Figura 9: En *izquierda* a) se comparan los datos de la extrapolación hecha por TOTEM de la colisión pp (en rojo) con los medidos en DØ de la colisión $p\bar{p}$ (en azul). Se ve que en la colisión $p\bar{p}$ se mantiene aproximadamente constante cuando aumenta $|t|$, mientras pp tiene un punto silla mínimo y otro máximo para luego decaer. En *derecha* b) muestran la diferencia entre los puntos silla mínimo y máximo R [41].

4. Grupo de Renormalización

A finales de la década de los 30, la teoría cuántica de campos estaba lo bastante desarrollada para tener varios resultados de colisiones considerando estados intermedios como diagramas de árbol. Sin embargo, cuando se trataba de realizar cálculos incluyendo *loops* como estados intermedios (i.e. correcciones radiativas), resultaba que observables daban resultados divergentes. Ya después de la segunda guerra mundial varios físicos empezaron a trabajar en encontrar una estructura en aquellos infinitos, desarrollando la idea de contra-términos en teoría de perturbaciones y de como podemos medir diferentes observables efectivos a diferentes escalas de energía, generándose las nociones de renormalización (que es como llamaron a este proceso) para teorías de campos cuánticos [44].

Por otro lado, en el área de la materia condensada las transiciones de fase de segundo orden eran un gran desafío para la comunidad. Kadanoff [45] en 1966, describe el comportamiento de la energía libre en el modelo de Ising cerca de la temperatura crítica, donde ocurre una transición de fase. Para esto introduce bloques de espines en la red, las cuales considera que tiene un largo grande L (comparado con cada celda de espín unitaria), pero mucho mas pequeña que el largo de coherencia (el cual define un rango de interacción entre dos celdas, e.g. las funciones de correlación dependen de dicho largo). En ese trabajo, calcula la dependencia que tienen parámetros físicos en este modelo con L , mostrando como cambian estos parámetros según la escala a la cual la estamos observando, ya que el tamaño de L de dichos bloques de espín es arbitrario, siguiendo solo las indicaciones mencionadas al principio. La conclusión más importante asociada al grupo de renormalización de este trabajo, es que dicho tamaño del bloque de espines nos indica la resolución a la cual se está analizando el problema, y por ende es una escala y los observables varían con ella.

En 1971, Wilson [46, 47] formaliza la idea de la dependencia de los observables de una escala, en la cual dejamos fuera modos que puedan ocurrir a energías que no estén dentro de esa escala. La idea principal que ocuparemos en este trabajo es la de funciones β

$$\beta_i = \Lambda \frac{\partial \lambda_i}{\partial \Lambda}, \quad (38)$$

las cuales al ser las derivadas de los observables (λ_i 's) con respecto a dicha escala Λ ; nos indica como evoluciona la medición que se realiza de esos parámetros al ir modificando la escala, lo cual en un experimento de física de partículas representaría la escala de energías a la cual el experimento se está realizando.

El grupo de renormalización ha sido una herramienta útil en distintas áreas de la física y existen muchos detalles que no se discuten en esta tesis. A continuación, nos enfocaremos en herramientas no perturbativas del grupo de renormalización, como lo es el grupo de renormalización funcional.

4.1. Ecuación del Grupo de Renormalización Funcional

En 1984, Polchinski [48] calcula la ecuación exacta del grupo de renormalización para una teoría de una acción efectiva con acoplamiento $\lambda\phi^4$. Él separa la dependencia de la escala en una parte perturbativa y otra que no lo es; argumentando que el método puede extenderse a cualquier sistema que dependa de una escala, independiente si se puede utilizar teoría de perturbación. Por ende, esta metodología se puede usar en teorías que intenten describir sectores no perturbativos, como es el caso de esta tesis. Aunque en este trabajo no se utilice el método de Polchinski, él introdujo la noción de que se pueda utilizar el grupo de renormalización no solo para *loops* en diagramas de Feynman, sino que también para teorías efectivas en sectores no perturbativos.

En 1992, Wetterich [3] calcula una ecuación de evolución exacta para la dependencia de la escala en una acción efectiva Γ_k . Una de las características mas importantes de esta ecuación del grupo de renormalización es que aplica para regiones no perturbativas, que como vimos anteriormente es una de las regiones que nos interesa para analizar el intercambio de *reggeons*. En esta sub-sección calcularemos dicha ecuación, la que será clave en nuestro trabajo.

Empezamos con una teoría con N campos escalares χ^a , representada por una acción $S[\chi^a]$ (para campos escalares reales $\chi^a(-q) = \chi_a^*(q)$). A la acción le añadimos un término cinético

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} R_k(q) \chi_a^*(q) \chi^a(q), \quad (39)$$

donde $R_k(q)$ es el regulador, el cual se encarga de eliminar los modos que estén fuera del rango de interés de la escala k . Mas adelante se explicará el regulador usado y como esto permite integrar solo los modos deseados. A la

acción le agregamos un término de fuente

$$S_k = S + \Delta S_k - \int d^D x J_a(x) \chi^a(x), \quad (40)$$

por lo que acabamos de definir una acción dependiente de la escala k . Con esto podemos definir un generador funcional k -dependiente

$$W_k[J] = \ln(Z_k[J]) = \ln \left(\int \mathcal{D}\chi \exp(-S_k[\chi, J]) \right), \quad (41)$$

donde Z_k es la función partición que depende de k . En el límite $k \rightarrow \Lambda$, $W_k \rightarrow W_\Lambda$ genera las funciones de correlación exacta de n -puntos para S , la cual se denomina como acción clásica. El caso de este límite como del límite IR (i.e. $k \rightarrow 0$), el cual nos entrega la acción efectiva completa $\Gamma = \Gamma_{k=0}$, nos muestran dos casos extremos de la teoría el cual nos gustaría conectar. Como se muestra en la figura 10, si empezamos en la escala $k = \Lambda$, podemos encontrar en el espacio de la teoría (i.e. el espacio de los parámetros de la acción) trayectorias que conecten estos puntos. Exactamente este es el proceso que encontramos con las funciones β en las siguientes secciones, donde el análisis del flujo de la ecuación exacta del grupo de renormalización funcional nos permite conectar dos estados del *pomeron*.

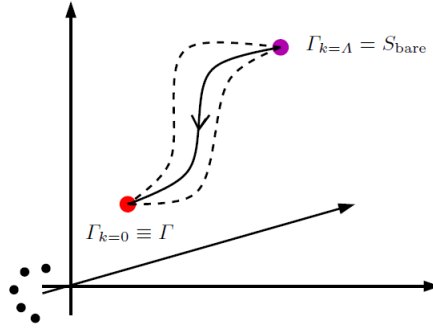


Figura 10: Se muestra la evolución en el espacio de la teoría de la acción efectiva mientras evoluciona en torno a k . Lo que en la figura se denomina como S_{bare} [49], Wetterich [3] lo llama acción clásica.

Calculamos la derivada funcional de W_k para obtener dichas funciones de correlación

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_k}{\delta J_a(x)} &= \frac{1}{Z_k[J]} \frac{\delta Z_k[J]}{\delta J_a(x)} = \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\chi \frac{\delta(-S_k)}{\delta J_a(x)} \exp(-S_k[\chi, J]) \\ &= \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\chi \left(\int dz \frac{\delta J_b(z)}{\delta J_a(x)} \chi^b(z) \right) \exp(-S_k[\chi, J]) \\ &= \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\chi \left(\int dz \delta(x-z) \delta_b^a \chi^b(z) \right) \exp(-S_k[\chi, J]) \\ &= \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\chi \chi^a(x) \exp(-S_k[\chi, J]) \equiv \langle \chi^a(x) \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

encontrando que la primera derivada resulta ser el valor de expectación de los campos χ (notar que cambiamos las etiquetas de (40), i.e. $x, a \rightarrow z, b$). Definimos un campo macroscópico correspondiente al valor de expectación de χ

$$\varphi^a(x) \equiv \langle \chi^a(x) \rangle = \frac{\delta W_k}{\delta J_a(x)} \quad (43)$$

donde se omite la dependencia de J de φ , (i.e. $\varphi^a(q) \equiv \varphi^a(q)[J]$), además se omitirá la dependencia en k que tienen

φ y J . De la misma manera que antes, calculamos la segunda derivada funcional

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J^b(y)} \left(\frac{\delta W_k}{\delta J_a(x)} \right) &= \frac{\delta(Z_k^{-1})}{\delta Z_k} \cdot \frac{\delta Z_k}{\delta J^b(y)} \cdot \int \mathcal{D}\chi \chi^a(x) \exp(-S_k[\chi, J]) + \\
&\quad \frac{1}{Z_k} \cdot \int \mathcal{D}\chi \chi^a(x) \left(\frac{\delta(-S_k)}{\delta J^b(y)} \right) \exp(-S_k[\chi, J]) \\
&= -\frac{1}{Z_k^2} \cdot \int \mathcal{D}\chi \chi_b(y) \exp(-S_k[\chi, J]) \cdot \int \mathcal{D}\chi \chi^a(x) \exp(-S_k[\chi, J]) + \\
&\quad \frac{1}{Z_k} \cdot \int \mathcal{D}\chi \chi^a(x) \chi_b(y) \exp(-S_k[\chi, J]),
\end{aligned} \tag{44}$$

obteniendo la función de correlación de 2 puntos

$$G_k(x, y)_b^a = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J_a(x) \delta J^b(y)} = \langle \chi^a(x) \chi_b(y) \rangle - \langle \chi^a(x) \rangle \langle \chi_b(y) \rangle. \tag{45}$$

Introducimos la acción efectiva $\tilde{\Gamma}_k[\varphi_k]$ mediante una transformada de Legendre

$$\tilde{\Gamma}_k[\varphi_k] = \int d^D x J_a(x) \varphi_k^a(x) - W_k[J], \tag{46}$$

tal que

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi^a(x)} = J_a(x). \tag{47}$$

Diferenciamos (43) y (47) para buscar una relación entre ellos

$$\frac{\delta \varphi^a(x)}{\delta J^b(y)} = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J^b(y) \delta J_a(x)} \tag{48}$$

$$\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi_b(y) \delta \varphi^a(x)} = \frac{\delta J_a(x)}{\delta \varphi_b(y)} \tag{49}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi_b(y) \delta \varphi^a(x)} = \left(\frac{\delta^2 W_k}{\delta J^b(y) \delta J_a(x)} \right)^{-1} = (G_k(x, y)_b^a)^{-1} \tag{50}$$

$$\Rightarrow \int d^D G_k(x, y)_b^a \cdot \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi^c(z) \delta \varphi_b(y)} = \delta(x - z) \delta_c^a. \tag{51}$$

Para valores fijos de φ_k , tenemos que

$$\partial_t \tilde{\Gamma}_k|_{\varphi_k} = k \partial_k \tilde{\Gamma}_k|_{\varphi_k} = -\partial_t W_k|_J = \langle \partial_t \Delta S_k \rangle. \tag{52}$$

donde realizamos el cambio de variable $t \equiv \ln(k/k_0)$ (no confundir con la variable de Mandelstan). Calculamos la última expresión

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \Delta S_k \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \chi_a(x) (\partial_t R_k(x, y)) \chi^a(y) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \partial_t R_k(x, y) \langle \chi_a(x) \chi^a(y) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \partial_t R_k(x, y) [G(x, y) + \langle \chi(x)_a \rangle \langle \chi(y)^a \rangle] \\
&= \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \partial_t R_k(x, y) [G(x, y) + \varphi_a(x) \varphi^a(y)],
\end{aligned} \tag{53}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Gamma}_k|_{\varphi_k} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Gamma}_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^D x d^D y (\partial_t R_k(x, y)) G(x, y) + \int d^D x d^D y \varphi(x) (\partial_t R_k(x, y)) \varphi(y), \tag{54}$$

realizamos una re-definición de $\tilde{\Gamma}$

$$\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_k - \Delta S_k. \quad (55)$$

Antes vimos que la función de Green correspondía a la inversa de las derivadas funcionales de $\tilde{\Gamma}$, por lo que utilizamos (55) para ver su dependencia en Γ_k

$$G(x, y)^{-1} = \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}(\Gamma_k + \Delta S_k) = \Gamma_k^{(2)} + R_k. \quad (56)$$

Si diferenciamos, tenemos

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int d^D x d^D y (\partial_t R_k(x, y)) G(x, y) = \frac{1}{2} \text{Tr}[G \partial_t R_k] = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_t R_k] \quad (57)$$

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_t R_k]. \quad (58)$$

La última expresión es la ecuación de Wetterich, la cual será la pieza principal en este trabajo para encontrar las funciones β de la acción efectiva que proponemos en la siguiente sección.

La traza tiene una representación diagramática (ver figura 11) la cual se relaciona con los diagramas *one particle irreducible* 1PI.

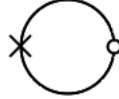


Figura 11: Representación diagramática de la traza de (58), donde la cruz es $\partial_t R_k$ y el círculo a la derecha es el propagador dependiente de la escala $(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$.

En esta y las secciones anteriores introducimos todos los conceptos necesarios para empezar nuestra investigación. En la próxima sección se introducirá la acción efectiva y el regulador a utilizar, para resolver la ecuación de Wetterich.

5. Acción efectiva y el regulador

En esta sección se definirá la acción efectiva a usar para la descripción de los *reggeons* a analizar y los elementos necesarios que permitan resolver la ecuación del grupo de renormalización funcional. En 1967, Gribov [23] desarrolla reglas para calcular diagramas de Feynmann en procesos en los que están involucrados *reggeons*; inspirados en ese trabajo, aparecen teorías de campos efectivas que quieren derivar dichas reglas a través de una acción efectiva [21]. En ese contexto de una Teoría de Campos de *reggeons* (TCR), se empieza con M diferentes *reggeons* representados por campos escalares ψ_i , tal como se propone en [1, 2, 20], la acción efectiva tiene la forma

$$\Gamma_k[\psi_i^\dagger, \psi_i] = \int d^D x d\tau [Z_i(\frac{1}{2}\psi_i^\dagger \hat{\partial}_\tau \psi_i - \alpha'_i \psi_i^\dagger \nabla^2 \psi_i) + m_{i,l}(\psi_i \psi_l^\dagger + \psi_i^\dagger \psi_l) - \mu_i \psi_i^\dagger \psi_i - V_k[\psi_i^\dagger, \psi_i; \lambda_j]], \quad (59)$$

donde τ es la *rapidity* (tiene unidades de tiempo); D es la dimensión del espacio transversal (en esta tesis usaremos $D = 2$, así que se trabajará en 2+1 dimensiones); $l \neq i \equiv 1, \dots, M$; $j \equiv 1, \dots, N$, donde N es el número de acoplamientos que tiene el potencial; Z_i se denomina la función de onda de la renormalización; α'_i es la pendiente de la trayectoria de Regge del *reggeon* correspondiente; λ_j los acoplamientos asociados al potencial; μ_i y m las denominaremos como los parámetros de 'masas' de los campos que se relacionan con el intercepto de las trayectorias de Regge como $Z^{-1}\bar{\mu}_i = \alpha_i(0) - 1$.

En el trabajo de Gribov [23], los *reggeons* son partículas que se propagan en dos dimensiones espaciales y tienen un momentum angular que juega el rol de frecuencia; en el plano complejo de dicho momentum angular es donde vive el polo que representa estas partículas. En esa investigación, Gribov calcula la contribución de *branch points* junto a polos simples encontrando que ambos tipos de polos se influyen uno con el otro (lo que llamó *enhancement*). Ya que en esta tesis nos centramos en la investigación del *pomeron*, nos guiamos de las conclusiones sacadas cuando Gribov realiza el cálculo de las reglas en el caso de polos de Pomeranchuk (como se le llamaba al *pomeron* en esos tiempos). En el caso de los polos de Pomeranchuk se da cuenta que, para t pequeños, la mayor contribución es la de diagramas mejorados (*enhanced graphs*), los cuales solo contienen interacciones triples.

En trabajos anteriores Bartels, Contreras y Vacca estudian el caso de acciones del tipo (59) con $m_{i,l} = 0$, calculando las funciones β usando la ecuación de Wetterich. Lo hicieron para un campo con auto-interacción [1] y para dos campos interactuando con 3 términos en el potencial [2]. En ambos trabajos se expande usando la aproximación del potencial local (*LPA* ') sobre campos pequeños y solo consideran términos con dependencia cubica en los campos; resumiendo esta idea, se puede escribir el potencial como

$$V = \sum_{l,m,n} \lambda_{l,m,n} (\psi_l \psi_m^\dagger \psi_n + c.c.), \quad (60)$$

donde nos gustaría ampliar el potencial escogido en [2] y considerar todas las posibles combinaciones de campos a tercer orden, ya que como explicó Gribov [23], los diagramas con interacción triple son los diagramas que mas influyen para el límite de t pequeños.

En una sucesión de trabajos [24, 25] se compara un modelo de *BFKL-Pomeron* discreto, esto quiere decir que las auto-funciones de la ecuación de evolución BFKL que representan al *pomeron*, en el límite de x pequeño, está discretizada y por ende encuentran una familia de polos de Regge asociados a esta partícula. Calculan que el polo que lidera esta sucesión, es seguida por una serie infinita de polos menores. En dicho trabajo, utilizan estos polos discretos para describir los datos experimentales de HERA y encuentra que considerando 3 polos es suficiente para tener un buen ajuste con los datos, calculando el función de estructura F_2 .

En estos trabajos no se consideran interacciones entre *pomeron*, por lo que el uso de una teoría de campos puede agregar estos efectos en nuestra teoría. Ellos muestran una concordancia de los datos en el caso de tener 3 polos, por lo que el poder estudiar el caso de dos campos con interacciones en esta tesis, sirve como un primer paso para en un futuro crear un modelo que pueda realizar un mapeo con los datos y concluir si es necesario el uso de un tercer campo para caracterizar los datos.

El uso de tres campos en nuestra acción, genera un problema en término de gasto computacional. Si se escogen dos campos ($l, m, n = 1, 2$) y consideramos interacciones hasta tercer orden, el cálculo de las funciones β nos dará nueve ecuaciones diferenciales, 3 de masa y 2^3 del potencial (por simetría nos quedan 6 contribuciones). En el caso de usar tres campos, tendríamos 6 de masa y 3^3 en el potencial. Aunque usando propiedades de simetría de los vértices el número de funciones β se reduce, aún seguirá siendo bastante grande en comparación con el caso de dos campos; al resolverlas analítica y numéricamente se gastará bastantes recursos de cómputo, por esa razón en esta

tesis se usarán dos campos buscando automatizar el método, y así que sea mas sencillo ampliarlo a más campos u ordenes de interacción en el potencial.

En resumen, en esta tesis se considerarán dos campos interactuando (i.e. $i = 1, 2$) para poder realizar comparaciones con [2] y 6 acoplamientos a tercer orden del potencial (i.e. $j = 1, \dots, 6$); cabe mencionar que son todos los términos con dependencia cubica en los campos usando la expansión *LPA*'. En ordenes superiores se calculan de la misma manera, por lo que esos casos se pueden considerar en trabajos futuros. Así que el potencial que utilizaremos es

$$V_k[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger] = i\lambda_1\psi^\dagger(\psi^\dagger + \psi)\psi + i\lambda_2\chi^\dagger(\chi^\dagger + \chi)\chi + i\lambda_3\psi^\dagger(\chi^\dagger + \chi)\psi + i\lambda_4\chi^\dagger(\psi^\dagger + \psi)\chi + i\lambda_5((\chi^\dagger)^2\psi + \chi^2\psi^\dagger) + i\lambda_6((\psi^\dagger)^2\chi + \psi^2\chi^\dagger), \quad (61)$$

donde $\psi \equiv \psi_1$ y $\chi \equiv \psi_2$. La acción efectiva a usar es

$$\Gamma_k \equiv \Gamma_k[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger] = \int d^D x d\tau [Z_1(\frac{1}{2}\psi^\dagger \hat{\partial}_\tau \psi - \alpha'_1 \psi^\dagger \nabla^2 \psi) + Z_2(\frac{1}{2}\chi^\dagger \hat{\partial}_\tau \chi - \alpha'_2 \chi^\dagger \nabla^2 \chi) + m(\psi\chi^\dagger + \chi^\dagger\psi) - \mu_1\psi^\dagger\psi - \mu_2\chi^\dagger\chi - V_k[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger]]. \quad (62)$$

En las secciones 2, 3 y 4 se consideró a t como la variable de Mandelstan, desde ahora nos referiremos a t como una función del momentum y la escala (i.e. $t \equiv \ln(k/k_0)$). Las funciones β que calcularemos, resultarán ser ecuaciones diferenciales con respecto a esta nueva variable t . Introduciremos el parámetro $r \equiv \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}$, ya que este nos entregará una décima ecuación diferencial

$$\dot{r} = r(\xi_2 - \xi_1), \quad (63)$$

donde $\xi_i \equiv \frac{1}{\alpha'_i} \partial_t \alpha'_i$ son unas de las dimensiones anómalas. La introducción de este parámetro y de su respectiva ecuación diferencial nos permitirá tener la misma cantidad de ecuaciones diferenciales que de variables, por lo que en la sección de resultados numéricos se podrá hacer uso de algoritmos que requieran el calculo de inversas de matrices cuadradas. Introducimos las otras dimensiones anómalas $\eta_i \equiv \frac{1}{Z_i} \partial_t Z_i$, las cuales serán calculadas también en la sección 7.

Nos gustaría trabajar con la contribución explícita en la acción de la escala k , por lo que realizaremos un cambio a las variables adimensionales de todos los parámetros de la acción. Además, desde ahora, la dependencia en k la anotaremos explícitamente para elementos vectoriales o matriciales, dejando la dependencia de k en los escalares implícitamente (e.g. $V_k[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger] \rightarrow V[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger]$), a excepción de la acción Γ_k .

5.1. Análisis Dimensional

Para poder trabajar con parámetros adimensionales, se debe saber que dimensión tiene cada campo y parámetro en la acción. Para encontrar esto, primero se define la dimensión de las variables espacio-temporales como

$$[x] = k^{-1} \quad [\tau] = E^{-1}$$

y Z_i es adimensional. Luego, sabiendo que la acción (62) es adimensional se pueden encontrar las dimensiones de los demás parámetros. Como ejemplo, analizamos la dimensión de un solo término de la acción

$$\begin{aligned} \left[\int d^D x d\tau Z_1 \frac{1}{2} \psi^\dagger \hat{\partial}_\tau \psi \right] &= [x^D][\tau][\psi^\dagger][\hat{\partial}_\tau][\psi] = k^{-D} E^{-1} [\psi^\dagger] E [\psi] = k^{-D} [\psi^\dagger][\psi] \\ &\Rightarrow [\psi^\dagger] = [\psi] = k^{D/2}. \end{aligned}$$

Siguiendo la misma técnicas, las dimensiones de los otros parámetros de la acción son

$$\begin{aligned} [\psi^\dagger] = [\psi] = [\chi^\dagger] = [\chi] &= k^{D/2}, \quad [\alpha'_1] = [\alpha'_2] = E k^{-2}, \quad [m] = [\mu_1] = [\mu_2] = E \\ [\lambda_1] = [\lambda_2] = [\lambda_3] = [\lambda_4] = [\lambda_5] = [\lambda_6] &= k^{-D/2} E \\ [V] &= k^D E. \end{aligned}$$

Con esta información, definimos los parámetros adimensionales como

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &= \sqrt{Z_1} k^{-D/2} \psi, \quad \tilde{\chi} = \sqrt{Z_2} k^{-D/2} \chi, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\alpha'_1 k^{D+2}} \\ \tilde{m} &= \frac{m}{\sqrt{Z_1 Z_2} \alpha'_1 k^2}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{Z_1 \alpha'_1 k^2}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{Z_2 \alpha'_1 k^2} \\ \tilde{\lambda}_1 &= \frac{\lambda_1 k^{D/2}}{Z_1^{3/2} \alpha'_1 k^2}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2 k^{D/2}}{Z_2^{3/2} \alpha'_1 k^2}, \quad \tilde{\lambda}_{3,6} = \frac{\lambda_{3,6} k^{D/2}}{Z_1 \sqrt{Z_2} \alpha'_1 k^2}, \quad \tilde{\lambda}_{4,5} = \frac{\lambda_{4,5} k^{D/2}}{Z_2 \sqrt{Z_1} \alpha'_1 k^2}\end{aligned}$$

los cuales se substituyen en la acción (62).

Mas adelante, necesitaremos saber las derivadas en función de t de los acoplamientos, las cuales en su versión adimensional y utilizando que $\partial_t k^D = D k^D$ son

$$-(\partial_t \mu_1) \psi^\dagger \psi = -(\partial_t (Z_1 k^2 \alpha'_1 \tilde{\mu}_1)) \frac{\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}}{Z_1 k^{-D}} = k^{2+D} \alpha'_1 ((\eta_1 + \xi_1 - 2) \tilde{\mu}_1 - \partial_t \tilde{\mu}_1) \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \quad (64)$$

$$-(\partial_t \mu_2) \chi^\dagger \chi = k^{2+D} \alpha'_1 ((\eta_2 + \xi_1 - 2) \tilde{\mu}_2 - \partial_t \tilde{\mu}_2) \tilde{\chi}^\dagger \tilde{\chi} \quad (65)$$

$$(\partial_t m) (\psi \chi^\dagger + \psi^\dagger \chi) = k^{2+D} \alpha'_1 \left(-\frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_2}{2} - \xi_1 + 2 \right) \tilde{m} + \partial_t \tilde{m} (\tilde{\psi} \tilde{\chi}^\dagger + \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\chi}) \quad (66)$$

$$i(\partial_t \lambda_1) \psi^\dagger (\psi^\dagger + \psi) \psi = i k^{2+D} \alpha'_1 \left(-\frac{3}{2} \eta_1 - \xi_1 + 2 - \frac{D}{2} \right) \tilde{\lambda}_1 + \partial_t \tilde{\lambda}_1 \tilde{\psi}^\dagger (\tilde{\psi}^\dagger + \tilde{\psi}) \tilde{\psi} \quad (67)$$

$$i(\partial_t \lambda_2) \chi^\dagger (\chi^\dagger + \chi) \chi = i k^{2+D} \alpha'_1 \left(-\frac{3}{2} \eta_2 - \xi_1 + 2 - \frac{D}{2} \right) \tilde{\lambda}_2 + \partial_t \tilde{\lambda}_2 \tilde{\chi}^\dagger (\tilde{\chi}^\dagger + \tilde{\chi}) \tilde{\chi} \quad (68)$$

$$i(\partial_t \lambda_{3,6}) \psi^2 \chi = i k^{2+D} \alpha'_1 \left(-\eta_1 - \frac{\eta_2}{2} - \xi_1 + 2 - \frac{D}{2} \right) \tilde{\lambda}_{3,6} + \partial_t \tilde{\lambda}_{3,6} \tilde{\psi}^2 \tilde{\chi} \quad (69)$$

$$i(\partial_t \lambda_{4,5}) \chi^2 \psi = i k^{2+D} \alpha'_1 \left(-\eta_2 - \frac{\eta_1}{2} - \xi_1 + 2 - \frac{D}{2} \right) \tilde{\lambda}_{4,5} + \partial_t \tilde{\lambda}_{4,5} \tilde{\chi}^2 \tilde{\psi}. \quad (70)$$

5.2. Matriz de Green Libre

Para el caso libre (sin interacciones), realizamos una transformada de Fourier a la acción, resultando ser

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,0}[\bar{\psi}^\dagger, \bar{\psi}, \bar{\chi}^\dagger, \bar{\chi}] &= \int d^D q d\omega [\bar{\psi}^\dagger Z_1 (i\omega + \alpha'_1 q^2) \bar{\psi} + \bar{\chi}^\dagger Z_2 (i\omega + \alpha'_2 q^2) \bar{\chi} + \\ &\quad m(\bar{\psi} \bar{\chi}^\dagger + \bar{\psi}^\dagger \bar{\chi}) - \mu_1 \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} - \mu_2 \bar{\chi}^\dagger \bar{\chi}],\end{aligned} \quad (71)$$

donde $\bar{\psi}^\dagger, \bar{\psi}, \bar{\chi}^\dagger, \bar{\chi}$ son las transformadas de Fourier de sus respectivos campos y re-ordenamos los términos de la acción para encontrar la segunda derivada funcional $(\Gamma_0^{(2)})_{kl} \equiv \frac{\delta \Gamma_0}{\delta \Psi_k \delta \Psi_l^T}$

$$\Gamma_{k,0} = \frac{1}{2} \int d^D q d\omega \Psi^T \Gamma_{k,0}^{(2)} \Psi, \quad (72)$$

donde

$$\Psi^T = (\bar{\psi} \quad \bar{\psi}^\dagger \quad \bar{\chi} \quad \bar{\chi}^\dagger) \quad (73)$$

$$\Gamma_{k,0}^{(2)} = k^D \begin{pmatrix} 0 & (-i\omega + \alpha'_1 q^2 - k^2 \alpha'_1 \tilde{\mu}_1) & 0 & k^2 \alpha'_1 \tilde{m} \\ (i\omega + \alpha'_1 q^2 - k^2 \alpha'_1 \tilde{\mu}_1) & 0 & k^2 \alpha'_1 \tilde{m} & 0 \\ 0 & k^2 \alpha'_1 \tilde{m} & 0 & (-i\omega + \alpha'_2 q^2 - k^2 \alpha'_1 \tilde{\mu}_2) \\ k^2 \alpha'_1 \tilde{m} & 0 & (i\omega + \alpha'_2 q^2 - k^2 \alpha'_1 \tilde{\mu}_2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

La función de Green libre (la cual utilizaremos mas adelante) resulta ser la inversa de la matriz que hemos encontrado mas el regulador que viene de la ecuación de Wetterich

$$G_{k,0} = \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k}, \quad (75)$$

donde R_k es el regulador, el cual se escoge según la teoría que se está analizando.

5.3. Regulador y matriz de interacción

En este trabajo se utiliza el regulador de Litim [50] el cual permite dejar fuera los modos que son mayores a la escala k_0 , lo cual ocurre al tener la función Heaviside $\Theta(x)$. Esta función permite realizar la integral del momentum de una manera mas sencilla. Además, se ocupa este por coherencia al comparar nuestros resultados con [1, 2], ya que en esos trabajos utilizan ese regulador. La forma explicita del regulador que se ocupará es

$$R_1 = Z_1 \alpha'_1 (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2) \quad (76)$$

$$R_2 = Z_2 \alpha'_2 (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2) = r Z_2 \alpha'_1 (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2), \quad (77)$$

y sus derivadas

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -Z_1 \alpha'_1 (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2) (\xi_1 + \eta_1) + 2k^2 Z_1 \alpha'_1 \Theta(k^2 - q^2) \\ &= 2k^2 Z_1 \alpha'_1 \Theta(k^2 - q^2) \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q^2}{k^2}\right) (\xi_1 + \eta_1)\right) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\dot{R}_2 = 2k^2 r Z_2 \alpha'_1 \Theta(k^2 - q^2) \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q^2}{k^2}\right) (\xi_2 + \eta_2)\right), \quad (79)$$

las cuales forman las matrices reguladoras

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & R_1 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\dot{R}_k = \begin{pmatrix} 0 & \dot{R}_1 & 0 & 0 \\ \dot{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{R}_2 \\ 0 & 0 & \dot{R}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

En el propagador, tendremos los siguientes términos

$$Z_i \alpha'_i q^2 + R_i = Z_i \alpha'_i q^2 + \alpha'_i (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2) = Z_i \alpha'_i k^2, \quad (82)$$

donde este ultimo resultado es valido cuando $q^2 < k^2$, lo cual se justificará al integrar sobre q en la sección 6.1.

El potencial dependiendo solo de parámetros adimensionales es

$$\begin{aligned} V[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^\dagger, \tilde{\chi}, \tilde{\chi}^\dagger] &= \alpha'_1 k^{2D} [i\tilde{\lambda}_1 \tilde{\psi}^\dagger (\tilde{\psi}^\dagger + \tilde{\psi}) \tilde{\psi} + i\tilde{\lambda}_2 \tilde{\chi}^\dagger (\tilde{\chi}^\dagger + \tilde{\chi}) \tilde{\chi} + i\tilde{\lambda}_3 \tilde{\psi}^\dagger (\tilde{\chi}^\dagger + \tilde{\chi}) \tilde{\psi} + \\ &\quad i\tilde{\lambda}_4 \tilde{\chi}^\dagger (\tilde{\psi}^\dagger + \tilde{\psi}) \tilde{\chi} + i\tilde{\lambda}_5 ((\tilde{\chi}^\dagger)^2 \tilde{\psi} + \tilde{\chi}^2 \tilde{\psi}^\dagger) + i\tilde{\lambda}_6 ((\tilde{\psi}^\dagger)^2 \tilde{\chi} + \tilde{\psi}^2 \tilde{\chi}^\dagger)] \end{aligned} \quad (83)$$

con el cual construimos la matriz de interacción, la cual tiene como elementos las segundas derivadas del potencial con respecto a los campos.

$$V_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\psi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\psi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger} V & \frac{\partial \tilde{\psi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\psi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}^\dagger} V \\ \frac{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger} V & \frac{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}^\dagger} V \\ \frac{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger} V & \frac{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}^\dagger} V \\ \frac{\partial \tilde{\chi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\chi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger} V & \frac{\partial \tilde{\chi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}} V & \frac{\partial \tilde{\chi}^\dagger \tilde{\psi}}{\partial \tilde{\chi} \tilde{\psi}^\dagger} V \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Con todos los elementos necesarios definidos, se prosigue a resolver la ecuación de Wetterich para la acción mostrada en la ecuación (62).

6. Ecuación del Grupo de Renormalización Funcional

Durante esta sección, cuando nos referimos a los parámetros y los campos, se estará mencionando a sus versiones adimensionales, caso contrario a las secciones anterior y posterior. La ecuación del grupo de renormalización funcional (Ecuación de Wetterich) es:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \dot{R}_k], \quad (85)$$

donde $\Gamma_k^{(2)} = \Gamma_{k,0}^{(2)} - V_k$ y $\text{Tr}[\dots] \equiv \int \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{d\omega}{(2\pi)} \text{Tr}[\dots]$. Realizamos una expansión del tipo $(A - B)^{-1} = -A^{-1}(1 + BA^{-1} + B^2 A^{-2} + \dots)$ en torno a la matriz de interacción

$$(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k - V_k)^{-1} = -G_{k,0}(1 + V_k G_{k,0} + V_k G_{k,0} V_k G_{k,0} + V_k G_{k,0} V_k G_{k,0} V_k G_{k,0} + \dots). \quad (86)$$

Realizamos un cambio de variable $z \equiv \frac{i\omega}{\alpha'_1 k^2}$ y el propagador nos queda para $q^2 < k^2$

$$G_{k,0} = \frac{(k^{2+D} \alpha_1)^{-1}}{(z+1-\mu_1)(z+r-\mu_2)-m^2} \begin{pmatrix} 0 & Z_1(z+r-\mu_2) & 0 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & Z_2(z+1-\mu_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(k^{2+D} \alpha_1)^{-1}}{(-z+1-\mu_1)(-z+r-\mu_2)-m^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_1(-z+r-\mu_2) & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 0 & Z_2(-z+1-\mu_1) & 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$= \frac{1}{k^{2+D} \alpha_1} \left(\frac{G_{k,p}}{\text{Det}[+z]} + \frac{G_{k,m}}{\text{Det}[-z]} \right), \quad (88)$$

siendo $\text{Det}[\pm z] = (\pm z + 1 - \mu_1)(\pm z + r - \mu_2) - m^2$.

6.1. Integración en q

Solo $\dot{R}$ contiene una dependencia de q en el caso $q^2 < k^2$ como se muestra en (80), y todos los términos en la integral irán multiplicados por alguno de los elementos de R (i.e. solo tendremos integrales del tipo $\int dq^D (1+q^2)\dots$). Por lo que luego de integrar podemos re-definir dicha matriz para que contenga los elementos que quedaron de la integración en q

$$\dot{R}_k = k^{2D} \alpha'_1 \begin{pmatrix} 0 & Z_1 N_D A_D(\xi_1, \eta_1) & 0 & 0 \\ Z_1 N_D A_D(\xi_1, \eta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r Z_2 N_D A_D(\xi_2, \eta_2) \\ 0 & 0 & r Z_2 N_D A_D(\xi_2, \eta_2) & 0 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

donde $N_D = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^D \Gamma(D/2)}$ y $A_D(\xi_x, \eta_x) = \frac{2}{D} (1 - \frac{\xi_x + \eta_x}{D+2})$.

Ya con la integral en q realizada, el lado derecho de la ecuación de Wetterich (85) nos queda

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \dot{R}_k] = -ik^D \alpha'_1 \int \frac{dz'}{2\pi} \text{Tr}[\dot{R}_k G_0 (1 + V_k G_0 + V_k G_0 V_k G_0 + V_k G_0 V_k G_0 V_k G_0 + \dots)] \quad (90)$$

6.2. Integración en z

Para el caso de la integración en z , la traza nos entregará potencias de z divididas por el determinante de $\Gamma_k^{(2)} + R_k$. Al re-escribir el determinante, podemos encontrar 4 diferentes polos, de los cuales solo dos estarán dentro del contorno de integración (ver figura 12). Definimos el residuo de la integral, por lo que para integrar habría que reemplazar en la traza los términos en z con sus respectivos residuos.

Si nos damos cuenta, se vuelve un poco complicado ver los polos de $Det[\pm z]$, por lo que expandiremos esa expresión y encontramos los polos utilizando la solución de una función cuadrática. Al final, tenemos que los polos de $Det[z]$ son

$$z = x \pm y, \quad (91)$$

donde $x \equiv (1 + r - \mu_1 - \mu_2)/2$ e $y \equiv \sqrt{(1 - r - \mu_2 + \mu_1)^2 + (2m)^2}/2$. Los polos de $Det[-z]$ son los mismos pero negativo.

Escogemos que los dos polos que estarán dentro del contorno de integración serán los entregados por $Det[+z]$. Las integrales a calcular son

$$-i \int \frac{dz'}{2\pi} \frac{(z + r - \mu_2)^a (-z + r - \mu_2)^b (z + 1 - \mu_1)^c (-z + 1 - \mu_1)^d}{(-z + x + y)^r (-z + x - y)^r (z + x + y)^s (z + x - y)^s} = \sum Res(r, s, a, b, c, d), \quad (92)$$

donde la función $Res(r, s, a, b, c, d)$ la definimos como

$$\sum Res(r, s, a, b, c, d) = \lim_{z \rightarrow -(x+y)} \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \left(\frac{(z + r - \mu_2)^a (-z + r - \mu_2)^b (z + 1 - \mu_1)^c (-z + 1 - \mu_1)^d}{(-z + x + y)^r (-z + x - y)^r (z + x + y)^s} \right) + \lim_{z \rightarrow -(x-y)} \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \left(\frac{(z + r - \mu_2)^a (-z + r - \mu_2)^b (z + 1 - \mu_1)^c (-z + 1 - \mu_1)^d}{(-z + x + y)^r (-z + x - y)^r (z + x + y)^s} \right). \quad (93)$$

Tomamos la traza que queremos analizar y realizamos las transformaciones que indicamos en esta sección, agrupamos y encontramos las funciones β de nuestra teoría.

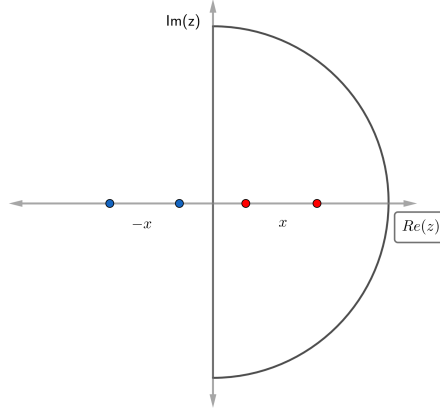


Figura 12: Se muestra el plano complejo de z , en rojo los polos de $Res[z]$ y en azul de $Res[-z]$.

6.3. Solución

En el trabajo se empieza definiendo la acción (62), donde particularmente se usa el tercer orden de la expansión polinomial local del potencial (61). Esta acción se reemplaza en la ecuación de Wetterich (85), se resuelven las integrales y el resultado nos queda distintas contribuciones en función de los campos en ambos lados de la ecuación, por eso mostraremos su forma por separado.

El lado izquierdo de la ecuación de Wetterich (85) para la acción (62) es

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k = & \dot{m}(\psi \chi^\dagger + \psi^\dagger \chi) - \dot{\mu}_1 \psi^\dagger \psi - \dot{\mu}_2 \chi^\dagger \chi + i \dot{\lambda}_1 \psi^\dagger (\psi^\dagger + \psi) \psi + i \dot{\lambda}_2 \chi^\dagger (\chi^\dagger + \chi) \chi + \\ & i \dot{\lambda}_3 \psi^\dagger (\chi^\dagger + \chi) \psi + i \dot{\lambda}_4 \chi^\dagger (\psi^\dagger + \psi) \chi + i \dot{\lambda}_5 ((\chi^\dagger)^2 \psi + \chi^2 \psi^\dagger) + i \dot{\lambda}_6 ((\psi^\dagger)^2 \chi + \psi^2 \chi^\dagger), \end{aligned} \quad (94)$$

donde cada término lo podemos remplazar por las ultimas ecuaciones (64-70) de la sección de análisis dimensional. El lado derecho de la ecuación de Wetterich, hasta tercer orden de la matriz V , nos queda

$$\frac{1}{2}Tr[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}\dot{R}_k] = \alpha'_1 k^D \left(Tr[\dot{R}GVGVG] + Tr[\dot{R}GVGVGVG] \right), \quad (95)$$

donde realizamos el siguiente remplazo desarrollado en la sub-sección anterior

$$\frac{(z+r-\mu_2)^a(-z+r-\mu_2)^b(z+1-\mu_1)^c(-z+1-\mu_1)^d}{(-z+x+y)^s(-z+x-y)^s(z+x+y)^r(z+x-y)^r} \rightarrow \Sigma Res[r, s, a, b, c, d]. \quad (96)$$

Notamos que las contribuciones de k y α'_1 de las matrices $\dot{R}$, G y V se anulan entre si. Factorizando el resultado final en orden de los campos e igualando los lados izquierdo y derecho de la ecuación en cada orden, encontramos las funciones β de las constantes de acoplamiento.

6.4. Funciones β

Después de agrupar y filtrar nuestros resultados, obtenemos las funciones β . Por el tamaño de dichas funciones, las presentaremos en una forma general. Su forma completa será mostrada en el apéndice A.

Las funciones β tendrán dos partes; una relacionada a un término clásico dado por el análisis dimensional de las ecuaciones (64-70) que depende de las dimensiones anómalas y el acoplamiento relacionado a dicha función; en cambio, el otro término corresponderá a correcciones radiativas que dependen de las constantes de acoplamiento y los términos de "masa".

$$\dot{\mu}_1 = (-2 + \xi_1 + \eta_1)\mu_1 + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f_{1,ij} \quad (97)$$

$$\dot{\mu}_2 = (-2 + \xi_1 + \eta_2)\mu_2 + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f_{1,ij} \quad (98)$$

$$\dot{m} = (-2 + \xi_1 + \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2))m + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f_{m,ij} \quad (99)$$

$$\dot{\lambda}_1 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \frac{3}{2}\eta_1)\lambda_1 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{1,ijk} \quad (100)$$

$$\dot{\lambda}_2 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \frac{3}{2}\eta_2)\lambda_2 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{2,ijk} \quad (101)$$

$$\dot{\lambda}_3 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2)\lambda_3 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{3,ijk} \quad (102)$$

$$\dot{\lambda}_4 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1)\lambda_4 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{4,ijk} \quad (103)$$

$$\dot{\lambda}_5 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1)\lambda_5 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{5,ijk} \quad (104)$$

$$\dot{\lambda}_6 = (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2)\lambda_6 + \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k f_{6,ijk}. \quad (105)$$

Siendo $f_{k,ij} \equiv f_{k,ij}(\mu_1, \mu_2, r, N_D, A_D(\xi_1, \eta_1), A_D(\xi_2, \eta_2))$ una cierta función, con polos en $(1 + r - \mu_2 - \mu_1)$ y $((1 - \mu_1)(r - \mu_2) - m^2)$. Los términos que contienen f 's (correcciones radiativas) de las funciones β tienen una representación diagramática, que se puede interpretar a primer orden en expansión de *loops*. Esto permitirá entender rápidamente cuales de ellos sobreviven, y cuales no. Presentaremos, de nuevo, el potencial, ya que para saber que términos sobreviven, debe haber una coherencia entre los campos que convergen en un vértice

$$V[\psi, \psi^\dagger, \chi, \chi^\dagger] = i\lambda_1 \psi^\dagger(\psi^\dagger + \psi)\psi + i\lambda_2 \chi^\dagger(\chi^\dagger + \chi)\chi + i\lambda_3 \psi^\dagger(\chi^\dagger + \chi)\psi + i\lambda_4 \chi^\dagger(\psi^\dagger + \psi)\chi + i\lambda_5((\chi^\dagger)^2\psi + \chi^2\psi^\dagger) + i\lambda_6((\psi^\dagger)^2\chi + \psi^2\chi^\dagger). \quad (106)$$

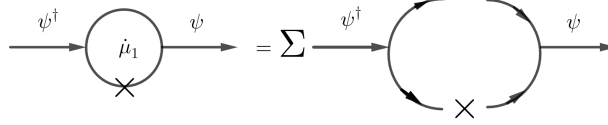


Figura 13: En el lado izquierdo se muestra una representación diagramática de $\dot{\mu}_1 \psi \psi^\dagger$. En el lado derecho se muestra como separamos el diagrama para considerar combinaciones en todos los posibles vértices triples que cumplen con tener los campos mostrados.

Como ejemplo, se utilizará la función β de μ_1 , el cual tiene un factor de $\mu_1 \psi \psi^\dagger$, los campos representan líneas externas, y sumamos sobre todos los *loops* posibles que contengan dos vértices $\lambda_i \lambda_j$. Es claro que los vértices tienen que contener al menos un campo ψ , lo cual descarta $\lambda_2 \chi^\dagger (\chi^\dagger + \chi) \chi$ como posible vértice.

Otra condición que deben cumplir está relacionada a si van entrando al vértice o saliendo. Los campos que entran al vértice se representan como su complejo conjugado y los que salen como el campo sin daga. Se comienza con un campo $\psi^\dagger$ el cual debe decaer en dos campos que salen del vértice, por lo tanto pueden ser ψ o χ , los únicos términos del potencial que puede cumplir esto son λ_1 , para facilitar la representación en las figuras, los propagadores internos ψ y $\psi^\dagger$ estarán de color negro y los χ y $\chi^\dagger$ en rojo. Todas las posibles configuraciones donde entre un campo ψ y salgan dos campos sin daga solo pueden estar dados por los términos del potencial asociados a λ_1 , λ_3 y λ_5 mostrados en la figura 13. Entonces, si solo consideramos que los propagadores no cambian su tipo de partículas, cada vértice

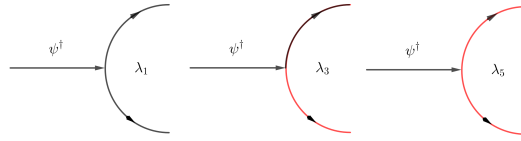


Figura 14: Todas las posibles combinaciones de vértices que pueden aportar a la figura 13.

debe acoplarse a su conjugado, obteniendo términos λ_1^2 , λ_3^2 y λ_5^2 . Aunque no son los únicos términos que aparecen, al final, los campos se mezclan y puede transformarse de ψ a χ , esto daría términos del tipo $\lambda_1 \lambda_3$, $\lambda_1 \lambda_5$ y $\lambda_3 \lambda_5$. Así tenemos 6 contribuciones para la función 100, tal como se ve en el apéndice A. Analizando la función β para m (ver figura 15), el estado inicial es igual al caso anterior, en cambio para el estado final, necesitamos un término que contenga un campo χ y dos campos con daga (entran al vértice), los únicos términos que cumplen con esto son los λ_2 , λ_4 y λ_6 , como se ve en la figura 16. Los términos que cumplen con esto son todas las posibles combinaciones

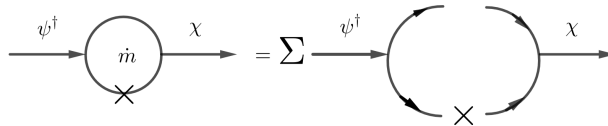


Figura 15: En el lado izquierdo se muestra una representación diagramática de $\dot{m} \psi^\dagger \psi$. En el lado derecho se muestra como separamos el diagrama para considerar combinaciones en todos los posibles vértices triples que cumplen con tener los campos mostrados.

entre el estado inicial $[\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5]$ y el estado final $[\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6]$, obteniendo 9 contribuciones, como se puede observar en el apéndice A.

Finalmente para la función β de λ_1 , vamos a considerar que tenemos un campo $\psi^\dagger$ como estado inicial y dos ψ como estado final, el momentum del estado inicial se separa en dos propagadores que salen del vértice (ver figura 17), consideraremos que el diagrama se separa en dos contribuciones, y consideramos todas las posibles combinaciones siguiendo el procedimiento comentado para los casos anteriores.

Tomando todas las posibles combinaciones y sumando los diagramas simétricos, obtenemos 21 contribuciones diferentes, como se puede ver en el apéndice A. Por simetría se obtiene también que la función 101 tiene la misma

cantidad de términos.

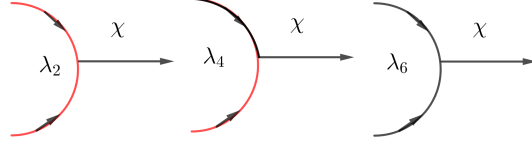


Figura 16: Todas las posibles combinaciones de vértices que pueden aportar a la figura 15 como estado final. Las mostradas en la figura 14 contribuyen como estado inicial.

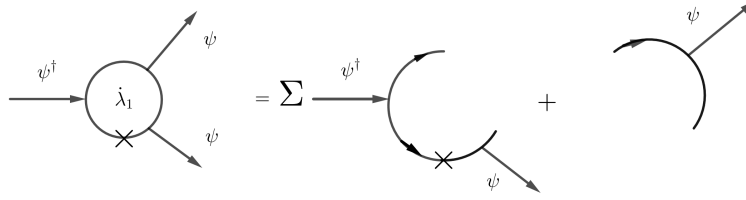


Figura 17: En el lado izquierdo se muestra una representación diagramática de $\dot{\lambda}_1 \psi^\dagger \psi \psi$. En el lado derecho se muestra como separamos el diagrama para considerar combinaciones en todos los posibles vértices triples que cumplen con tener los campos mostrados.

En esta sección se encontró y analizó la ecuación de Wetterich para obtener las funciones β . Expandimos la expresión dentro de la traza para separar las contribuciones a diferentes ordenes. Encontramos que el lado derecho generaban una familia de integrales, las cuales se resolvieron utilizando el teorema del residuo. Igualamos cada lado de la ecuación, orden por orden en los campos. Las expresiones explícitas de las funciones (97-105) se discuten con mayor detalle en el apéndice A.

Aunque, como se ve en las ecuaciones (97-105), aún no podemos empezar a resolverlas sin tener los valores de las dimensiones anómalas. En la siguiente sección utilizaremos métodos funcionales para realizar el calculo de ellas.

7. Dimensión Anómala

En esta sección volvemos a la notación donde los parámetros y campos sin ningún distintivo son dimensionales. Escogemos la siguiente forma de presentar la acción efectiva

$$\Gamma[\bar{\psi}^\dagger, \bar{\psi}, \bar{\chi}^\dagger, \bar{\chi}] = \int d^D q d\omega [\bar{\psi}^\dagger Z_1(i\omega + \alpha'_1 q^2) \bar{\psi} + \bar{\chi}^\dagger Z_2(i\omega + \alpha'_2 q^2) \bar{\chi} + m(\bar{\psi} \bar{\chi}^\dagger + \bar{\psi}^\dagger \bar{\chi}) - \mu_1 \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} - \mu_2 \bar{\chi}^\dagger \bar{\chi} + V_k[\bar{\psi}^\dagger, \bar{\psi}, \bar{\chi}^\dagger, \bar{\chi}]], \quad (107)$$

donde se le realiza una transformada de Fourier a 62. Por simplicidad, en esta sección usaremos la notación $\bar{\psi}, \bar{\chi} \rightarrow \psi, \chi$. Calculamos las derivadas funcionales para esta acción

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \psi \delta \psi^\dagger} = Z_1(i\omega + \alpha'_1 q^2) - \mu_1 + \frac{\delta^2 V}{\delta \psi \delta \psi^\dagger} \equiv \Gamma_1^{(1,1)} \quad (108)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \chi \delta \chi^\dagger} = Z_2(i\omega + \alpha'_2 q^2) - \mu_2 + \frac{\delta^2 V}{\delta \chi \delta \chi^\dagger} \equiv \Gamma_2^{(1,1)}.$$

Para calcular las dimensiones anómalas, necesitamos las derivadas de Z_i y α'_i , con $i \equiv 1, 2$

$$\lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \Gamma_i^{(1,1)}}{\partial q^2} = Z_i \alpha'_i \Rightarrow \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial q^2} = \partial_t(Z_i \alpha'_i) \Rightarrow -\frac{1}{Z_i \alpha'_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial q^2} = \eta_i + \xi_i \quad (109)$$

$$\lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \Gamma_i^{(1,1)}}{\partial \omega} = i Z_i \Rightarrow \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial \omega} = i \partial_t(Z_i) \Rightarrow \frac{i}{Z_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial \omega} = \eta_i, \quad (110)$$

por lo tanto necesitaremos conocer $\dot{\Gamma}_i^{(1,1)}$ para calcular las dimensiones anómalas.

Para esto utilizamos la ecuación de Wetterich, a la cual le calculamos sus derivadas funcionales (mostraremos explícitamente los cálculos para los campos ψ 's, el caso para los χ 's es el mismo y con igual resultado equivalente a intercambiar los campos)

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_i^{(1,1)} &= \frac{\delta^2}{\delta X_i \delta X_i^\dagger} \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} Tr[\dot{R}_k \frac{\delta^2 (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}}{\delta X_i \delta X_i^\dagger}] \\ &= \frac{1}{2} Tr[\dot{R}_k \frac{\delta^2}{\delta X_i \delta X_i^\dagger} (G_{k,0} + G_{k,0} V_k G_{k,0} + G_{k,0} V_k G_{k,0} V_k G_{k,0} + \dots)], \end{aligned} \quad (111)$$

$$\Rightarrow \dot{\Gamma}_i^{(1,1)} = \frac{1}{2} Tr[\dot{R}_k \frac{\delta}{\delta X_i} \left(G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0} + G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0} V_k G_{k,0} + G_{k,0} V_k G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0} + \dots \right)], \quad (112)$$

donde $X \equiv (\psi, \chi)$. El potencial solo tiene términos cúbicos en los campos, por lo que solo las primeras derivadas en el potencial contribuyen. Además, a tercer orden de interacción hay términos que sobreviven, pero que están asociados a ordenes lineales en los campos, i.e. el término con el potencial en (108) el cual no contribuye a la dimensión anómala, ya que se eliminará al final después de derivar por q y ω . Por lo tanto, el resultado final que tendremos que calcular es

$$\dot{\Gamma}_i^{(1,1)} = \frac{1}{2} Tr \left[\dot{R}_k \left(G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X} G_{k,0} + G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i} G_{k,0} \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0} + O(V_k^3) \right) \right]. \quad (113)$$

Hasta el momento no hemos mostrado la dependencia explicita del propagador, ya que estamos interesados en sus derivadas sobre q y ω . Para hacerlo, hay que recordar que las derivadas funcionales de la acción efectiva es la función de correlación de 1PI el cual su resultado se asocia a sumas de diagramas de Feynmann. En nuestro caso, en vez de la acción efectiva tenemos su derivada con respecto a la escala, aunque la visualización en diagramas de Feynmann seguirá siendo útil. La Figura 18 nos muestra como cada linea interna (propagador) dependen de los ω 's y q 's; notar que las variables sin apostrofe corresponden a estados *on-shell* y con apostrofe son variables *of-shell*.

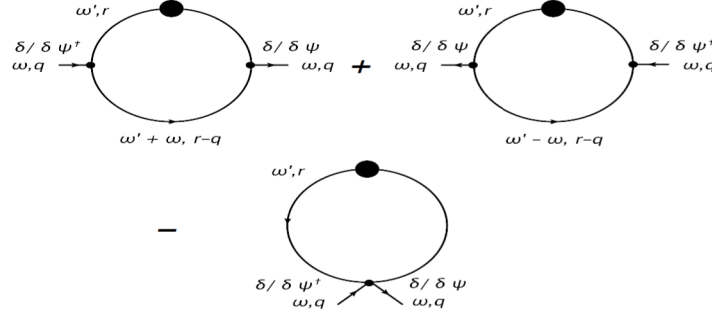


Figura 18: Se muestra una representación diagramática de la ecuación (113), en donde el dibujo de abajo representa un término $\dot{R}_k G_{k,0} \frac{\delta^2 V_k}{\delta X_i \delta X_i^\dagger} G_{k,0}$ el cual se elimina ya que al tener un potencial a 3 orden, la segunda derivada funcional la anula (acordarse que la definición de la matriz V ya implica dos derivadas funcionales).

Con el análisis anterior, solo nos queda hacer notar que las derivadas que realizaremos es en función de variables *on-shell*, en cambio la traza es una suma sobre índices internos (i.e. la integral se realiza sobre variables *off-shell*). Finalmente, las dimensiones anómalas son

$$\eta_i = \frac{i}{Z_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial \omega} \quad (114)$$

$$= \frac{i}{Z_i} \frac{1}{2} Tr \left[\dot{R}_k \left(G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} \frac{\partial}{\partial \omega} (G_{k,0}(\omega' + \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X_i} G_{k,0}(\omega', q') + \right. \right. \\ \left. \left. G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i} \frac{\partial}{\partial \omega} (G_{k,0}(\omega' - \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') \right) \right] \quad (115)$$

$$\eta_i + \xi_i = - \frac{1}{Z_i \alpha'_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial q^2} \quad (116)$$

$$= - \frac{1}{Z_i \alpha'_i} \frac{1}{2} Tr \left[\dot{R}_k \left(G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} \frac{\partial}{\partial q^2} (G_{k,0}(\omega' + \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X_i} G_{k,0}(\omega', q') + \right. \right. \\ \left. \left. G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i} \frac{\partial}{\partial q^2} (G_{k,0}(\omega' - \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') \right) \right], \quad (117)$$

por lo que necesitamos conocer las derivadas del propagador para poder obtener las dimensiones anómalas explícitamente.

En $G_{k,0}$ la dependencia en ω y q - como se ve en (75) - están dentro de $\Gamma_{k,0}^{(2)}$, por lo que en los próximos cálculos, las derivadas las realizaremos explícitamente en $\Gamma_{k,0}^{(2)}$ sobre ω y q . Usaremos la siguiente forma de la matriz

$$\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k = k^{D+2} \alpha'_1 \begin{pmatrix} 0 & -z - \tilde{\mu}_1 + h(q^2) & 0 & \tilde{m} \\ z - \tilde{\mu}_1 + h(q^2) & 0 & \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} & 0 & -z - \tilde{\mu}_2 + r h(q^2) \\ \tilde{m} & 0 & z - \tilde{\mu}_2 + r h(q^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad (118)$$

donde $h(q^2) \equiv \frac{1}{k^2} (q^2 + (k^2 - q^2) \theta(k^2 - q^2)) = \frac{1}{k^2} (k^2 \theta(k^2 - q^2) + q^2 \theta(q^2 - k^2))$.

7.1. Derivada en q

Usando las técnicas discutidas en la referencia [1], realizamos las derivadas en torno a q del propagador, por ende obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial q} G_{k,0} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right) = -\frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \partial_q (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2} G_{k,0} = & 2 \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \partial_q (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \partial_q (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} - \\ & \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \partial_q^2 (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k}, \end{aligned} \quad (120)$$

donde las derivadas del inverso del propagador son

$$\partial_q (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) = k^{D+2} \alpha'_1 \begin{pmatrix} 0 & \partial_q h(q^2) & 0 & 0 \\ \partial_q h(q^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \partial_q h(q^2) \\ 0 & 0 & r \partial_q h(q^2) & 0 \end{pmatrix} = k^{D+2} \alpha'_1 h' O^+ \quad (121)$$

$$\partial_q^2 (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) = k^{D+2} \alpha'_1 \begin{pmatrix} 0 & \partial_q^2 h(q^2) & 0 & 0 \\ \partial_q^2 h(q^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \partial_q^2 h(q^2) \\ 0 & 0 & r \partial_q^2 h(q^2) & 0 \end{pmatrix} = k^{D+2} \alpha'_1 h'' O^+, \quad (122)$$

donde

$$O^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Reordenando, las derivadas quedan

$$\lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} G_{k,0}(\omega + \omega', q + q') = -k^{D+2} \alpha'_1 h'(q') G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} G_{k,0}(\omega + \omega', q + q') = & 2k^{2D+4} \alpha_1'^2 h'^2(q') G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') - \\ & k^{D+2} \alpha'_1 h''(q') G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') \end{aligned} \quad (125)$$

Al igual que en [1], obtenemos que $h' = 0$ ya que se usa el mismo regulador. Esto deja una expresión mas sencilla para la derivada en q del propagador, dejándola finalmente como

$$\begin{aligned} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q^2} G_{k,0}(\omega + \omega', q + q') = & \frac{1}{2} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} G_{k,0}(\omega + \omega', q + q') \\ = & -\frac{k^{D+2} \alpha'_1}{2} h''(q') G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') \end{aligned} \quad (126)$$

7.2. Derivada en z

Realizamos un cambio de variable ($z = \frac{i\omega}{\alpha'_1 k^2}$) utilizando la regla de la cadena

$$\partial_\omega G_{k,0} = (\partial_z G_{k,0})(\partial_\omega z) = \frac{i}{\alpha'_1 k^2} \partial_z G_{k,0}. \quad (127)$$

Calculamos la derivada en z por separado

$$\partial_z G_{k,0} = -\frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \partial_z (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) \frac{1}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k}, \quad (128)$$

donde

$$\partial_z (\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) = k^{D+2} \alpha'_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = k^{D+2} \alpha'_1 O^-, \quad (129)$$

por lo tanto,

$$\lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \omega} G_{k,0}(\omega + \omega', q + q') = \frac{i}{\alpha'_1 k^2} \lim_{z, q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} G_{k,0}(z + z', q + q') = -ik^D G_{k,0}(z', q') O^- G_{k,0}(z', q') \quad (130)$$

7.3. Integración en q y z

Finalmente la dimensión anómala es

$$\eta_i = \frac{i}{Z_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial \omega} = \frac{i}{Z_i} Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} \frac{\partial}{\partial \omega} (G_{k,0}(\omega' + \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X} G_{k,0}(\omega', q') \right] \quad (131)$$

$$\eta_i + \xi_i = -\frac{1}{Z_i \alpha'_i} \lim_{\omega, q \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\Gamma}_i^{(1,1)}}{\partial q^2} = -\frac{1}{Z_i \alpha'_i} Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta X_i^\dagger} \frac{\partial}{\partial q^2} (G_{k,0}(\omega' + \omega, q' - q)) \frac{\delta V_k}{\delta X_i} G_{k,0}(\omega', q') \right], \quad (132)$$

reemplazando por los valores que obtuvimos en las sub-secciones anteriores y mostrando las integrales explícitamente de la supertraza

$$\eta_i = \frac{-ik^{D+2} \alpha'_1}{Z_i} \int \int \frac{dq'^D}{(2\pi)^D} \frac{dz}{2\pi} Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') O^- G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi} G_{k,0}(\omega', q') \right] \quad (133)$$

$$\eta_i + \xi_i = \frac{-ik^{D+4} \alpha_1'^2}{2Z_i \alpha'_i} \int \int \frac{dq'^D}{(2\pi)^D} \frac{dz}{2\pi} h''(q') Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi} G_{k,0}(\omega', q') \right]. \quad (134)$$

La integral en q' se calcula igual que en la sección 6.1, ya que la segunda derivada de $h(q^2)$ debe ser constante, así que el cambio resulta en intercambiar la matriz $\dot{R}_k$ por la dada en la ecuación (89). La integración en z se realiza con las mismas técnicas vistas en la sección 6.2, aunque cambien algunas matrices en la traza, la estructura seguirá siendo la dada por la ecuación (92).

Como último comentario en esta sección, hacemos notar que la traza nos arroja una constante igual a $(k^{D+2} \alpha'_1)^{-1}$, por lo que mostraremos la dimensión anómala, considerando que $\dot{R}_k$ está representada por 89, y que además sacamos todas las constantes globales de las matrices fuera de la integral. La dimensión anómala es

$$\eta_i = \frac{-i}{Z_i} \int \frac{dz}{2\pi} Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') O^- G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi} G_{k,0}(\omega', q') \right] \quad (135)$$

$$\eta_i + \xi_i = \frac{-ik^2 \alpha'_1 h''}{2Z_i \alpha'_i} \int \frac{dz}{2\pi} Tr \left[\dot{R}_k G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi^\dagger} G_{k,0}(\omega', q') O^+ G_{k,0}(\omega', q') \frac{\delta V_k}{\delta \psi} G_{k,0}(\omega', q') \right]. \quad (136)$$

Utilizando métodos funcionales obtuvimos la ecuación 113 la cual resulta ser del mismo estilo a la ecuación de Wetterich, por lo tanto para su resolución se utilizaron los mismos métodos desarrollados en la sección 5. Aunque, nos encontramos con derivadas del propagador que se resolvieron y simplificaron para poder realizar las integrales complejas. La forma completa de las dimensiones anómalas se mostrará en el apéndice B. En esta sección, calculamos los últimos elementos necesarios para tener por completo el conjunto de 10 ecuaciones diferenciales con 10 variables. Por lo que en la próxima sección, se utilizarán métodos numéricos para encontrar los puntos fijos de las funciones β y en torno a ellos estudiar la evolución del flujo del grupo de renormalización.

8. Resultados Numéricos

Para encontrar puntos fijos (PF's), uno de los métodos mas usados es el de Newton o su versión modificada Newton-Raphson. Estos métodos necesitan estar cercanos al punto fijo (PF) para poder encontrarlo con una gran precisión; al estar trabajando en un espacio 10-dimensional esto se vuelve complejo y con un tiempo computacional grande para encontrar un PF que no sea el Gaussiano (i.e. el origen). Hemos encontrado en la literatura [51] otro método que mejora considerablemente la convergencia, por lo que podremos estar lejos de los PF's, aunque la precisión no es menor a los métodos tradicionales (orden de $\beta_i < (10^{-1} - 10^{-3})$), por lo que luego de utilizar ese método y acercarnos al PF, se utiliza Newton-Raphson para mejorarla ($\beta_i < 10^{-16}$).

Para cualquier método a utilizar, necesitamos condiciones iniciales desde donde nuestro algoritmo empiece a iterar. En este trabajo hemos generado valores aleatorios (específicamente con la función *random* de *Python*) para todos los acoplamientos, a este vector generado se divide en su modulo y obtenemos un punto en la superficie de una esfera unitaria 10-dimensional. Luego, generamos nuevos puntos permutando los signos de cada acoplamiento, lo que nos genera 2^{10} listas solo con un punto aleatorio; al imponer ligaduras (e.g. al querer 'masas' positivas) podemos reducir estas listas y concentrarnos en una región del espacio mas acotada.

En la sección 3 se mostraron valores que el intercepto puede tomar, lo cual para el caso del *Soft-Pomeron* es mas cercano a 0,1 y el *Hard-Pomeron* al 0,35. Con esto en mente y revisando valores de publicaciones anteriores [1,2], a las 'masas' las definimos en una esfera con diferentes valores del radio, entre 0,1 y 0,3, y los demás acoplamientos con radio 1. Independiente de las condiciones iniciales, el método numérico que presentaremos a continuación esta especializado a encontrar un PF, aún si la condición inicial no está cercana a ellos. Como en algún momento del proceso que se mostrará se utiliza el método de Newton-Raphson, se necesita tener una matriz invertible (i.e. se necesita tener la misma cantidad de ecuaciones diferenciales que variables) y en las secciones anteriores se calcularon 9 ecuaciones diferenciales con 10 variables, para arreglar esto se debe agregar la ecuación diferencial que gobierne r , dicha ecuación diferencial dependerá de la dimensión anómala ξ , i.e. $\dot{r} = r(\xi_1 - \xi_2)$.

8.1. Algoritmos

El algoritmo con el que empezaremos, es desarrollado por Li y Zeng [51], como ya se comentó, este algoritmo tiene una convergencia adecuada para nuestro problema, considerando que estamos trabajando en un espacio 10-dimensional. Empezamos con uno de los puntos aleatorios generados anteriormente

$$X_i^{(0)},$$

donde $i = 1, \dots, 10$ y representa cada acoplamiento. Luego, reemplazamos ese valor en la funciones β y calculamos el error asociado (sabiendo que queremos que dichas funciones sean 0)

$$e_i = -\beta_i(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_{10}^{(0)}), \quad (137)$$

conociendo el error de cada función definimos la función objetivo

$$J = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_{10}^2), \quad (138)$$

esta función objetivo es la que nos dirá en cada iteración si nos estamos acercando o alejando de nuestro objetivo (i.e. $J = 0$), por lo tanto debemos elegir una tolerancia para esta función objetivo (Tol) que nos permita parar la iteración (el cual representa el error acumulado al cuadrado), dicha función se empieza con $Tol = 10^{-1}$ y termina con $Tol = 10^{-6}$.

Antes de mostrar la forma en la cual generaremos los nuevos puntos, este algoritmo nos pide definir una función de optimización

$$\nu_i = (1,0 - 1,6) / \left(\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial X_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial X_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \beta_{10}}{\partial X_i} \right)^2 \right), \quad (139)$$

donde el numero $1,0 - 1,6$ se debe escoger para cada caso en particular, si su valor es muy grande J empezará a oscilar y nunca llegará a su objetivo Tol , en cambio si es muy pequeño, su cambio será muy pequeño y se demorará mucho en llegar al objetivo.

Ya con todas las funciones definidas, la forma en que el algoritmo funciona para entregarnos nuevos puntos es

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \nu_i e_i \cdot \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial X_i} + \frac{\partial \beta_2}{\partial X_i} + \dots + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial X_i} \right), \quad (140)$$

con estos nuevos puntos, volvemos a evaluar la función error e_i y por ende la función objetivo J , si $J > Tol$ volvemos a iterar hasta que cumpla con nuestro objetivo o si supera una cantidad máxima de iteraciones paramos el método y desechamos dicho punto para continuar con el otro. En cambio, si $J < Tol$ se termina la iteración y procedemos a utilizar los puntos encontrados con el método de Newton-Raphson hasta alcanzar $J < 10^{-14}$.

8.2. Puntos Fijos

En esta sub-sección se empieza verificando que se encuentran las soluciones encontradas por Bartels, Contreras y Vacca en [1] y [2]. El PF mostrado en [1] es calculado en el caso donde todas las dimensiones anómalas son nulas (i.e. $\eta_i = \xi_i = 0$), lo que en nuestro caso no podemos hacer, ya que, se necesita de una ecuación diferencial asociada a la variable r para poder ocupar los métodos de convergencia mencionadas anteriormente (e.g. el método de Newton-Raphson necesita de una matriz invertible), el parámetro r es introducido en [2] por la misma razón. Aunque, si se pueden encontrar puntos fijos con este método para el caso $\eta_i = 0$, ya que no hay dependencia explícita de ella en $\hat{r}$. Por lo que, se mostrarán los resultados de los PF's para las funciones β en el caso donde todas las dimensiones anómalas son no nulas y también se buscarán los PF's para las funciones β con $\eta_i = 0$, verificando que los puntos sean soluciones de dichas funciones β .

En [1] se estudia un *pomeron* con auto-interacción, la notación de las constantes de acoplamiento se relacionan con este trabajo según la transformación mostrada en el cuadro 1 donde si se ocupa el índice izquierdo (derecho) en el intercepto, se debe ocupar el índice izquierdo (derecho) en λ .

$\mu \rightarrow \mu_{1,2}$	$\lambda \rightarrow \lambda_{1,2}$
0.1111	1.0504

Cuadro 1: Parámetros encontrados en [1].

En el Cuadro 2 se tienen los PF's que reproducen este sistema directamente, en el Cuadro 3 están los PF's en el cual tenemos dos copias de este sistema sin interacción entre ambos *pomerons*.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1333	0.	0.	1.1676	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.1053	0.	0.	1.0001	0.	0.	0.	0.	0.	0.

Cuadro 2: Puntos fijos asociados a un *pomeron* auto-interactuando, el primero es el caso cuando se incluyen todas las dimensiones anómalas y el segundo cuando $\eta_i = 0$.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1333	0.1333	0.	1.1676	1.1676	0.	0.	0.	0.	1.
0.1053	0.1053	0.	1.0001	1.0001	0.	0.	0.	0.	1.

Cuadro 3: Puntos fijos asociados a dos *Pomerons* sin interacción entre ellos, el primero es el caso cuando se incluyen todas las dimensiones anómalas y el segundo cuando $\eta_i = 0$.

Como otra solución, se encuentra la interacción entre dos *pomerons*, tal como en [2], los parámetros en nuestra notación se muestran en el cuadro 4 Comenzando con las ecuaciones que se obtuvieron en la sección (6.4), se obtienen los siguientes puntos que reproducen estos resultados

$\mu_1 \rightarrow \mu_1$	$\mu_2 \rightarrow \mu_2$	$\lambda \rightarrow \lambda_1$	$\lambda_2 \rightarrow \lambda_4$	$\lambda_3 \rightarrow \lambda_5$	$r \rightarrow r$
0.1111	0.1108	1.0503	1.4467	0.	0.9218

Cuadro 4: Valores de los parámetros encontrados en [2]

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1333	0.1316	0.	1.1676	0.	0.	1.5943	0.	0.	0.8993
0.1053	0.1050	0.	1.00006	0.	0.	1.3778	0.	0.	0.9216

Cuadro 5: Puntos fijos asociados a dos *pomerons* interactuando, tal como en [2], el primero es el caso cuando se incluyen todas las dimensiones anómalas y el segundo cuando $\eta_i = 0$.

Flujos

Ya al haber comparado puntos encontrados por el algoritmo con otras investigaciones, se presentan los PF's asociados al problema de este trabajo. Aunque, antes queda definir los filtros que se usaron para seleccionar cuales puntos serán de nuestro interés para esta tesis y cuales no (e.g que sea mayormente atractivos en el IR). En primer lugar se elimina cualquier valor de los interceptos μ_1 y μ_2 negativos y mas pequeños que 10^{-2} , ya que buscamos valores que estén en acuerdo con los presentados en las sección 3. Para $r \equiv \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}$, no estamos interesados en valores de la pendiente α'_x negativas (acorde a la sección 3), por lo que se filtran valores de r negativos, además de valores mas grandes que 10 para controlar la proporción de las pendientes.

Por otro lado, nos interesa saber que tipo de direcciones tienen los flujos alrededor de los PF's, ya que esto nos entregará información si son atractores o repulsores en cierta región de energías. El comportamiento cerca de los PF's se describe (a primer orden) a través de la matriz de estabilidad, la cual se define por la expansión de las funciones β en torno a un PF. El primer orden de esta expansión es

$$\Delta\beta_i = \left. \frac{\partial\beta_i}{\partial\Lambda_j} \right|_{\Lambda=\beta*} \Delta\Lambda_j + \dots \quad (141)$$

donde Λ_j - con $i, j = 10$ - son todos los parámetros de que dependen las funciones β . La matriz asociada a las derivadas de los parámetros se denomina matriz de estabilidad

$$M_{ij} \equiv \left. \frac{\partial\beta_i}{\partial\Lambda_j} \right|_{\Lambda=\beta*} \quad (142)$$

Los auto-vectores de dicha matriz nos indican direcciones que definen el flujo en el espacio de la teoría, en torno al PF, el signo de los auto-valores definen si esa dirección es un atractor o repulsor. En el caso IR (UV), si el auto-valor asociado a la dirección descrita por un auto-vector es positivo (negativo) estaremos hablando de que esa dirección es atractora, en caso contrario será repulsora. En particular, estamos interesados en PF's que sean mayormente atractores en el IR, por lo que se filtran los puntos, quedándose con los que tengan igual o mas cantidad de atractores que de repulsores. También se encuentran PF's con auto-valores complejos, los cuales para este trabajo también se omitirán, al representar un comportamiento cíclico en torno al PF.

Ya con los filtros explicados, a continuación se muestran los puntos encontrados que son mayormente atractores en el IR, sin considerar los ya mostrados que siguen los límites de otras publicaciones. En el apéndice C se muestran otros puntos encontrados que son mayormente atractores en el UV.

Atractor en IR

Como se puede ver en los cuadros 6 y 8, hay una colección de PF's en los cuales solo se diferencian por cambio de signos en algunos de los parámetros. Las transformaciones de este estilo que no cambian los valores de las funciones β se explican empezando con el primer PF del cuadro 6 y/o 8.

La primera transformación corresponde a intercambiar todos los valores de las constantes de acoplamiento $\lambda_j \rightarrow -\lambda_j$, el PF asociado a esta transformación está situado en la segunda fila de los cuadros antes mencionados. Las siguientes dos transformaciones se consiguen intercambiando $m \rightarrow -m$, luego, para un caso realizamos la transformación $\lambda_{1,4,5} \rightarrow -\lambda_{1,4,5}$ el cual en los cuadros se ubican en la tercera fila; el segundo y último caso se realiza la transformación $\lambda_{2,3,6} \rightarrow -\lambda_{2,3,6}$ el cual se posiciona en la cuarta fila.

En la siguiente sub-sección, nos enfocaremos en los primeros puntos de cada cuadro; el análisis y comportamiento para los demás puntos es el mismo por la simetría existente.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1384	0.1384	-0.0056	1.0118	1.0118	0.8150	0.8150	-0.1967	-0.1967	1.
0.1384	0.1384	-0.0056	-1.0118	-1.0118	-0.8150	-0.8150	0.1967	0.1967	1.
0.1384	0.1384	0.0056	-1.0118	1.0118	0.8150	-0.8150	0.1967	-0.1967	1.
0.1384	0.1384	0.0056	1.0118	-1.0118	-0.8150	0.8150	-0.1967	0.1967	1.

Cuadro 6: Puntos fijos con todas las dimensiones anómalas no nulas.

Los autovalores asociados a los PF's mostrados en los cuadros 6 y 8 son mostrados en los cuadros 7 y 9.

2.50	-2.23	-2.09	-2.03	1.94	1.41	0.36	-0.11	0.10	0.03
------	-------	-------	-------	------	------	------	-------	------	------

Cuadro 7: Auto-valores asociados a los puntos fijos del cuadro 6.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1084	0.1084	-0.0042	0.8631	0.8631	0.6967	0.6967	-0.1664	-0.1664	1.
0.1084	0.1084	-0.0042	-0.8631	-0.8631	-0.6967	-0.6967	0.1664	0.1664	1.
0.1084	0.1084	0.0042	-0.8631	0.8631	0.6967	-0.6967	0.1664	-0.1664	1.
0.1084	0.1084	0.0042	0.8631	-0.8631	-0.6967	0.6967	-0.1664	0.1664	1.

Cuadro 8: Puntos fijos con $\eta_i = 0$.

4.25	3.37	1.95	-1.89	-1.74	-1.69	0.89	0.62	0.53	-0.03
------	------	------	-------	-------	-------	------	------	------	-------

Cuadro 9: Auto-valores asociados a los puntos fijos del cuadro 8.

Comparando los valores de los casos con $\eta_i \neq 0$ y $\eta_i = 0$ de los cuadro 2, 3, 5, 6 y 8; se puede ver que la estructura de los puntos fijos no cambia en cada caso, los parámetros para el caso $\eta_i = 0$ reducen sus valores, pero lo hacen proporcionalmente (manteniendo el valor de r), esto demuestra una robustez de los puntos fijos, esto también puede verse en la cantidad de auto-valores atractores IR que se muestran en los cuadro 7 y 9. Las dimensiones anómalas evaluadas en estos puntos fijos son para el caso $\eta_i \neq 0$, $\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2 = -0,173528$ y $\eta_1 = \eta_2 = -0,3503$. Para cuando $\eta_i = 0$, tenemos que $\xi_1 = \xi_2 = -0,113994$.

8.3. Evolución en torno a los puntos fijos

El estudio de los flujos en el espacio de la teoría, nos permite ver como evoluciona el sistema mientras cambia t . En el contexto del actual trabajo, poder identificar dos estados de la familia de *pomerons* y ver el flujo que los conecta es parte fundamental de los objetivos de esta tesis. Sin embargo, al trabajar en 10 dimensiones en este espacio, esto se vuelve bastante complejo de hacer, a lo mas, se pueden ver proyecciones en 3 dimensiones y las combinaciones de diferentes proyecciones es bastante alto.

La cantidad de dimensiones también resulta bastante complejo del punto de vista numérico. Una pequeña desviación con respecto al PF, genera inestabilidades. Además, los PF's encontrados, tienen un error, aunque como

se discutió al principio de esta sección es "muy pequeño". Esto genera que si el error asociado al punto sea mas significativo en una dirección del espacio de la teoría que en otro se puedan ver comportamientos diferentes en el límite de la escala (sea el IR o el UV). Por esto, se requiere de un control de esas desviaciones en torno al PF para poder realizar un análisis.

Para esta tesis se hace el enfoque en un PF para el caso con $\eta_i \neq 0$ y otro para $\eta_i = 0$, los cuales se pueden ver en el cuadro 10. Se escogen los que tengan mas auto-vectores atractivos en el IR, esto ya que estamos interesados en esos puntos que puedan representar un límite en la región no-perturbativa, como puede ser el Soft-Pomeron, el cual como se ha visto en la sección 3 se han encontrado rangos de su intercepto comparando modelos fenomenológicos con los datos de los últimos 60 años.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1384	0.1384	-0.0056	1.0118	1.0118	0.8150	0.8150	-0.1967	-0.1967	1.
0.1084	0.1084	-0.0042	0.8631	0.8631	0.6967	0.6967	-0.1664	-0.1664	1.

Cuadro 10: Puntos escogidos para su análisis, el primero es con todas las dimensiones anómalas incluidas y el segundo con $\eta_i = 0$.

Con los puntos seleccionados, al querer ver la evolución de distintos estados del *pomeron*, nos enfocamos en ver el cambio de los parámetros en el sub-espacio de los interceptos (i.e. el sub-espacio de los parámetros de 'masa' μ_1 , μ_2 y m), este sub-espacio de 3 dimensiones tiene 2^3 regiones. Por esto, para tener una muestra de cada región de este sub-espacio, se generan 8 puntos localizados en los vértices de un cubo, donde en el centro del cubo se ubica el PF y el semi-lado del cubo tiene largo a .

Cada flujo asociado a cada punto tiene distintos comportamientos para los interceptos y m . En la siguiente sub-sección se explicará que comportamiento nos gustaría ver en dichos parámetros, por ahora, se menciona que se escogerá el punto que está relacionado con la siguiente transformación

$$\mu_1 \rightarrow \mu_1 - a, \quad \mu_2 \rightarrow \mu_2 + a, \quad m \rightarrow m - a,$$

donde a es un parámetro ajustable definido anteriormente. Ya seleccionada la región a analizar, nos queda ver el comportamiento de los parámetros al variar cada acoplamiento λ . Por esto se generan 6 trayectorias diferentes, las cuales, en cada una se le suma a a un λ diferente, el color que representa a cada trayectoria está dado por el λ que se ha modificado, estos colores se muestran en el cuadro 11. Para generar la evolución de cada parámetro, generamos

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Cuadro 11: Se muestra con colores, cual λ ha sido modificado sumándole un factor a , estos colores se pueden ver en las trayectorias que mostraremos en las figuras restantes de la sección.

un nuevo punto discretizando las funciones β . Es decir, $\lambda_{j,new} = \lambda_{j,old} + \Delta t \cdot \beta_j$. Las condiciones iniciales explicadas anteriormente se generan en $t = 0$, con esa condición inicial se generan su comportamiento en el UV (IR) cuando se va a los t positivos (negativos), con el parámetro Δt ajustable.

Usando este procedimiento, se logra encontrar un grupo de trayectorias de la ecuación del grupo de renormalización, que muestra el comportamiento de los parámetros (i.e. constantes de acoplamiento e interceptos) en la vecindad del punto fijo, mostradas en las figuras 19 y 21. En particular, en las figuras 20 y 22 se puede ver la evolución de los interceptos de este grupo de trayectorias en la vecindad del PF. Como era de esperar, las trayectorias se acercan al PF y posteriormente divergen, ya que el intervalo del 'tiempo' t crece y las direcciones UV empiezan a dominar.

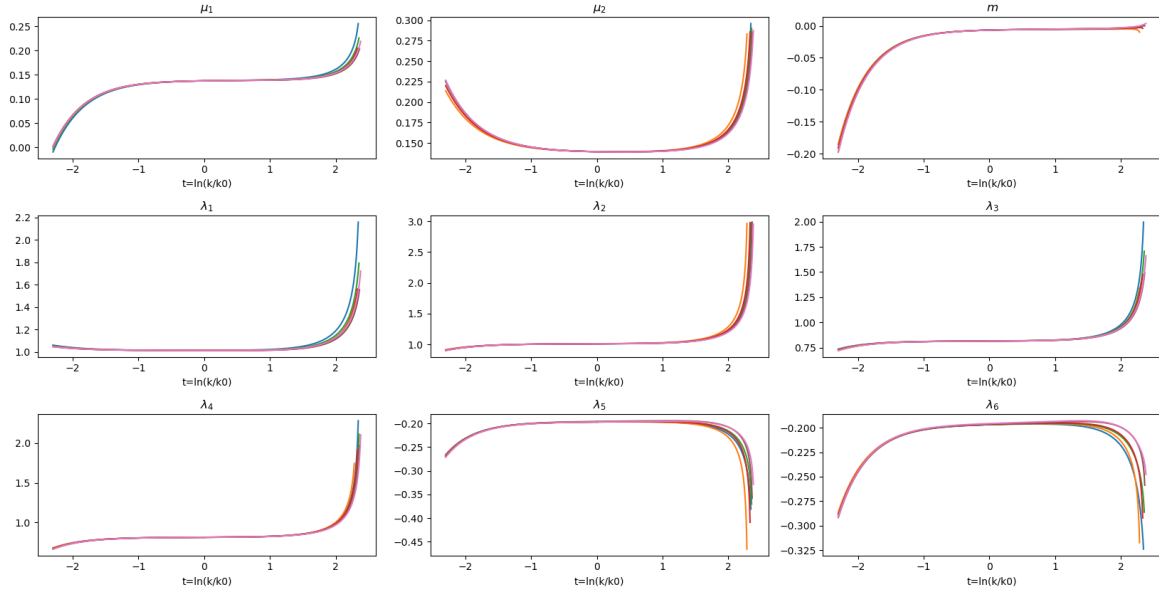


Figura 19: Se puede ver como cerca de $t = 0$ el comportamiento de los acoplamientos se mantiene constante, esto es porque el flujo pasa muy cerca del PF. Con $a = 0,001$ y $\Delta t = 0,001$

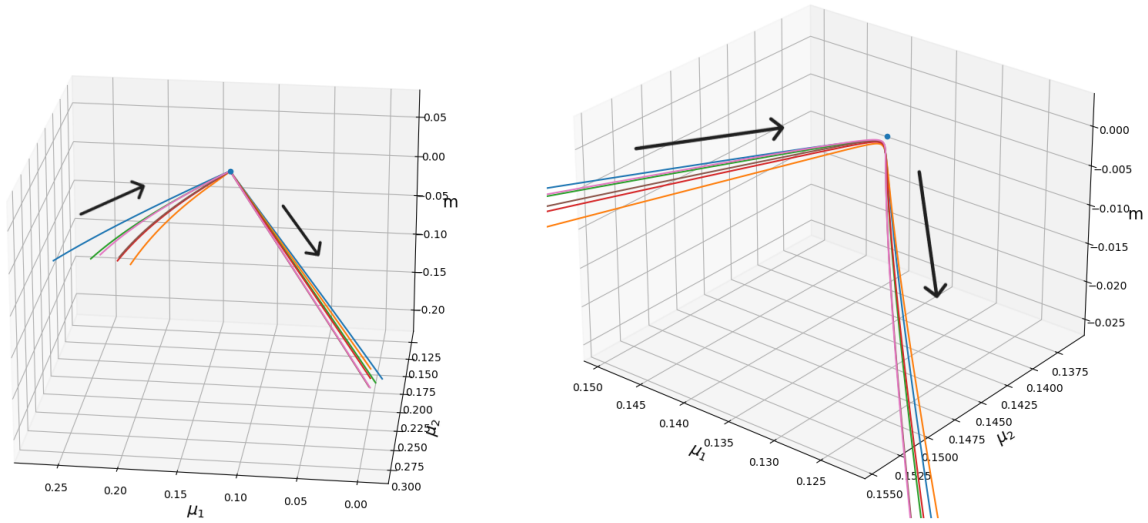


Figura 20: En *izquierda* a) se tiene una proyección en el espacio de los parámetros de 'masa' de la evolución de la figura 19. En *derecha* b) se le hace un acercamiento para ver como es su comportamiento cerca del PF (punto azul). Las flechas indican hacia donde evoluciona el sistema en el límite IR (i.e. t negativos).

Caso $\eta_i = 0$

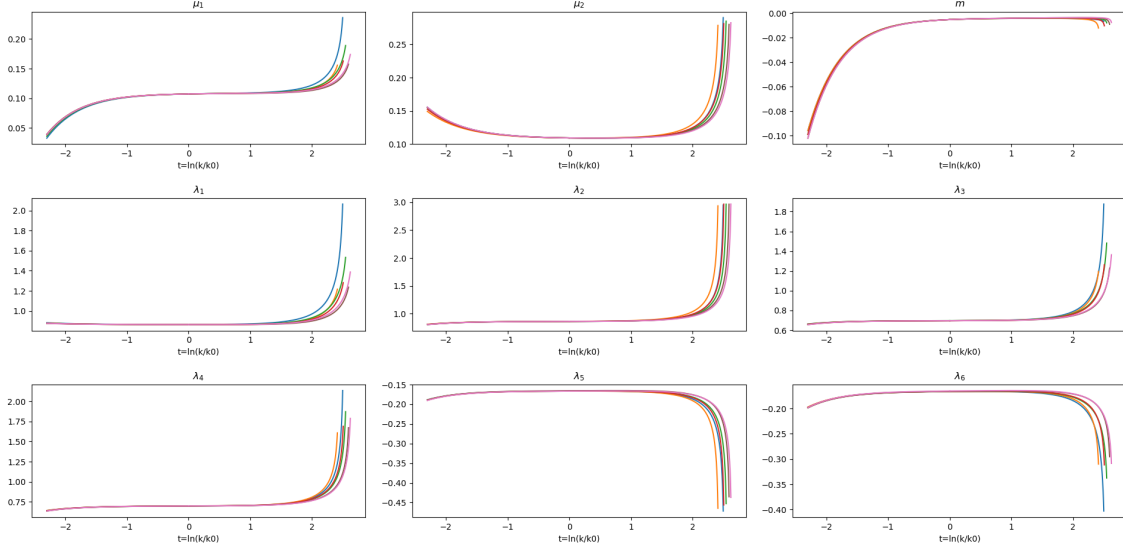


Figura 21: Se puede ver la evolución de los parámetros en el caso $\eta_i = 0$. Con $a = 0,001$ y $\Delta t = 0,001$

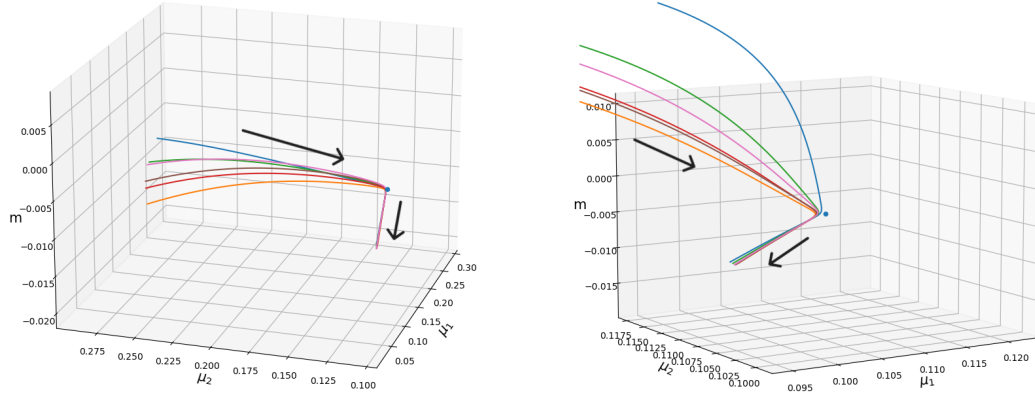


Figura 22: En *izquierda* a) se tiene una proyección en el espacio de los parámetros de 'masa' de la evolución de la figura 21, el cual tiene $\eta_i = 0$. En *derecha* b) se le hace un acercamiento para ver como es su comportamiento cerca del PF (punto azul). Las flechas indican hacia donde evoluciona el sistema en el límite IR (i.e. t negativos).

8.4. Diagonalización de matriz de 'masa'

La mayor motivación para que se estudie el flujo de la ecuación del grupo de renormalización en el contexto de este trabajo, donde, tenemos distintos estados para el *pomeron*; es precisamente poder encontrar un camino que conecte dos de estos estados mientras se cambia la escala. Recordar la discusión en el marco teórico, donde se explica que el *Soft-Pomeron* domina en el IR y el *Hard-Pomeron* en el UV. Ya que en el espacio 10-dimensional es muy complicado poder encontrar estos caminos, una manera de hacerlo es concentrándose en los parámetros de 'masa'. Por lo que en esta sección el enfoque estará en analizar como la matriz de 'masa' termina diagonalizándose, para luego ver la evolución (desde el límite UV) de un estado con $m = 0$ al punto fijo mientras avanza hacia el IR (estados con $m \neq 0$). Para esto nos enfocaremos en la acción sin interacciones y por el momento sin tomar en

cuenta los términos cinéticos

$$\Gamma_{k,m}[\bar{\psi}^\dagger, \bar{\psi}, \bar{\chi}^\dagger, \bar{\chi}] = \int d^D q d\omega [m(\bar{\psi}\bar{\chi}^\dagger + \bar{\psi}^\dagger\bar{\chi}) - \mu_1 \bar{\psi}^\dagger \bar{\psi} - \mu_2 \bar{\chi}^\dagger \bar{\chi}], \quad (143)$$

$$\Gamma_{k,m} = \frac{1}{2} \int d^D q d\omega \Psi_k^T \Gamma_{k,0}^{(2)} \Psi_k, \quad (144)$$

donde

$$\Psi_k^T = (\psi \quad \psi^\dagger \quad \chi \quad \chi^\dagger) \quad (145)$$

$$\Gamma_{k,0}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & m \\ \mu_1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 0 & \mu_2 \\ m & 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Otra representación en la cual podemos mostrar estas matrices es

$$\Gamma_{k,m} = \frac{1}{2} \int d^D q d\omega \Phi_k^\dagger \Gamma_{k,m}^{(2)} \Phi_k, \quad (147)$$

$$\Phi_k^\dagger \equiv (\psi \quad \chi \quad \psi^\dagger \quad \chi^\dagger) \quad (148)$$

$$\Phi_k^T \equiv (\psi^\dagger \quad \chi^\dagger \quad \psi \quad \chi) \quad (149)$$

$$\Gamma_m^{(2)} = \begin{pmatrix} \mu_1 & m & 0 & 0 \\ m & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & m \\ 0 & 0 & m & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (150)$$

donde tenemos una matriz diagonal en bloques. Esta representación nos permite poder diagonalizar esta matriz, diagonalizando los bloques que la componen, los cuales son el mismo.

Diagonalizaremos esta matriz,

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & m \\ m & \mu_2 \end{pmatrix}$$

donde los campos en este caso bi-dimensional los campos los definimos como

$$\Psi_k^T = (\psi \quad \chi). \quad (151)$$

Los auto-valores de la matriz a diagonalizar son

$$\left(\frac{1}{2} \left(\mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} \right) \quad \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} \right) \right)$$

con autovectores

$$\begin{pmatrix} \left(-\mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} \right) & 2m \\ 2m & \left(\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} \right) \end{pmatrix}$$

a los cuales consideramos sus representaciones unitarias, por lo que cada vector lo dividimos por su modulo

$$\sqrt{\left| \mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} \right|^2 + 4|m|^2},$$

esto lo hacemos para diagonalizar la matriz, ya que se tiene la relación

$$O = P^{-1}MP \quad (152)$$

donde M es la matriz a diagonalizar; O es la matriz diagonalizada y P es la matriz que contiene a los auto-vectores. La matriz O resulta ser

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} & 0 \\ 0 & \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2} \end{pmatrix}.$$

Analizando el término de la acción dentro de la integral, se puede también definir los nuevos campos después de la diagonalización

$$\Psi_k^T M \Psi_k = \Psi_k^T P O P^{-1} \Psi_k = \Psi_k'^T O \Psi_k', \quad (153)$$

donde

$$\Psi_k' = \frac{1}{\sqrt{|\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2}|^2 + 4m^2}} \begin{pmatrix} 2m\chi - \left(\sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} + \mu_1 - \mu_2\right)\psi \\ \left(\sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} + \mu_1 - \mu_2\right)\chi + 2m\psi \end{pmatrix} \quad (154)$$

Si realizamos un cambio de variables para ver la contribución de cada campo original en función de las 'masas', podemos ver como evoluciona cada contribución al evolucionar en el espacio de la teoría.

$$\psi' = C_{k,11}\psi + C_{k,12}\chi \quad (155)$$

$$\chi' = C_{k,21}\psi + C_{k,22}\chi, \quad (156)$$

donde

$$C_{k,11} = \frac{-\left(\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}\right)}{\sqrt{|\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}|^2 + 4m^2}} \quad (157)$$

$$C_{k,12} = \frac{2m}{\sqrt{|\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}|^2 + 4m^2}} \quad (158)$$

$$C_{k,21} = \frac{2m}{\sqrt{|\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}|^2 + 4m^2}} \quad (159)$$

$$C_{k,22} = \frac{\left(\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}\right)}{\sqrt{|\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{4m^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}|^2 + 4m^2}}. \quad (160)$$

Con esta forma de generar los auto-vectores, se puede ver que en el límite $m \rightarrow 0$ (y $\mu_1 \neq \mu_2$) los nuevos campos son iguales a los anteriores, es decir, $\psi' = \psi$ y $\chi' = \chi$. Los puntos seleccionados en la sub-sección anterior fueron escogidos para poder observar con mejor detalle este comportamiento. Tener un estado con los campos desacoplados en el UV, y que al avanzar desde ese punto hacia el IR (hacia los t negativos) pase muy cerca del PF (como se vé en las figuras 20 y 22).

Se muestran los gráficos relacionados a estos parámetros adimensionales (con $M_1 \equiv \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2})$ y $M_2 \equiv \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4m^2})$), donde como condición inicial en $t = 0$ están los puntos definidos en la sub-sección anterior, y se muestra como evolucionan al IR (t negativos) y al UV (t positivos).

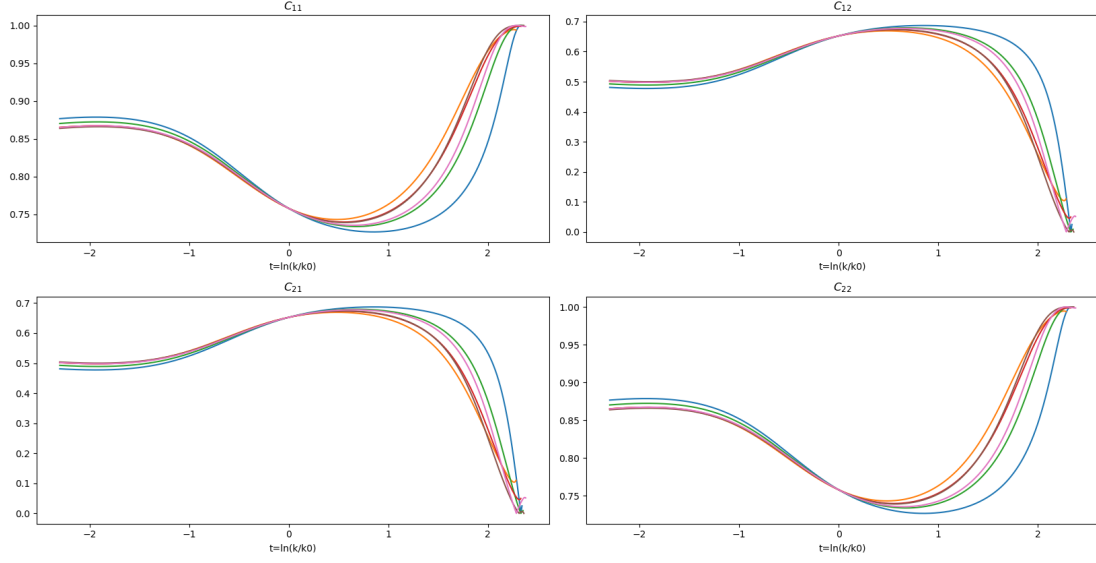


Figura 23: En este gráfico se observa, como las distintas líneas de flujo comienzan desde la zona UV (con $m = 0$), esto representan dos *pomerons* desacoplados, al evolucionar a la zona IR se empiezan a mezclar las masas, indicando que los estados que describen la física en esta región son una superposición de los estados originales. Con $a = 0,001$ y $\Delta = 0,001$

Además, se debe mencionar que el comportamiento mostrado en la figura 23 se mantiene al modificar el valor de a , en cambio otros puntos que no se muestran en este trabajo, al darle un valor menos a a , el punto donde se desacoplaban las 'masas', se cambiaba del sector UV al IR, considerando al PF como en $t = 0$, esto nos muestra que el punto escogido mantiene este comportamiento sin depender de los parámetros externos a y t .

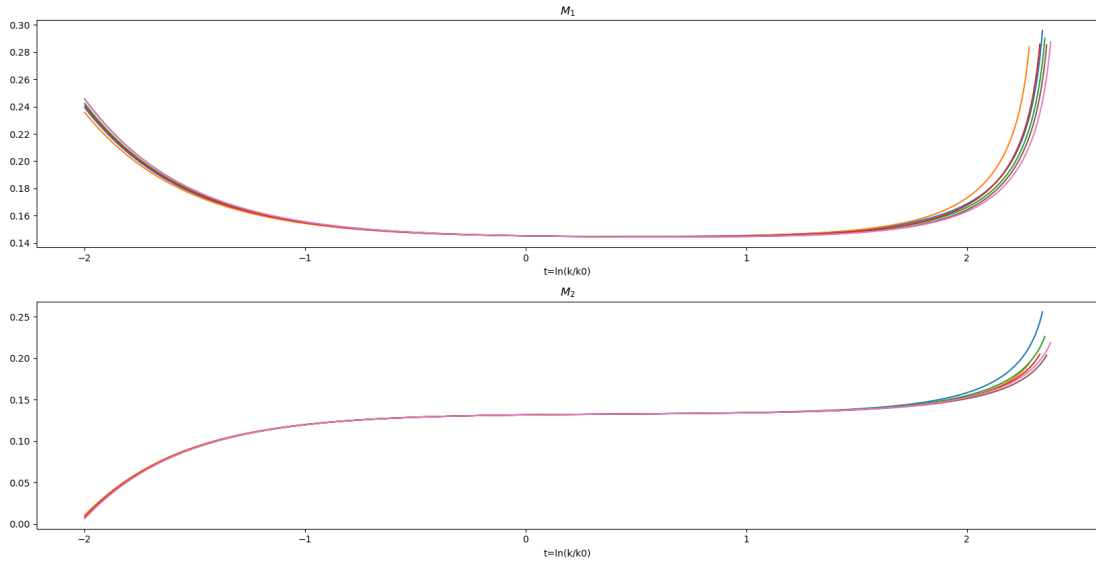


Figura 24: En esta figura se ve como evolucionan las 'masas' ya diagonalizadas, el comportamiento de ambas es bastante similar a los interceptos μ_1 y μ_2 mostrados anteriormente. Con $a = 0,001$ y $\Delta = 0,001$

Caso $\eta_i = 0$

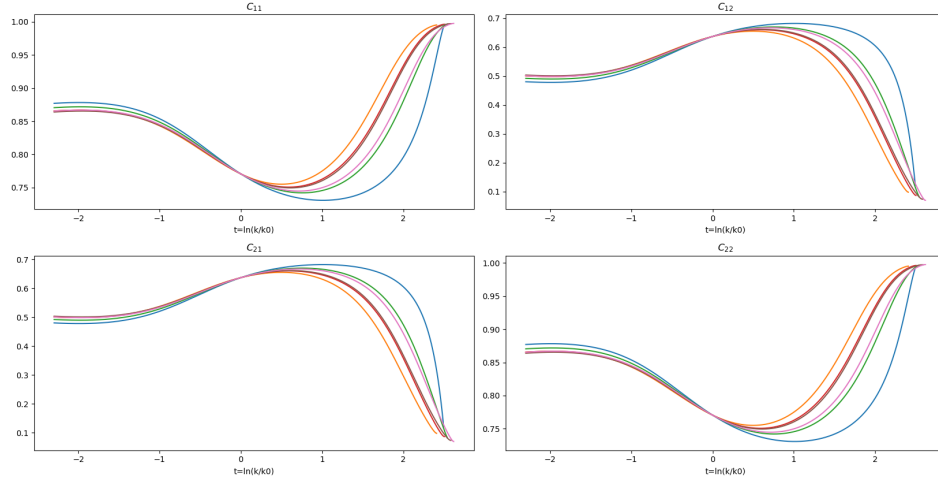


Figura 25: En este gráfico se ve como las distintas líneas de flujo convergen a un estado donde no se mezclan las 'masas' (i.e. $m = 0$), al posicionarnos en ese puntos y evolucionar al IR, se ve como se van mezclando los campos pasando por el PF y convergiendo en otro estado al IR. Con $a = 0,001$ y $\Delta = 0,001$

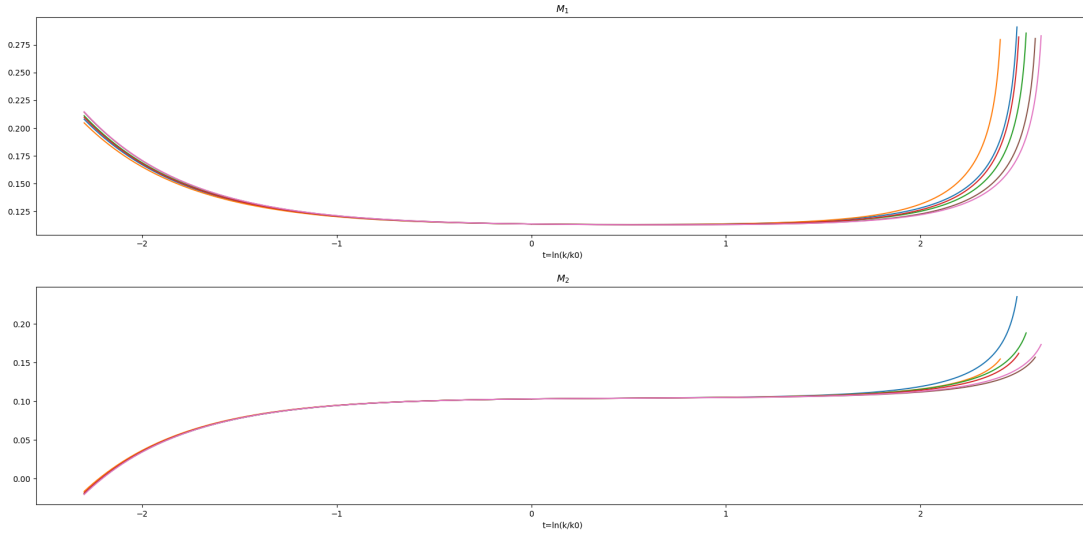


Figura 26: En esta figura se ve como evolucionan las 'masas' ya diagonalizadas, el comportamiento de ambas es bastante similar a los interceptos μ_1 y μ_2 mostrados anteriormente. Con $a = 0,001$ y $\Delta = 0,001$

En esta sección se abordaron los problemas numéricos de resolver las funciones β ; primero se presenta un algoritmo con buena convergencia para encontrar puntos fijos utilizando puntos aleatorios en el espacio de la teoría. Al tener los puntos fijos, se lineariza el sistema en torno a ellos y con la matriz de estabilidad se calcularon los exponentes críticos y filtrar los puntos que eran de nuestro interés (mayormente atractores en el IR). Se estudiaron diferentes regiones del espacio alrededor del punto fijo buscando trayectorias estables, como se puede ver en las figuras 19 y 21 se encontraron dichas trayectorias, se buscaban este tipo de trayectorias para buscar estados estables del *pomeron* en el UV que evolucionaran cerca del punto fijo. Para buscar la conexión entre esos dos estados, se diagonalizó la matriz de 'masa' y se encontró una configuración donde los campos estaban desacoplados ($m = 0$) en

el UV y logramos obtener diferentes trayectorias que evolucionaban hacia el punto fijo en el IR como se puede ver en las figuras 23 y 25. En esas figuras, se ve como se empieza (desde la derecha) en el límite UV con estados donde $m = 0$, y las diferentes trayectorias pasan cerca del punto fijo en $t = 0$ mientras evolucionan al IR.

9. Conclusiones

En las primeras secciones se resume la historia del estudio de las interacciones fuertes a través de la teoría de Regge. De las partículas descritas por esta teoría tenemos mesones reggeizados y *reggeons* compuestos de gluones. También, se resumieron diferentes modelos fenomenológicos que al comparar con datos de experimentos de la época, obtenían valores para el intercepto y la pendiente de la trayectoria de Regge asociada a cada *reggeons*. En este trabajo se utiliza una teoría de campos de Regge para describir a una familia de *pomerons*. Dichos trabajos modelan por separado a dos tipos de *pomeron*, uno que domina en el sector de bajas energías (el *Soft-Pomeron*) y otro que domina a altas energías (el *Hard-Pomeron*). En el cuadro 12, resumimos los valores fenomenológicos que han obtenido los diferentes modelos que se mencionan en esta tesis, por eso se obtiene un rango de valores.

	Intercepto ($Z^{-1}\mu_R$)	Pendiente (α'_R)
SOFT POMERON	0,0808 – 0,114	$\sim 0.25\text{GeV}^{-2}$
HARD POMERON	0,3 – 0,5	$\sim 0.1\text{GeV}^{-2}$

Cuadro 12: Rango de valores del intercepto y pendiente encontrados por distintos modelos fenomenológicos que comparan con datos experimentales.

Dichos valores son de suma importancia para nuestro trabajo, ya que en la acción efectiva que ocupamos, aparecen estos observables, y por ende, podemos comparar los resultados que obtenemos con los valores que aparecen en esta tabla y poder identificar si, en el límite IR obtenemos un estado compuesto de *Soft-Pomeron*, y en el límite UV se tiene campos representando al *Hard-Pomeron*.

En la acción efectiva mostrada en (62), la pendiente α'_R aparece en el término cinético y el intercepto se relaciona con los parámetros de 'masa', por ende, el ver como corren estas 'constantes' nos motivó para encontrar la conexión entre estados distintos del *pomeron*, es por eso que en este trabajo se ocupa el grupo de renormalización, y en específico, ya que tenemos contribuciones no perturbativas en el IR, ocupamos la ecuación exacta del grupo de renormalización funcional, introducido por Wetterich [3]. La solución de esta ecuación, nos permite obtener las funciones β asociadas a la acción antes mencionadas. Eso significa que tenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales que nos permite ver como corren las 'constantes' de nuestra teoría.

Como método de verificación de que las funciones β obtenidas estén de acuerdo a la literatura, se toman límites a esas funciones β , donde se llegan a comparar las expresiones obtenidas con trabajos que utilizan también la teoría de campos de Regge, pero con menos términos que nuestra acción. En específico, tenemos los trabajos de Bartels, Contreras y Vacca, donde en [1] estudian una acción que representa a un *pomeron*, el cual tiene una constante de acoplamiento a tercer orden (i.e. auto-interacciones). En [2] expanden esta investigación a dos campos para el *pomeron* y *odderon*, y consideran 3 términos asociados al potencial a tercer orden en los campos. Los límites que tomamos reproducen las mismas funciones β que ellos encuentran en sus trabajos. Cabe mencionar, que en nuestro trabajo también utilizamos dos campos para el *pomeron*, pero en este caso ambas partículas tiene un término de mezcla en las 'masas' (o interceptos) y utilizamos 6 términos en el potencial que representan todas las posibles combinaciones posibles a un tercer orden en los campos de una expansión LPA'.

Para poder estudiar la evolución de los parámetros calculamos las dimensiones anómalas, ya que ellas aparecen en las funciones β . A los resultados de dimensiones anómalas calculadas, también se le aplicaron los límites antes mencionados, obteniendo los mismos valores que aparecen [1, 2]. En este proceso se genera un método de cálculo de las funciones β y dimensiones anómalas que permite poder obtenerlas para otra acción diferente (al menos que contenga campos escalares), por lo que como trabajo futuro se expandirá esta investigación para casos donde tengamos órdenes mayores en el potencial y de campos. También se podría ocupar el método para otra acción totalmente diferente, siempre y cuando se quiera utilizar esa acción para obtener las funciones β a través de la ecuación de Wetterich.

Ya con las funciones β y dimensiones anómalas obtenidas, nos enfocamos en el estudio del flujo de los parámetros en el espacio de la teoría. Para analizar dicho flujo del grupo de renormalización, se tuvo que lidiar con distintos problemas técnicos asociados a la dificultad de resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales obtenidas. Por ello nos enfocamos en primer lugar en calcular los puntos fijos. Al tener 9 funciones β que resultan ser ecuaciones diferenciales no lineales, y una asociada a r , los métodos tradicionales tienen problemas de convergencias, ya que al estar en un espacio 10-dimensional, estos métodos fallan ya que necesitan estar cerca de los puntos fijos. Es por esto que se necesitan técnicas de búsqueda de puntos fijos que tengan un buen desempeño en la convergencia, mas

que en la rapidez o la exactitud; para luego utilizar métodos mas exactos para lograr una precisión considerable. Se utiliza un algoritmo basado en 'redes neuronales', el cual, encontró una cantidad de puntos fijos que se satisfacen los criterios de selección y que podrían ser candidatos a puntos fijos físicos, acercándose a una distancia menor a la que se consigue con los métodos tradicionales (e.g. Newton-Raphson). Es por esto que se desarrolla un programa que genere puntos aleatorios en el espacio de la teoría para ocupar el algoritmo de 'redes neuronales' para acercarse a los puntos fijos, y luego se utiliza Newton-Raphson para obtener una precisión de al menos $\beta_i < 10^{-16}$.

Con los puntos fijos encontrados, nos gustaría saber si estos puntos son mayormente atractores en el IR o en el UV. Para eso linearizamos en torno a dichos PF's para analizar sus exponentes críticos a través de los autovalores de la matriz de estabilidad. En este trabajo se filtran los puntos fijos mayormente atractores en el IR, ya que la motivación de este trabajo es ver como evolucionan estos estados del *pomeron* en el límite IR el cual es no perturbativo. El *Soft-Pomeron* domina en dicha región y además el valor de su intercepto como se muestra en el cuadro 12, se asimila bastante a las mostradas en los PF's IR encontrados (i.e. 0,1384 y 0,1084 como se ve en el cuadro 10), el punto con $\eta_i = 0$ está justamente dentro de ese rango mostrado en el cuadro 12. También se encuentran PF's que aparecen en los trabajos en los cuales comparamos las funciones β y dimensiones anómalas [1,2]. Ejemplos de puntos fijos mayormente atractores en el UV se muestran en el apéndice C.

Además de encontrar los puntos fijos y analizar como es el comportamiento del flujo en torno a ellos, nos interesaba poder conectar dos puntos definidos en el espacio de la teoría y que evolucionan por el grupo de renormalización, uno en el UV y otro en la vecindad del punto fijo IR. Como tenemos un término de mezcla de 'masas' m , una forma de visualizar la evolución de un estado a otro es ver como se mezclan los términos de 'masa'. Es por esto que finalmente se calcula y diagonaliza la matriz de 'masa', para obtener un nuevo espacio donde tenemos nuevos campos desacoplados. La relación entre los campos antiguos y nuevos nos permitió obtener un estado donde los campos están desacoplados (i.e. $m = 0$) en el UV y observar como evoluciona hacia el punto fijo en el IR. Esta evolución es interesante de ver, ya que justamente se quiere buscar flujos en el que se puedan conectar dos puntos que representen diferentes estados del *pomeron*.

En el futuro, nos gustaría expandir esta investigación ampliando el orden en los campos del potencial que se usa, justamente para ver que los puntos fijos obtenidos sean puntos robustos en la teoría. También nos gustaría poder encontrar otras trayectorias que puedan conectar diferentes estados del *pomeron*, para esto debemos encontrar otros puntos fijos; resultaría interesante encontrar puntos fijos asociados a dos *Hard-Pomeron* interactuando. Con estos puntos fijos, el desafío sería encontrar flujos que los conecten con los resultados obtenidos en este trabajo y visualizar su evolución hacia el IR. Ya obteniendo que la teoría de campos de Regge puede dar una descripción efectiva de los *pomeron* en ciertas escalas de energía, se podría investigar como se acoplan estos campos a otras partículas, por ejemplo en cierta escala de energía como lo hacen con los *quarks* o en otra escala de energía como se acoplan a los hadrones (como el protón).

Referencias

- [1] J. Bartels, C. Contreras, and G. P. Vacca, “Could reggeon field theory be an effective theory for QCD in the Regge limit?,” *JHEP*, vol. **03**, p. 201, 2016.
- [2] J. Bartels, C. Contreras, and G. P. Vacca, “Pomeron - Odderon interactions in a reggeon field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. **95**, no. 1, p. 014013, 2017.
- [3] C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential,” *Phys. Lett. B*, vol. **301**, pp. 90–94, 1993.
- [4] T. Regge, “Introduction to complex orbital momenta,” *Nuovo Cim.*, vol. **14**, p. 951, 1959.
- [5] P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1977.
- [6] S. Mandelstam, “Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory,” *Phys. Rev.*, vol. **112**, pp. 1344–1360, 1958.
- [7] J. R. Forshaw and D. A. Ross, *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*. Cambridge Lecture Notes in Physics, Cambridge University Press, 1997.
- [8] S. Donnachie, G. Dosch, P. Landshoff, and O. Nachtmann, *Pomeron Physics and QCD*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge University Press, 2002.
- [9] Y. V. Kovchegov and E. Levin, *Quantum Chromodynamics at High Energy*, vol. 33. Oxford University Press, 2013.
- [10] G. A. Jaroszkiewicz and P. V. Landshoff, “Model for diffraction excitation,” *Phys. Rev. D*, vol. **10**, pp. 170–174, 1974.
- [11] F. E. Low, “A Model of the Bare Pomeron,” *Phys. Rev. D*, vol. **12**, pp. 163–173, 1975.
- [12] S. Nussinov, “Colored Quark Version of Some Hadronic Puzzles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **34**, pp. 1286–1289, 1975.
- [13] S. Nussinov, “A Perturbative Recipe for Quark Gluon Theories and Some of Its Applications,” *Phys. Rev. D*, vol. **14**, p. 246, 1976.
- [14] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, “The Pomeranchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories,” *Sov. Phys. JETP*, vol. **45**, pp. 199–204, 1977.
- [15] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, “The Pomeranchuk Singularity in Quantum Chromodynamics,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. **28**, pp. 822–829, 1978.
- [16] L. N. Lipatov, “The Bare Pomeron in Quantum Chromodynamics,” *Sov. Phys. JETP*, vol. **63**, pp. 904–912, 1986.
- [17] D. Joynson, E. Leader, B. Nicolescu, and C. Lopez, “NonRegge and HyperRegge Effects in Pion-Nucleon Charge Exchange Scattering at High-Energies,” *Nuovo Cim. A*, vol. **30**, p. 345, 1975.
- [18] G. Stermann, J. Smith, J. C. Collins, J. Whitmore, R. Brock, J. Huston, J. Pumplin, W.-K. Tung, H. Weerts, C.-P. Yuan, S. Kuhlmann, S. Mishra, J. G. Morfin, F. Olness, J. Owens, J. Qiu, and D. E. Soper, “Handbook of perturbative qcd,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. **67**, pp. 157–248, Jan 1995.
- [19] C. Ayala, G. Cvetič, A. V. Kotikov, and B. G. Shaikhatdenov, “Bjorken sum rule with analytic QCD coupling,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1435, no. 1, p. 012016, 2020.
- [20] H. D. Abarbanel, J. D. Bronzan, R. L. Sugar, and A. R. White, “Reggeon field theory: Formulation and use,” *Physics Reports*, vol. 21, no. 3, pp. 119–182, 1975.
- [21] L. N. Lipatov, “Gauge invariant effective action for high-energy processes in QCD,” *Nucl. Phys. B*, vol. 452, pp. 369–400, 1995.

- [22] J. Bartels, C. Contreras, and G. P. Vacca, “The Odderon in QCD with running coupling,” *JHEP*, vol. **04**, p. 183, 2020.
- [23] V. N. Gribov, “A REGGEON DIAGRAM TECHNIQUE,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 53, pp. 654–672, 1967.
- [24] J. Ellis, H. Kowalski, and D. A. Ross, “Evidence for the Discrete Asymptotically-Free BFKL Pomeron from HERA Data,” *Phys. Lett. B*, vol. 668, pp. 51–56, 2008.
- [25] H. Kowalski, L. N. Lipatov, D. A. Ross, and O. Schulz, “Decoupling of the leading contribution in the discrete BFKL Analysis of High-Precision HERA Data,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 11, p. 777, 2017.
- [26] V. Barone and E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*. Theoretical and Mathematical Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [27] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Academic press, 1949.
- [28] G. N. Watson, “The diffraction of electric waves by the earth,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. **95**, no. 666, pp. 83–99, 1918.
- [29] A. A. Godizov, “High-energy elastic diffractive scattering of nucleons in the framework of the two-Reggeon eikonal approximation (from U-70 to LHC),” *Eur. Phys. J. C*, vol. **82**, no. 1, p. 56, 2022.
- [30] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “Multi - Gluon Exchange in pp Elastic Scattering,” *Phys. Lett. B*, vol. **123**, pp. 345–348, 1983.
- [31] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “Elastic Scattering at Large t ,” *Z. Phys. C*, vol. **2**, p. 55, 1979. [Erratum: *Z.Phys.C* 2, 372 (1979)].
- [32] E. Nagy *et al.*, “Measurements of Elastic Proton Proton Scattering at Large Momentum Transfer at the CERN Intersecting Storage Rings,” *Nucl. Phys. B*, vol. **150**, pp. 221–267, 1979.
- [33] M. G. Albrow, C. W. Fabjan, and M. R. M. Jacob, “Selected topics in isr physics,” tech. rep., CM-P00047688, 1982.
- [34] G. Barbiellini *et al.*, “Small angle proton proton elastic scattering at very high-energies ($460\text{-GeV}^{*2} < s < 2900\text{-GeV}^{*2}$),” *Phys. Lett. B*, vol. **39**, pp. 663–667, 1972.
- [35] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “Total cross-sections,” *Phys. Lett. B*, vol. **296**, pp. 227–232, 1992.
- [36] F. Abe *et al.*, “Measurement of the $\bar{p}p$ Total Cross-Section at $\sqrt{s} = 546$ GeV and 1800 GeV,” *Phys. Rev. D*, vol. **50**, pp. 5550–5561, 1994.
- [37] J.-R. Cudell, K. Kang, and S. K. Kim, “Soft pomeron intercept,” in *7th International Conference (Blois Workshop) on Elastic and Diffractive Scattering - Recent Advances in Hadron Physics*, pp. 114–125, 11 1997.
- [38] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “Small x : Two pomerons!,” *Phys. Lett. B*, vol. **437**, pp. 408–416, 1998.
- [39] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “New data and the hard Pomeron,” *Phys. Lett. B*, vol. **518**, pp. 63–71, 2001.
- [40] A. A. Godizov, “The hard pomeron intercept and the data on the proton unpolarized structure function,” *Nucl. Phys. A*, vol. **927**, pp. 36–40, 2014.
- [41] V. M. Abazov *et al.*, “Odderon Exchange from Elastic Scattering Differences between pp and $p\bar{p}$ Data at 1.96 TeV and from pp Forward Scattering Measurements,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **127**, no. 6, p. 062003, 2021.
- [42] A. Donnachie and P. V. Landshoff, “Lack of evidence for an odderon at small t ,” *Phys. Lett. B*, vol. **831**, p. 137199, 2022.
- [43] I. Szanyi and T. Csörgő, “The ReBB model and its $H(x)$ scaling version at 8 TeV: Odderon exchange is a certainty,” *Eur. Phys. J. C*, vol. **82**, no. 9, p. 827, 2022.

- [44] J. a. F. Melo, “Introduction to Renormalisation,” 9 2019.
- [45] L. P. Kadanoff, “Scaling laws for Ising models near $T(c)$,” *Physics Physique Fizika*, vol. **2**, pp. 263–272, 1966.
- [46] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture,” *Phys. Rev. B*, vol. 4, pp. 3174–3183, Nov 1971.
- [47] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. ii. phase-space cell analysis of critical behavior,” *Phys. Rev. B*, vol. 4, pp. 3184–3205, Nov 1971.
- [48] J. Polchinski, “Renormalization and Effective Lagrangians,” *Nucl. Phys. B*, vol. 231, pp. 269–295, 1984.
- [49] H. Gies, “Introduction to the functional RG and applications to gauge theories,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 852, pp. 287–348, 2012.
- [50] D. F. Litim, “Optimized renormalization group flows,” *Phys. Rev. D*, vol. **64**, p. 105007, 2001.
- [51] G. Li and Z. Zeng, “A neural-network algorithm for solving nonlinear equation systems,” in *2008 International Conference on Computational Intelligence and Security*, vol. **1**, pp. 20–23, IEEE, 2008.

A. Funciones β

En este apéndice, se presenta las combinaciones de λ 's que aportan a cada función β , y al final se mostrarán las versión completa de las ecuaciones (161-164), ya que no son tan grandes como las demás.

$$\dot{\mu}_1 = (-2 + \xi_1 + \eta_1)\mu_1 + \lambda_1^2 f_{\mu 1} + \lambda_1 \lambda_3 f_{\mu 2} + \lambda_1 \lambda_5 f_{\mu 3} + \lambda_3^2 f_{\mu 4} + \lambda_3 \lambda_5 f_{\mu 5} + \lambda_5^2 f_{\mu 6} \quad (161)$$

$$\dot{\mu}_2 = (-2 + \xi_1 + \eta_2)\mu_2 + \lambda_2^2 f_{\mu 7} + \lambda_2 \lambda_4 f_{\mu 8} + \lambda_2 \lambda_6 f_{\mu 9} + \lambda_4^2 f_{\mu 10} + \lambda_4 \lambda_6 f_{\mu 11} + \lambda_6^2 f_{\mu 12} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} \dot{m} = & (-2 + \xi_1 + \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2))m + \lambda_1 \lambda_2 f_{m1} + \lambda_1 \lambda_4 f_{m2} + \lambda_1 \lambda_6 f_{m3} + \lambda_2 \lambda_3 f_{m4} + \lambda_2 \lambda_5 f_{m5} + \lambda_3 \lambda_4 f_{m6} + \\ & \lambda_3 \lambda_6 f_{m7} + \lambda_4 \lambda_5 f_{m8} + \lambda_5 \lambda_6 f_{m9} \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \frac{3}{2}\eta_1)\lambda_1 + \lambda_1^3 f_{1A} + \lambda_1^2 \lambda_3 f_{1B} + \lambda_1^2 \lambda_4 f_{1C} + \lambda_1^2 \lambda_5 f_{1D} + \lambda_1^2 \lambda_6 f_{1E} + \lambda_1 \lambda_3^2 f_{1F} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 f_{1G} + \\ & \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 f_{1H} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 f_{1I} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 f_{1J} + \lambda_1 \lambda_5^2 f_{1K} + \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 f_{1L} + \lambda_3^3 f_{1M} + \lambda_3^2 \lambda_4 f_{1N} + \lambda_3^2 \lambda_5 f_{1\bar{N}} + \\ & \lambda_3^2 \lambda_6 f_{1O} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 f_{1P} + \lambda_3 \lambda_5^2 f_{1Q} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 f_{1R} + \lambda_4 \lambda_5^2 f_{1S} + \lambda_5^2 \lambda_6 f_{1T} \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \frac{3}{2}\eta_2)\lambda_2 + \lambda_2^3 f_{2A} + \lambda_2^2 \lambda_3 f_{2B} + \lambda_2^2 \lambda_4 f_{2C} + \lambda_2^2 \lambda_5 f_{2D} + \lambda_2^2 \lambda_6 f_{2E} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_{2F} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 f_{2G} + \\ & \lambda_2 \lambda_4^2 f_{2H} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 f_{2I} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_6 f_{2J} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 f_{2K} + \lambda_2 \lambda_6^2 f_{2L} + \lambda_3 \lambda_4^2 f_{2M} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 f_{2N} + \lambda_3 \lambda_6^2 f_{2\bar{N}} + \\ & \lambda_4^3 f_{2O} + \lambda_4^2 \lambda_5 f_{2P} + \lambda_4^2 \lambda_6 f_{2Q} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 f_{2R} + \lambda_4 \lambda_6^2 f_{2S} + \lambda_5 \lambda_6^2 f_{2T} \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2)\lambda_3 + \lambda_1^2 \lambda_2 f_{3A} + \lambda_1^2 \lambda_3 f_{3B} + \lambda_1^2 \lambda_4 f_{3C} + \lambda_1^2 \lambda_5 f_{3D} + \lambda_1^2 \lambda_6 f_{3E} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 f_{3F} + \\ & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 f_{3G} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 f_{3H} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_6 f_{3I} + \lambda_1 \lambda_3^2 f_{3J} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 f_{3K} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 f_{3L} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 f_{3M} + \lambda_1 \lambda_4^2 f_{3N} \\ & + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 f_{3\bar{N}} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 f_{3O} + \lambda_1 \lambda_5^2 f_{3P} + \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 f_{3Q} + \lambda_1 \lambda_6^2 f_{3R} + \lambda_2 \lambda_3^2 f_{3S} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_{3T} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 f_{3U} \\ & + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 f_{3V} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 f_{3W} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 f_{3X} + \lambda_3^3 f_{3Y} + \lambda_3^2 \lambda_4 f_{3Z} + \lambda_3^2 \lambda_5 f_{3AA} + \lambda_3^2 \lambda_6 f_{3AB} + \lambda_3 \lambda_4^2 f_{3AC} \\ & + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 f_{3AD} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 f_{3AE} + \lambda_3 \lambda_5^2 f_{3AF} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 f_{3AG} + \lambda_3 \lambda_6^2 f_{3AH} + \lambda_4^2 \lambda_5 f_{3AI} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 f_{3AJ} + \\ & \lambda_5 \lambda_6^2 f_{3AK} + \lambda_5^2 f_{3AL} + \lambda_4 \lambda_5^2 f_{3AM} + \lambda_2 \lambda_5^2 f_{3AN} \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_4 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1)\lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2^2 f_{4A} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 f_{4B} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 f_{4C} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 f_{4D} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_6 f_{4E} + \\ & \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 f_{4F} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 f_{4G} + \lambda_1 \lambda_4^2 f_{4H} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 f_{4I} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 f_{4J} + \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 f_{4K} + \lambda_1 \lambda_6^2 f_{4L} + \lambda_2^2 \lambda_3 f_{4M} + \\ & \lambda_2 \lambda_3^2 f_{4N} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_{4\bar{N}} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 f_{4O} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 f_{4P} + \lambda_2 \lambda_4^2 f_{4Q} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 f_{4R} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_6 f_{4S} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 f_{4T} + \\ & \lambda_2 \lambda_6^2 f_{4U} + \lambda_3^2 \lambda_4 f_{4V} + \lambda_3^2 \lambda_6 f_{4W} + \lambda_3 \lambda_4^2 f_{4X} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 f_{4Y} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 f_{4Z} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 f_{4AA} + \lambda_3 \lambda_6^2 f_{4AB} + \\ & \lambda_4^3 f_{4AC} + \lambda_4^2 \lambda_5 f_{4AD} + \lambda_4^2 \lambda_6 f_{4AE} + \lambda_4 \lambda_5^2 f_{4AF} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 f_{4AG} + \lambda_4 \lambda_6^2 f_{4AH} + \lambda_5^2 \lambda_6 f_{4AI} + \lambda_6^3 f_{4AJ} + \\ & \lambda_2^2 \lambda_4 f_{4AK} + \lambda_2^2 \lambda_5 f_{4AL} + \lambda_2^2 \lambda_6 f_{4AM} + \lambda_2 \lambda_5^2 f_{4AN} \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_5 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_1)\lambda_5 + \lambda_1 \lambda_2^2 f_{5A} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 f_{5B} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 f_{5C} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 f_{5D} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_6 f_{5E} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 f_{5F} + \\ & \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 f_{5G} + \lambda_1 \lambda_4^2 f_{5H} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 f_{5I} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 f_{5J} + \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 f_{5K} + \lambda_2^2 \lambda_3 f_{5L} + \lambda_2^2 \lambda_5 f_{5M} + \lambda_2^2 \lambda_6 f_{5N} + \lambda_2 \lambda_3^2 f_{5\bar{N}} + \\ & \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_{5O} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 f_{5P} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 f_{5Q} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 f_{5R} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 f_{5S} + \lambda_2 \lambda_5^2 f_{5T} + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 f_{5U} + \lambda_4 \lambda_5^2 f_{5V} + \\ & \lambda_3^2 \lambda_4 f_{5W} + \lambda_3^2 \lambda_6 f_{5X} + \lambda_3 \lambda_4^2 f_{5Y} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 f_{5Z} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 f_{5AA} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 f_{5AB} + \lambda_4^2 \lambda_5 f_{5AC} \end{aligned} \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_6 = & (-2 + \frac{D}{2} + \xi_1 + \eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2)\lambda_6 + \lambda_1^2 \lambda_2 f_{6A} + \lambda_1^2 \lambda_4 f_{6B} + \lambda_1^2 \lambda_6 f_{6C} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 f_{6D} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 f_{6E} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 f_{6F} + \\ & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_6 f_{6G} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 f_{6H} + \lambda_5 \lambda_6^2 f_{6I} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 f_{6J} + \lambda_1 \lambda_4^2 f_{6K} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 f_{6L} + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_6 f_{6M} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 f_{6N} + \\ & \lambda_1 \lambda_5 \lambda_6 f_{6\bar{N}} + \lambda_1 \lambda_6^2 f_{6O} + \lambda_2 \lambda_3^2 f_{6P} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 f_{6Q} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 f_{6R} + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_6 f_{6S} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 f_{6T} + \lambda_3^2 \lambda_4 f_{6U} + \\ & \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 f_{6V} + \lambda_3^2 \lambda_6 f_{6W} + \lambda_3 \lambda_4^2 f_{6X} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 f_{6Y} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 f_{6Z} + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 f_{6AA} + \lambda_3 \lambda_6^2 f_{6AB} + \lambda_4^2 \lambda_5 f_{6AC} \end{aligned} \quad (169)$$

Se deja un enlace con un cuaderno de *Mathematica* con las funciones β por completo, ya que son demasiado grandes. Hacer click acá, para re-direccionar a la nube.. Se muestran las primeras 3 funciones β ya que no son tan largas como las demás, además de la función β asociada a λ_1 que ya empieza a tener un tamaño mas considerable. La forma de mostrar estas ecuaciones se realizó al importarlas de un cuaderno de *Mathematica*, para facilitar su muestra.

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_1 = & \left(\lambda_3^2 \left(\mathbf{r} (-1 + \mu_1)^2 \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \right. \\ & \lambda_1^2 \left(\mathbf{m}^4 + \mathbf{m}^2 \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) - \mathbf{m}^2 (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right) - \\ & 2 \mathbf{m} \lambda_1 \left(-\mathbf{r} \lambda_3 (-1 + \mu_1) \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \left(-\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) \right) (\mathbf{r} \lambda_3 - \mathbf{m} \lambda_5 - \lambda_3 \mu_2) + \mathbf{m} \mathbf{r} \lambda_5 \left(\mathbf{m}^2 - (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) - \\ & 2 \mathbf{m} \lambda_3 \lambda_5 \left(\left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2) + \mathbf{r} (1 - \mu_1) \left(-\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \\ & \lambda_5^2 \left(\mathbf{m}^2 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) + \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^4 + (-1 + \mu_1)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 - \mathbf{m}^2 (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \\ & \left. 2 \pi \mu_1 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \left(\mathbf{m}^2 + \mathbf{r} (-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2 \right)^2 (-2 + \eta_1 + \xi_1) \right) / \left(2 \pi \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_2 = & \left(-2 \mathbf{m} \lambda_4 \lambda_6 \left(\mathbf{r} (1 - \mu_1) \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \left(-\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) \right) (\mathbf{r} - \mu_2) \right) + \lambda_4^2 \left(\mathbf{r} (-1 + \mu_1)^2 \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) + \right. \\ & \lambda_6^2 \left(\mathbf{m}^4 + \mathbf{m}^2 \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) - \mathbf{m}^2 (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right) - \\ & 2 \mathbf{m} \lambda_2 \left(\mathbf{m} \lambda_6 \left(\mathbf{m}^2 - (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) \right) + \lambda_4 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2) - \mathbf{r} (\mathbf{m} \lambda_6 + \lambda_4 (-1 + \mu_1)) \left(-\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \\ & \lambda_2^2 \left(\mathbf{m}^2 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) + \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^4 + (-1 + \mu_1)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 - \mathbf{m}^2 (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \\ & \left. 2 \pi \mu_2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \left(\mathbf{m}^2 + \mathbf{r} (-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2 \right)^2 (-2 + \eta_2 + \xi_1) \right) / \left(2 \pi \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}} = & \left(-\lambda_3 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \right. \\ & \left(\mathbf{r} (\mathbf{m} \lambda_6 + \lambda_4 (-1 + \mu_1)) (1 - \mu_1) \left(\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 \right) - (\mathbf{m} \lambda_6 \left(\mathbf{m}^2 - (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) \right) + \lambda_4 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2) \right) (\mathbf{r} - \mu_2) \right) + \\ & \lambda_5 \lambda_6 \left(\mathbf{m}^3 + \mathbf{m} (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \left(-\mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \mathbf{r} + (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) + \mathbf{r} (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) - \\ & \mathbf{m} \lambda_2 \lambda_3 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \left(\left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2) + \mathbf{r} (1 - \mu_1) \left(-\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) - \\ & \mathbf{m} \lambda_4 \lambda_5 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \left(\left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) (\mathbf{r} - \mu_2) + \mathbf{r} (1 - \mu_1) \left(-\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \lambda_2 \lambda_5 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \\ & \left(\mathbf{m}^2 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1)^2 \right) + \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^4 + (-1 + \mu_1)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 - \mathbf{m}^2 (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \lambda_1 \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^2 \\ & \left(\mathbf{m} \left(-\mathbf{m}^2 + (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) \right) (\mathbf{m} \lambda_2 + \lambda_4 (-\mathbf{r} + \mu_2)) + \lambda_6 \left(\mathbf{m}^4 - \mathbf{m}^2 (\mathbf{r} - \mu_2) (2 + \mathbf{r} - 2 \mu_1 - \mu_2) + (\mathbf{r} - \mu_2)^2 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right) + \right. \\ & \left. \mathbf{m} \mathbf{r} \left(\mathbf{m}^3 (-\lambda_2 + \lambda_6) + \mathbf{m}^2 \lambda_4 (-1 + \mu_1) + \mathbf{m} \lambda_6 (\mathbf{r} - \mu_2)^2 + \lambda_4 (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2)^2 + \mathbf{m} \lambda_2 (-1 + \mu_1) (-1 - 2 \mathbf{r} + \mu_1 + 2 \mu_2) \right) \right) + \\ & \left. \mathbf{m} \pi (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \left(\mathbf{m}^2 + \mathbf{r} (-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2 \right)^4 (-4 - \eta_1 + \eta_2 + 2 (\eta_1 + \xi_1)) \right) / \left(2 \pi \left(\mathbf{m}^2 + (-1 + \mu_1) (\mathbf{r} - \mu_2) \right)^4 (-1 - \mathbf{r} + \mu_1 + \mu_2)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 = & (-2\lambda_1^3 (m^2 + r(-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2)^3 (-2m^6 - 2m^6 r - 3m^4 r(-1 + \mu_1) - 4m^4 r^2(-1 + \mu_1) + 2m^4 r(r - \mu_2) - 3m^4(-1 + \mu_1)(r - \mu_2) - \\
& 6m^2(-1 + \mu_1)^2(r - \mu_2)^2 + m^2 r^2(r - \mu_2)^3 + 6m^2(-1 + \mu_1)(r - \mu_2)^3 - 3m^2 r(-1 + \mu_1)(r - \mu_2)^3 - 2m^2(r - \mu_2)^4 + \\
& m^2 r(r - \mu_2)^3(1 + r - \mu_1 - \mu_2) + 2(r - \mu_2)^3(1 + r - \mu_1 - \mu_2)^3 + 3m^4(-1 + \mu_1)\mu_2 + 4m^4 r(-1 + \mu_1)\mu_2 - 2m^4(r - \mu_2)\mu_2 - m^2 r(r - \mu_2)^3\mu_2) + \\
& \lambda_4 \lambda_5^2 (-m^2 + r - r\mu_1 + (-1 + \mu_1)\mu_2)^3 (-2m^6 - 2m^6 r - 2m^4 r(-1 + \mu_1) - m^2(-1 + \mu_1)^3 - 2m^2 r(-1 + \mu_1)^4 + 2m^4 r(-1 + \mu_1)\mu_1 + \\
& m^2(-1 + \mu_1)^3\mu_1 + 4m^4(r - \mu_2) + 3m^4 r(r - \mu_2) - 3m^4 r(-1 + \mu_1)(r - \mu_2) - 3m^2(-1 + \mu_1)^3(r - \mu_2) + 6m^2 r(-1 + \mu_1)^3(r - \mu_2) - 4m^4\mu_1(r - \mu_2) - \\
& 3m^4 r\mu_1(r - \mu_2) - 6m^2 r(-1 + \mu_1)^2(r - \mu_2)^2 + m^2(-1 + \mu_1)^3(-1 - r + \mu_1 + \mu_2) + 2r(-1 + \mu_1)^3(-1 - r + \mu_1 + \mu_2)^3) + m\lambda_3^3 (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 \\
& (1 + r - \mu_1 - \mu_2) ((r - \mu_2)^2 (2 + m^2 + r - (4 + r)\mu_1 + 2\mu_1^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2) + r(-1 + \mu_1)^2 (m^2 + 2r^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2 + 2\mu_2^2 - r(-1 + \mu_1 + 4\mu_2))) - \\
& 2m\lambda_5^2 \lambda_6 (1 - \mu_1) (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) \\
& (m^2(-1 + \mu_1) - 3r^2(-1 + \mu_1)^2 + (1 + 2m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + r(-3 - m^2 + 2\mu_1^3 + 3\mu_2 + \mu_1^2(-7 + 3\mu_2) - \mu_1(-8 + m^2 + 6\mu_2))) - \\
& \lambda_3 \lambda_5 (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 (-2\lambda_6 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) (2r^3(-1 + \mu_1)^3 - r^2(-1 + \mu_1)(-2 - 6m^2 + \mu_1^3 + \mu_1(5 + 3m^2 - 8\mu_2) + 4\mu_1^2(-1 + \mu_2) + 4\mu_2) + \\
& \mu_2(m^2(3 + m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2) + (-1 + \mu_1)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2) + \\
& r(-m^2(6 + (-15 + m^2)\mu_1 + 12\mu_1^2 - 3\mu_1^3) + (3 - 4\mu_1 + \mu_1^2)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + 2(-1 + \mu_1)^3\mu_2^2)) + m\lambda_5 (1 - \mu_1)(1 + r - \mu_1 - \mu_2) \\
& (m^2(-1 + \mu_1) - 3r^2(-1 + \mu_1)^2 + (1 + 2m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + r(-3 - m^2 + 2\mu_1^3 + 3\mu_2 + \mu_1^2(-7 + 3\mu_2) - \mu_1(-8 + m^2 + 6\mu_2))) + \\
& 2m\lambda_4 (-2r(1 - \mu_1)(1 - m^2 + m^4 + 3r - 3m^2 r + 3r^2 + (-4 - 9r - 6r^2 + m^2(2 + 3r))\mu_1 + (6 - m^2 + 9r + 3r^2)\mu_1^2 - \\
& (4 + 3r)\mu_1^3 + \mu_1^4 + 3(-1 + \mu_1)(1 - m^2 - 2r(-1 + \mu_1) - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + 3(-1 + \mu_1)^2\mu_2^2) + \\
& (1 + m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)(m^2(-1 + \mu_1) + 3r^2(-1 + \mu_1) + (1 - m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + 3(-1 + \mu_1)\mu_2^2 + r(-1 - m^2 - \mu_1^2 + \mu_1(2 - 6\mu_2) + 6\mu_2))) - \\
& \lambda_3^2 (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 (-\lambda_5 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) (2r^3(-1 + \mu_1)^3 - r^2(-1 + \mu_1)(-2 - 6m^2 + \mu_1^3 + \mu_1(5 + 3m^2 - 8\mu_2) + 4\mu_1^2(-1 + \mu_2) + 4\mu_2) + \\
& \mu_2(m^2(3 + m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2) + (-1 + \mu_1)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2) + \\
& r(-m^2(6 + (-15 + m^2)\mu_1 + 12\mu_1^2 - 3\mu_1^3) + (3 - 4\mu_1 + \mu_1^2)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + 2(-1 + \mu_1)^3\mu_2^2)) - \\
& 2m\lambda_6 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) ((r - \mu_2)^2 (2 + m^2 + r - (4 + r)\mu_1 + 2\mu_1^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2) + r(-1 + \mu_1)^2 (m^2 + 2r^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2 + 2\mu_2^2 - r(-1 + \mu_1 + 4\mu_2))) + \\
& 2\lambda_4 (1 - \mu_1) ((1 + m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)(r - \mu_2) (m^2 + r^2 - 2r\mu_2 + \mu_2^2) - \\
& r(1 - \mu_1) (r^3(-1 + \mu_1) + m^2(-1 + m^2 + 2\mu_1 - \mu_1^2) - 3m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 - 3r^2(-1 + \mu_1)\mu_2 - (-1 + \mu_1)\mu_2^3 + 3r(-1 + \mu_1)(m^2 + \mu_2^2))) + \\
& m\lambda_1^2 (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 (2\lambda_6 (r - \mu_2) (1 + r - \mu_1 - \mu_2) (-r^3(-3 + \mu_1) + \mu_2(m^2 - 3(-1 + \mu_1)\mu_2 - 2\mu_2^2) + \\
& r(m^2(1 - 2\mu_1) + (-6 - m^2 + 6\mu_1)\mu_2 - (-7 + \mu_1)\mu_2^2) + r^2(3 + m^2 - 8\mu_2 + \mu_1(-3 + 2\mu_2))) - \\
& 8m\lambda_5 (m^4 - r^4(-2 + \mu_1) + r^3(6 + 3\mu_1^2 + 3\mu_1(-3 + \mu_2) - 7\mu_2) - 3m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 + (3 - m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2^2 + 3(-1 + \mu_1)\mu_2^3 + \\
& \mu_2^4 + r(m^2(-3 + m^2 + 3\mu_1) + (-7 + 4m^2 + 15\mu_1 - 2m^2\mu_1 - 9\mu_1^2 + \mu_1^3)\mu_2 + 3(4 - 5\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2^2 + (-5 + \mu_1)\mu_2^3) - \\
& r^4(-4 + 3m^2 + \mu_1^2 + 6\mu_1^2(-1 + \mu_2) + 15\mu_2 - 9\mu_2^2 + \mu_1(9 - 2m^2 - 21\mu_2 + 3\mu_2^2))) + \lambda_3 \\
& (-5r^5(-3 + \mu_1) + r^2(m^2(-11 + 4m^2 - 3\mu_1 + 14\mu_1^2) + (-81 + 21m^2 + 6(27 + m^2)\mu_1 - 81\mu_1^2)\mu_2 + 3(71 + 5m^2 - 84\mu_1 + 13\mu_1^2)\mu_2^2 + 20(-6 + \mu_1)\mu_2^3) - \\
& \mu_2(8m^4 - 25m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 + 9(3 - m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2^2 + 29(-1 + \mu_1)\mu_2^3 + 10\mu_2^4) - r(-4m^4(1 + \mu_1) + 2m^2(2(-9 + m^2) + 11\mu_1 + 7\mu_1^2)\mu_2 + \\
& 3(-27 + 8m^2 + (54 + m^2)\mu_1 - 27\mu_1^2)\mu_2^2 + (129 + 5m^2 - 142\mu_1 + 13\mu_1^2)\mu_2^3 + 5(-11 + \mu_1)\mu_2^4) + r^4(42 + 5m^2 + 13\mu_1 - 70\mu_2 + \\
& 5\mu_1(-11 + 4\mu_2)) - r^3(-27 + 6m^2 + 5(31 + 3m^2)\mu_2 - 130\mu_2^2 + 3\mu_1^2(-9 + 13\mu_2) + \mu_1(54 + 3m^2 - 194\mu_2 + 30\mu_2^2))) + \\
& \lambda_1 (m^2 + (-1 + \mu_1)(r - \mu_2))^3 (-4m^4 \lambda_5^2 (-m^4 + m^2 r^2 + r(1 + m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)(1 - m^2 - 2r(-1 + \mu_1) + \mu_1^2 + 2\mu_1(-1 + \mu_2) - 2\mu_2) + \\
& (-1 + \mu_1)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + m^2\mu_2^2 - r(-1 + 3(1 + m^2)\mu_1 - 3\mu_1^2 + \mu_1^3 + m^2(-3 + 2\mu_2))) + 4m\lambda_5 \lambda_6 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) \\
& ((r - \mu_2)^2 (2 + m^2 + r - (4 + r)\mu_1 + 2\mu_1^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2) + r(-1 + \mu_1)^2 (m^2 + 2r^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2 + 2\mu_2^2 - r(-1 + \mu_1 + 4\mu_2))) + 4m^2 \lambda_4 \lambda_5 \\
& (-m^4 + r^3(-4 + 7\mu_1 - 3\mu_1^2) - (-1 + \mu_1)(1 - 2m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 - 3(-1 + \mu_1)^2\mu_2^2 - (-1 + \mu_1)\mu_2^3 + 3r^2(-1 + \mu_1)(2 - m^2 + \mu_1^2 - 3\mu_2 + \mu_1(-3 + 2\mu_2)) - \\
& r(2 - 3m^2 + m^4 + \mu_1^4 + 3(-3 + m^2)\mu_2 + 6\mu_2^2 + \mu_1^3(-5 + 3\mu_2) + \mu_1(-7 + 4m^2 - 3(-7 + m^2)\mu_2 - 9\mu_2^2) + \mu_1^2(9 - m^2 - 15\mu_2 + 3\mu_2^2))) + \\
& \lambda_3^2 (r(1 - \mu_1)(m^4(-1 + \mu_1) + r^4(-1 + \mu_1) + m^2(7 + 5m^2 - 14\mu_1 + 7\mu_1^2)\mu_2 + 6m^2(-1 + \mu_1)\mu_2^2 + (5 + 7m^2 - 10\mu_1 + 5\mu_1^2)\mu_2^3 + \\
& (-1 + \mu_1)\mu_2^4 + 3r^2(2m^2(-1 + \mu_1) + (5 + 7m^2 - 10\mu_1 + 5\mu_1^2)\mu_2 + 2(-1 + \mu_1)\mu_2^2) - r(m^2(7 + 5m^2 - 14\mu_1 + 7\mu_1^2) + \\
& 12m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 + 3(5 + 7m^2 - 10\mu_1 + 5\mu_1^2)\mu_2^2 + 4(-1 + \mu_1)\mu_2^3) - r^3(5 + 7m^2 + 5\mu_1^2 - 4\mu_2 + 2\mu_1(-5 + 2\mu_2))) + \\
& (r - \mu_2)(-m^4(-1 + \mu_1) + r^4(-1 + \mu_1) + m^2(3 - 5m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2 + 6(-1 + \mu_1)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2^2 + (3 + 7m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2^3 + \\
& (-1 + \mu_1)\mu_2^4 - r(m^2(3 - 5m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2) + 12(-1 + \mu_1)(1 + 3m^2 - 2\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 + 3(3 + 7m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2^2 + 4(-1 + \mu_1)\mu_2^3) - \\
& r^3(3 + 7m^2 + 3\mu_1^2 - 4\mu_2 + \mu_1(-6 + 4\mu_2)) + 3r^2(-2 - 6m^2 + 2\mu_1^3 + 3\mu_1^2(-2 + \mu_2) + 3\mu_2 + 7m^2\mu_2 - 2\mu_2^2 + 2\mu_1(3 + 3m^2 - 3\mu_2 + \mu_2^2))) - \\
& 2\lambda_3 (-\lambda_6 (1 + r - \mu_1 - \mu_2) (-r^4(2 - 3\mu_1 + \mu_1^2) - 3r^2(m^2(2 - 3\mu_1 + \mu_1^2) + (-2 - 5m^2 + 2(2 + m^2)\mu_1 - 2\mu_1^2)\mu_2 + (3 - 4\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2^2) + \\
& \mu_2(-m^4 + 3m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 + (2 + 3m^2 - 4\mu_1 + 2\mu_1^2)\mu_2^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2^3) + r(m^4\mu_1 + 3m^2(3 - 4\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2 - \\
& 3(2 + 4m^2 - (4 + m^2)\mu_1 + 2\mu_1^2)\mu_2^2 + (5 - 6\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2^3) + r^3(-2 - 6m^2 + \mu_1(4 + 3m^2 - 10\mu_2) + 7\mu_2 + \mu_1^2(-2 + 3\mu_2))) + \\
& m\lambda_4 ((m^2 + r^2 - 2r\mu_2 + \mu_2^2) (-m^2(-1 + \mu_1) + r^2(-1 + \mu_1) - r(3 + m^2 + 3\mu_1^2 + 2\mu_1(-3 + \mu_2) - 2\mu_2) + (3 + m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2 + (-1 + \mu_1)\mu_2^2) + \\
& 2r(1 - \mu_1) (r^3(-1 + \mu_1) + m^2(-1 + m^2 + 2\mu_1 - \mu_1^2) - 3m^2(-1 + \mu_1)\mu_2 - 3r^2(-1 + \mu_1)\mu_2 - (-1 + \mu_1)\mu_2^3 + 3r(-1 + \mu_1)(m^2 + \mu_2^2))) + \\
& m\lambda_5 (r^4(-3 + 5\mu_1 - 2\mu_1^2) + r^3(-12 - 11m^2 + 9\mu_1^3 + \mu_1(33 + 6m^2 - 16\mu_2) + 6\mu_1^2(-5 + \mu_2) + 10\mu_2) + \mu_2(-4m^4 + \\
& (-1 + \mu_1)(6 + 13m^2 - 12\mu_1 + 6\mu_1^2)\mu_2 + (3 + 5m^2 - 6\mu_1 + 3\mu_1^2)\mu_2^2 + (-1 + \mu_1)\mu_2^3) + r(m^2(-3 + 2m^2 + (9 + 2m^2)\mu_1 - 9\mu_1^2 + 3\mu_1^3) + (15 + \\
& 27m^2 - 2m^4 - 4(12 + 7m^2)\mu_1 + (54 + m^2)\mu_1^2 - 24\mu_1^3 + 3\mu_1^4)\mu_2 + 3(-6 - 7m^2 + (15 + 2m^2)\mu_1 - 12\mu_1^2 + 3\mu_1^3)\mu_2^2 + 2(3 - 4\mu_1 + \mu_1^2)\mu_2^3) - \\
& r^2(9 + 14m^2 - 2m^4 + 3\mu_1^4 + 18\mu_1^3(-1 + \mu_2) - 27(1 + m^2)\mu_2 + 12\mu_2^2 + \mu_1^2(36 + m^2 - 63\mu_2 + 6\mu_2^2) - 3\mu_1(5(2 + m^2) - 4(6 + m^2)\mu_2 + 6\mu_2^2))) + \\
& \pi \lambda_1 (1 + r - \mu_1 - \mu_2)^3 (m^2 + r(-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2)^6 (-2 + \eta_1 + 2(\eta_1 + \xi_1)) / (2 \\
& \pi \\
& (1 + r - \mu_1 - \mu_2)^3 \\
& (m^2 + r(-1 + \mu_1) + \mu_2 - \mu_1 \mu_2)^6)
\end{aligned}$$

B. Dimensiones anómalas

Se presenta la forma completa de las dimensiones anómalas calculadas en la sección 7. Se presentan en el formato de Mathematica para facilitar su muestra.

$$\begin{aligned} \xi_1 + \eta_1 = & - \left(\left(\lambda_5^2 \left(m^2 - (1-\mu_1)(r-\mu_2) \right)^2 \left(-m^2(1+r)^2 + 4r(1-\mu_1)(r-\mu_2) \right) - 2m^2\lambda_1\lambda_5 \left(m^4(1+r)^2 - m^2 \left(r^2(1-\mu_1)^2 + 2(1+r(3+r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (r-\mu_2)^2 \right) + 2r(1-\mu_1) \left((1-\mu_1)^2 + 4(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) (r-\mu_2) + r^2(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+2(r-\mu_2))(1+r-\mu_1-\mu_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. (r-\mu_2)^2(r+2(1-\mu_1)-\mu_2)(1+r-\mu_1-\mu_2) \right) + \lambda_5^2 \left(-m^6(1+r)^2 - m^2r(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+3(r-\mu_2))((-2+r)(1-\mu_1)+r(r-\mu_2)) + \right. \right. \\ & \left. \left. m^4 \left((1+2(-1+r)r)(1-\mu_1)^2 + (3+r(4+3r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) + r^2(1-\mu_1)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \right. \\ & \left. \lambda_1^2 \left(-m^6(1+r)^2 + m^4 \left(r^2(1-\mu_1)^2 + (3+r(4+3r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (2+(-2+r)r)(r-\mu_2)^2 \right) + m^2(-1+\mu_1+(-1+2r)(r-\mu_2)) \right. \right. \\ & \left. \left. (r-\mu_2)^2(r+3(1-\mu_1)-\mu_2) + (r-\mu_2)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \right) / \left(4\pi(-m^2+(1-\mu_1)(r-\mu_2))^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 + \eta_2 = & - \left(\left(\lambda_4^2 \left(m^2 - (1-\mu_1)(r-\mu_2) \right)^2 \left(-m^2(1+r)^2 + 4r(1-\mu_1)(r-\mu_2) \right) - 2m^2\lambda_2\lambda_6 \left(m^4(1+r)^2 - m^2 \left(r^2(1-\mu_1)^2 + 2(1+r(3+r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (r-\mu_2)^2 \right) + 2r(1-\mu_1) \left((1-\mu_1)^2 + 4(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) (r-\mu_2) + r^2(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+2(r-\mu_2))(1+r-\mu_1-\mu_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. (r-\mu_2)^2(r+2(1-\mu_1)-\mu_2)(1+r-\mu_1-\mu_2) \right) + \lambda_2^2 \left(-m^6(1+r)^2 - m^2r(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+3(r-\mu_2))((-2+r)(1-\mu_1)+r(r-\mu_2)) + \right. \right. \\ & \left. \left. m^4 \left((1+2(-1+r)r)(1-\mu_1)^2 + (3+r(4+3r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) + r^2(1-\mu_1)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \right. \\ & \left. \lambda_6^2 \left(-m^6(1+r)^2 + m^4 \left(r^2(1-\mu_1)^2 + (3+r(4+3r))(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (2+(-2+r)r)(r-\mu_2)^2 \right) + m^2(-1+\mu_1+(-1+2r)(r-\mu_2)) \right. \right. \\ & \left. \left. (r-\mu_2)^2(r+3(1-\mu_1)-\mu_2) + (r-\mu_2)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \right) / \left(4\pi r(-m^2+(1-\mu_1)(r-\mu_2))^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \left(m\lambda_3\lambda_5 \left(m^4(1+3r(1-\mu_1)-\mu_1-(3+r)(r-\mu_2)) + (1-\mu_1)^3 \left(2r(1-\mu_1)^2 + (1+7r(1-\mu_1)-\mu_1)(r-\mu_2) + (5+9r)(r-\mu_2)^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. m^2 \left(-((-1+r)(1-\mu_1)^3) - 6r(1-\mu_1)^2(r-\mu_2) + 3(3+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^2 + 2(r-\mu_2)^3 \right) \right) + \\ & m\lambda_1 \left(\lambda_3 \left(m^4(-((1+3r)(1-\mu_1)) + (3+r)(r-\mu_2)) + m^2 \left(2r(1-\mu_1)^3 + 3(1+3r)(1-\mu_1)^2(r-\mu_2) - 6(1-\mu_1)(r-\mu_2)^2 + (-1+r)(r-\mu_2)^3 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left((9+5r)(1-\mu_1)^2 + (7+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + 2(r-\mu_2)^2 \right) (r-\mu_2)^3 \right) - \\ & 2m\lambda_5 \left(2m^4(1+r) + r(1-\mu_1)^4 - m^2 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) + (1+4r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2) + \right. \\ & \left. 6(1+r)(1-\mu_1)^2(r-\mu_2)^2 + (4+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^3 + (r-\mu_2)^4 \right) + \\ & \lambda_5^2 \left(2m^6(1+r) + m^2(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+3(r-\mu_2))(-1+\mu_1+r(r-\mu_2)) - m^4 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) - \right. \\ & \left. r(1-\mu_1)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \lambda_1^2 \left(2m^6(1+r) - m^4 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) - \right. \\ & \left. m^2(-1+\mu_1+r(r-\mu_2))(r-\mu_2)^2(r+3(1-\mu_1)-\mu_2) - (r-\mu_2)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \\ & \lambda_3^2 \left(-m^2 \left(r(1-\mu_1)^4 + (1+4r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2) + (4+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^3 + (r-\mu_2)^4 \right) - 2(1+r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2)^3 + \right. \\ & \left. m^4(r-r(1-\mu_1)-\mu_2)(-1+r+\mu_1-\mu_2) \right) / \left(2\pi(-m^2+(1-\mu_1)(r-\mu_2))^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \left(m\lambda_2 \left(\lambda_4 \left(m^4(1+3r(1-\mu_1)-\mu_1-(3+r)(r-\mu_2)) + (1-\mu_1)^3 \left(2r(1-\mu_1)^2 + (1+7r(1-\mu_1)-\mu_1)(r-\mu_2) + (5+9r)(r-\mu_2)^2 \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. m^2 \left(-((-1+r)(1-\mu_1)^3) - 6r(1-\mu_1)^2(r-\mu_2) + 3(3+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^2 + 2(r-\mu_2)^3 \right) \right) - \\ & 2m\lambda_6 \left(2m^4(1+r) + r(1-\mu_1)^4 - m^2 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) + (1+4r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2) + \right. \\ & \left. 6(1+r)(1-\mu_1)^2(r-\mu_2)^2 + (4+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^3 + (r-\mu_2)^4 \right) + \\ & m\lambda_4\lambda_6 \left(m^4(-((1+3r)(1-\mu_1)) + (3+r)(r-\mu_2)) + m^2 \left(2r(1-\mu_1)^3 + 3(1+3r)(1-\mu_1)^2(r-\mu_2) - 6(1-\mu_1)(r-\mu_2)^2 + (-1+r)(r-\mu_2)^3 \right) + \right. \\ & \left. \left((9+5r)(1-\mu_1)^2 + (7+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + 2(r-\mu_2)^2 \right) (r-\mu_2)^3 \right) + \\ & \lambda_2^2 \left(2m^6(1+r) + m^2(1-\mu_1)^2(1-\mu_1+3(r-\mu_2))(-1+\mu_1+r(r-\mu_2)) - m^4 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) - \right. \\ & \left. r(1-\mu_1)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \lambda_6^2 \left(2m^6(1+r) - m^4 \left(r(1-\mu_1)^2 + 5(1+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2) + (r-\mu_2)^2 \right) - \right. \\ & \left. m^2(-1+\mu_1+r(r-\mu_2))(r-\mu_2)^2(r+3(1-\mu_1)-\mu_2) - (r-\mu_2)^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) + \\ & \lambda_4^2 \left(-m^2 \left(r(1-\mu_1)^4 + (1+4r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2) + (4+r)(1-\mu_1)(r-\mu_2)^3 + (r-\mu_2)^4 \right) - 2(1+r)(1-\mu_1)^3(r-\mu_2)^3 + \right. \\ & \left. m^4(r-r(1-\mu_1)-\mu_2)(-1+r+\mu_1-\mu_2) \right) / \left(2\pi(-m^2+(1-\mu_1)(r-\mu_2))^3(1+r-\mu_1-\mu_2)^3 \right) \end{aligned}$$

C. Puntos Fijos UV

En el cuerpo de la tesis se mencionaron solamente los puntos fijos que sirvieron para realizar el análisis correspondiente que fueran mayormente atractores en el IR, en este apéndice se mostrarán ejemplos de otros puntos fijos encontrados mayormente atractores en el UV, lo cual se puede corroborar en los cuadros 14 y 16. Para el caso $\eta_i \neq 0$ se muestran los puntos fijos en el cuadro 13 y sus respectivos auto-valores en 14.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1897	0.1897	0.1897	0.3821	0.3821	0.7642	0.7642	0.3821	0.3821	0.1077
0.0695	0.0695	0.0695	0.4779	0.4779	0.9557	0.9557	0.4779	0.4779	1.
0.1333	0.1333	0	1.1563	-1.1574	-0.1963	-0.1677	-0.0839	-0.0982	1.

Cuadro 13: Ejemplos de puntos fijos mayormente atractores en UV, con $\eta_i \neq 0$.

-12.2448	6.4175	-2.	-2.	-1.8367	-0.7327	-0.7327	-0.7327	0.5345	-0.3664
-2.0907	-2.0902	-2.0902	1.9802	-1.1629	-1.1629	-1.1629	-0.5815	-0.1454	-0.0902
2.4576	2.4494	-2.1667	-2.0409	-2.0345	-0.6667	-0.6667	-0.0095	-0.0025	$-8.5 \cdot 10^{-14}$

Cuadro 14: Auto-valores asociados al cuadro 13.

Ahora se verán los puntos cuando $\eta = 0$ en el cuadro 15 y sus respectivos auto-valores en 16.

μ_1	μ_2	m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	r
0.1053	0.1053	0.	0.8099	-0.6406	0.3625	1.0553	0.5277	0.1812	0.9999
0.0604	0.0611	0.0608	0.4271	0.4346	0.8592	0.8642	0.4321	0.4296	0.9924

Cuadro 15: Ejemplos de puntos fijos mayormente atractores en UV, con $\eta_i = 0$.

2.3736	-1.9181	-1.8889	1.7835	-1.7788	-0.4445	-0.4445	-0.0558	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	0.
1.9859	-1.9528	-1.9528	-1.9527	-0.9528	-0.9528	-0.9528	-0.4764	-0.0719	0.

Cuadro 16: Auto-valores asociados al cuadro 15.